O DVOJICÍCH PLOCH SE SPOLEČNÝMI DIFERENCIÁLNÍMI INVARIANTY

F. VYČICHLO, PRAHA

Při studiu diferenciálních vlastností plochy vycházíme od svazku tečných vektorů v bodě, který v geometrii indukované geometrií okolního prostoru nebo určené geometrií plochy umožňuje vytvářet diferenciální invarianty, které do jisté míry charakterisují plochu v okolí bodu.

Je-li plocha dána v trojrozměrném euklidovském prostoru rovnicí

$$x^i = f^i(u^1, u^2), \qquad i = 1, 2, 3$$

tvoří se diferenciální invarianty prvého řádu pomocí vektorů $\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}$, $(\alpha = 1,2)$; geometrie ve svazku je určena formou $ds^2 = a_{\lambda\mu}\, du^\lambda\, du^\mu$.

Obdobně můžeme postupovat u dvojice ploch, jestliže body obou ploch jsou sobě přiřazeny známým způsobem [1].

Předpokládejme tedy, že jsou dány dvě plochy ${}^1P$, ${}^2P$ v trojrozměrném euklidovském prostoru rovnicemi

$$^1x^i = {}^1f^i(u^1, u^2), \quad {}^2x^i = {}^2f^i(u^1, u^2), \tag{1}$$

t. j. obě plochy jsou k sobě vztaženy v bodové příbuznosti tak, že si přísluší body o týchž parametrech.

Budeme předpokládat, že funkce ${}^1f^i$, ${}^2f^i$, definované v oblasti Ω, mají v ní spojité derivace do 3. řádu včetně.

Ze čtyř tečných vektorů

$$\frac{\partial^1 f}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha} \text{ o složkách } \frac{\partial^1 f^i}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^\alpha}, \tag{2}$$

ve dvou odpovídajících si bodech

$$^1M(u_0^1, u_0^2) \in {}^1P, \quad {}^2M(u_0^1, u_0^2) \in {}^2P, \quad [(u_0^1, u_0^2) \in \Omega]$$

utvořme tyto metrické diferenciální invarianty dvojice ploch:

$$\begin{aligned} {}^1n &= \frac{\partial^1 f}{\partial u^1} \times \frac{\partial^1 f}{\partial u^2}, \quad {}^2n = \frac{\partial^2 f}{\partial u^1} \times \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \\ b &= \frac{\partial^1 f}{\partial u^1} \times \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^1 f}{\partial u^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial u^1}, \\ s &= \frac{\partial^1 f}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^1 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^1}. \end{aligned} \tag{3}$$

První tři výrazy obsahují vektorové součiny obvyklé v euklidovském prostoru a definují tři vektory, poslední výraz, v němž jsou součiny skalární, určuje skalár.

Invariance výrazů (3) ke grupě pohybové i k změně parametrů u obou ploch je zřejmá.

Problém, který budeme řešit, je tento:

Jsou dány dvě plochy (1) *a jejich invarianty* (3) *jako funkce* ${}^1n^i(u^1, u^2)$, ${}^2n^i(u^1, u^2)$, $b^i\,(u^1, u^2)$, $s\,(u^1, u^2)$ *proměnných* u^1, u^2 *v oblasti* Ω. *Ptáme se, existují-li mimo plochy* (1) *další dvojice ploch, které mají tytéž invarianty* (3).

Poznámka. Za předpokladu existence další dvojice ploch odvodíme nutné podmínky a potom určíme takové dvojice integrací základních rovnic.

1. Dokážeme nejdříve tuto větu:

Věta 1. *Nutná podmínka, aby existovaly vedle ploch* (1) *další dvojice ploch s invarianty* (3), *které nevzniknou ani translací ani symetrií z dvojice* (1), *je, aby existovaly v odpovídajících si bodech obou ploch sdružené směry, které by si odpovídaly v korespondenci mezi oběma plochami.*

Poznámka. Přihlédneme-li k tomu, že sdružené směry jsou tečnami sdružených křivek a že korespondence platí v celé uvažované oblasti, můžeme větu také vyslovit takto:

Nutná podmínka, aby existovaly vedle ploch (1) *další dvojice ploch s invarianty* (3), *které nevzniknou ani translací ani symetrií z dvojice* (1), *je, aby na každé z ploch* (1) *existovala síť sdružených čar, které by odpovídala v korespondenci obou ploch síť sdružených čar druhé plochy.*

Důkaz: Předpokládejme tedy, že vedle dvojice ${}^1P$, ${}^2P$ existuje další dvojice ${}^1\overline{P}$, ${}^2\overline{P}$ s týmiž invarianty (3). Vylučujeme z úvah případ, kdy dvojice vznikne z dané posunutím nebo středovou symetrií a kdy rovnost invariantů (3) nové dvojice a dvojice dané je zřejmá.

Plochy ${}^1P$ a ${}^1\overline{P}$ si odpovídají v bodové korespondenci, v níž bodu ${}^1M(u^1_0, u^2_0) \in {}^1P$ přiřadíme bod ${}^1\overline{M}(u^1_0, u^2_0) \in {}^1\overline{P}$. Poněvadž ${}^1n = {}^1\overline{n}$ v bodech ${}^1M$ a ${}^1\overline{M}$, jsou tečné roviny v těchto bodech vzájemně rovnoběžné.

Korespondence mezi oběma plochami indukuje mezi svazky tečných vektorů o středech ${}^1M$ a ${}^1\overline{M}$ tečnou kolineaci.[1]

---

[1] Píšeme-li korespondenci mezi ${}^1P$ a ${}^1\overline{P}$ pomocí vztahů

$$\overline{u}^1 = \varphi(u^1, u^2), \qquad \overline{u}^2 = \psi(u^1, u^2), \tag{4}$$

kde φ, ψ jsou funkce mající v Ω spojité derivace až do 3. řádu. Tečný vektor v ${}^1M$ je určen poměrem $k_1 = du^1 : du^2$, v korespondenci odpovídající vektor v ${}^1\overline{M}$ poměrem $k_2 = d\overline{u}^1 : d\overline{u}^2$, pro který platí

$$k_2 = \frac{\varphi_1 k_1 + \varphi_2}{\psi_1 k_1 + \psi_2}, \text{ kde } \varphi_\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}, \ \psi_\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial u^\alpha}. \tag{5}$$

Tato rovnice je rovnicí tečné kolineace.

Určeme nyní v obou svazcích ty směry, které si odpovídají a jsou rovnoběžné. Z rovnice kolineace je patrno, že všechny vektory svazků mohou mít vlastnost, že každému odpovídá rovnoběžný vektor, nebo že existují dva takové vektory, nebo konečně, že je jen jeden vektor svazku ${}^1M$, jemuž odpovídá rovnoběžný vektor tečný v bodě ${}^1\overline{M}$. Konstrukci proveďme pro všechny body plochy.

Také u ploch ${}^2P$, ${}^2\overline{P}$ sestrojme v každých dvou odpovídajících si bodech směry, které si odpovídají v příslušné tečné kolineaci a jsou rovnoběžné.

Případ, kdy všechny tečné směry v bodě plochy ${}^1P$ mají za odpovídající rovnoběžné tečné směry plochy ${}^1\overline{P}$, nastává současně se shodným případem u ploch ${}^2P$ a ${}^2\overline{P}$, když plochy dvojice ${}^1\overline{P}$, ${}^2\overline{P}$ vzniknou z ploch dvojice ${}^1P$, ${}^2P$ posunutím nebo souměrností podle středu. A nahlédneme snadno, že se tak stane jen v těchto případech. V tomto případě tečná kolineace mezi tečnými rovinami ploch ${}^1P$ a ${}^1\overline{P}$ přechází v podobnost svazků $({}^1M)$, $({}^1\overline{M})$. Stejně je tomu u ploch ${}^2P$ a ${}^2\overline{P}$ ve všech bodech. Z rovnosti invariantů (3) pro dvojice $({}^1P, {}^2P)$, $({}^1\overline{P}, {}^2\overline{P})$ a z okolnosti, že podobnost nastává ve všech bodech ploch, výplyne, že charakteristika podobnosti je ± 1. Platí tedy také

$$\frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u^1} = \pm \frac{\partial\, {}^1\overline{f^i}}{\partial u^1}, \quad \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u^2} = \pm \frac{\partial\, {}^1\overline{f^i}}{\partial u^2} \qquad \text{pro všechna } u^1, u^2.$$

Odtud

$${}^1\overline{f^i} = \pm f^i + a^i, \qquad (a^i \text{ jsou konstanty})$$

$${}^2\overline{f^i} = \pm f^i + b^i, \qquad (b^i \text{ jsou konstanty}).$$

Dvojice ${}^1\overline{P}$, ${}^2\overline{P}$ je tedy shodná s dvojicí ${}^1P$, ${}^2P$. Každá plocha vznikne z příslušné plochy prvé dvojice buď posunutím, nebo souměrností podle libovolného bodu.

Všimněme si nyní případu, kdy v každém bodě plochy ${}^1P$ existují *dva různé tečné směry*, k nimž příslušné v odpovídajícím bodě na ${}^1\overline{P}$ jsou s nimi rovnoběžné.

Změňme souřadnice u^1, u^2 na ploše tak, aby tyto směry byly tečnami nových souřadnicových čar, které označíme u, v.

Pro tyto parametry platí

$$\frac{\partial\, {}^1\overline{f^i}}{\partial u} = \lambda \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u}, \quad \frac{\partial\, {}^1\overline{f^i}}{\partial v} = \mu \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial v}, \tag{6}$$

při čemž

$$\lambda\mu = 1, \tag{7}$$

vzhledem k rovnosti ${}^1n = {}^1\overline{n}$.

Obdobné rovnice určíme pro plochy ${}^2P$, ${}^2\overline{P}$. Poněvadž kolineace mezi tečnými vektory plochy ${}^1P$, ${}^1\bar{P}$ je shodná s tečnou kolineací u ploch ${}^2P$, ${}^2\bar{P}$, a platí vedle ${}^2\bar{n} = {}^2n$ také $\bar{b} = b$, $\bar{s} = s$, dostaneme

$$\frac{\partial\, {}^2\bar{f}^i}{\partial u} = \lambda \frac{\partial\, {}^2f^i}{\partial u}, \quad \frac{\partial\, {}^2\bar{f}^i}{\partial v} = \mu \frac{\partial\, {}^2f^i}{\partial v}, \tag{6a}$$

s podmínkou

$$\lambda\mu = 1. \tag{7a}$$

Z rovnic (6) derivováním podle v, resp. u, dostaneme

$$\frac{\partial^2\, {}^1\bar{f}^i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u} + \lambda \frac{\partial^2\, {}^1f^i}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2\, {}^1\bar{f}^i}{\partial v \partial u} = \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial v} + \mu \frac{\partial^2\, {}^1f^i}{\partial v \partial u}.$$

Poněvadž 2. derivace jsou záměnné, vzhledem k předpokladu spojitosti derivací, dostaneme

$$(\lambda - \mu)\frac{\partial^2\, {}^1f^i}{\partial u \partial v} + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u} - \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial v} = 0. \tag{8}$$

Obdobně pro ${}^2f^i$ platí

$$(\lambda - \mu)\frac{\partial^2\, {}^2f^i}{\partial u \partial v} + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\, {}^2f^i}{\partial u} - \frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\, {}^2f^i}{\partial v} = 0. \tag{9}$$

Rovnice (7), (8) a (9) jsou splněny při $\lambda = \mu = 1$ nebo $\lambda = \mu = -1$ při každé dvojici ${}^1f^i$, ${}^2f^i$. Toto řešení je triviální a shoduje se s předchozím případem.

Když

$$\det. \left| \frac{\partial^2\, {}^1f^i}{\partial u \partial v}, \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u}, \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial v} \right| \neq 0,$$

nebo

$$\det. \left| \frac{\partial^2\, {}^2f^i}{\partial u \partial v}, \frac{\partial\, {}^2f^i}{\partial u}, \frac{\partial\, {}^2f^i}{\partial v} \right| \neq 0,$$

je

$$\lambda = \mu = \pm 1, \ \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\partial\mu}{\partial u} = 0,$$

což je opět předchozí případ, který vylučujeme.

Pro netriviální případ musí tedy

$$\det. \left| \frac{\partial^2\, {}^1f^i}{\partial u \partial v}, \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u}, \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial v} \right| = 0 \tag{10}$$

a také

$$\det. \left| \frac{\partial^2\, {}^2f^i}{\partial u \partial v}, \frac{\partial\, {}^2f^i}{\partial u}, \frac{\partial\, {}^2f^i}{\partial v} \right| = 0, \tag{11}$$

t. j. čáry u = konst., v = konst. jsou sdružené křivky na ploše ${}^1P$ i na ploše ${}^2P$.

V případě, že v každém páru bodů ${}^1M$, ${}^1\bar{M}$ existuje jen *jediný směr*, který si sám odpovídá v tečné kolineaci mezi oběma tečnými rovinami, dokážeme, že plochy ${}^1P$ a ${}^1\bar{P}$ a ${}^2P$, ${}^2\bar{P}$ jsou přímkové.

Zvolme na ${}^1P$ a ${}^1P$ křivky, které jsou obaleny uvažovaným směrem za $v = $ konst., křivky $u =$ konst. volme v asymptotických křivkách.[2]

Poněvadž obdobně se chová dvojice ploch ${}^2P$, ${}^2\overline{P}$, provedeme tutéž úvahu a obdobnou volbu parametrických čar na nich.

Tečná kolineace mezi svazky tečných směrů o středech ${}^1M$ a ${}^1M$, která má jediný samodružný směr, dává vztahy

$$\frac{\partial\, \overline{{}^1f^i}}{\partial u} = \pm \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u}, \quad \frac{\partial\, \overline{{}^1f^i}}{\partial v} = \pm \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial v} + \lambda \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u}. \tag{12}$$

Obdobně

$$\frac{\partial\, \overline{{}^2f^i}}{\partial u} = \pm \frac{\partial\, {}^2f^i}{\partial u}, \quad \frac{\partial\, \overline{{}^2f^i}}{\partial v} = \pm \frac{\partial\, {}^2f^i}{\partial v} + \lambda \frac{\partial\, {}^2f^i}{\partial u}. \tag{13}$$

V rovnicích (12) a (13) se vyskytuje táž funkce $\lambda(u, v)$, poněvadž jsou si rovny invarianty (3) obou dvojic. Dále je patrno, že v netriviálním případě je $\lambda \neq 0$.

Z rovnic (12), resp. (13), dostaneme

$$\frac{\partial^2\, \overline{{}^1f^i}}{\partial u \partial v} = \pm \frac{\partial^2\, {}^1f^i}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2\, \overline{{}^1f^i}}{\partial v \partial u} = \pm \frac{\partial^2\, {}^1f^i}{\partial v \partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u}\right),$$

t. j.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u}\right) = 0. \tag{14}$$

Jsou tedy funkce $\lambda \dfrac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u}$ závislé jen na v, t. j. každá čára $v =$ konst. má stálý směr $\left(\lambda \dfrac{\partial\, {}^1f^i}{\partial u}\right)_{v = \text{konst.}}$ a je tedy přímkou.

Plocha ${}^1P$ (${}^1P$) a obdobně ${}^2P$ (${}^2P$) je tedy přímková a přímky si odpovídají v korespondenci mezi oběma plochami.

Poněvadž jsme volili také čáry $u =$ konst. asymptotické, je zřejmé, že při zobrazení bodu ${}^1M$ (u_0, v_0) do ${}^2M$ (u_0, v_0) sdruženým směrům plochy ${}^1P$ odpovídají sdružené směry plochy ${}^2P$, neboť tečné kolineace korespondence zachovají harmonický dvojpoměr mezi směry asymptotickými a směry sdružených čar.

Jestliže plochy ${}^1P$ a ${}^1P$ jsou rozvinutelné, můžeme zvolit v bodě ${}^1M$, resp. ${}^1M$, křivky $u =$ konst. libovolně na obou plochách, tak aby se nedotýkaly přímek $v =$ konst., a pokládat je spolu s přímkou $v =$ konst. za sdružené křivky. Obdobně je tomu u dvojice ${}^2P$, ${}^2\overline{P}$, a tedy také u dvojice ${}^1P$, ${}^2P$.

Máme tedy dokázáno, že i v tomto případě na plochách ${}^1P$, ${}^2P$ existují sítě sdružených křivek odpovídajících si v korespondenci mezi ${}^1P$ a ${}^2P$.

Víme-li, že na plochách ${}^1P$, ${}^2P$ nutně existují sdružené sítě, které si odpo-

[2] Předpoklad o jejich existenci je oprávněný a neomezuje obecnost úvah u ploch, které nejsou degenerované.

vídají v korespondenci obou ploch, je třeba ukázat, jak se určí. Učiníme tak v tomto odstavci.

Z rovnic (1) určíme koeficienty druhých fundamentálních forem ${}^1L$, ${}^1M$, ${}^1N$; ${}^2L$, ${}^2M$, ${}^2N$ obou ploch. Pro sdružené směry $(\mathrm{d}u^1 : \mathrm{d}u^2)$, $(\delta u^1 : \delta u^2)$ odpovídající si na ${}^1P$ a ${}^2P$ platí:

$$
\begin{aligned}
{}^1L\, du^1\delta u^1 + {}^1M\,(du^1\delta u^2 + du^2\delta u^1) + {}^1N du^2\delta u^2 &= 0,\\
{}^2L\, du^1\delta u^1 + {}^2M\,(du^1\delta u^2 + du^2\delta u^1) + {}^2N du^2\delta u^2 &= 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Z rovnic (15) plyne pro $\mathrm{d}u^1 : \mathrm{d}u^2$, nebo pro $\delta u^1 : \delta u^2$ tatáž rovnice

$$({}^1L{}^2M - {}^1M{}^2L)\,(\mathrm{d}u^1)^2 + ({}^1L{}^2N - {}^2L{}^1N)\,\mathrm{d}u^1 du^2 + ({}^1M{}^2N - {}^2M{}^1N)(\mathrm{d}u)^2 = 0. \tag{16}$$

Je-li v rovnici (16) diskriminant $D \neq 0$, dostaneme z (16) dva různé směry a integrací dva systémy sdružených a odpovídajících si křivek.

Je-li v (16) diskriminant $D = 0$, je buď

$${}^1L : {}^1M : {}^1N = {}^2L : {}^2M : {}^2N \tag{17}$$

a pak si odpovídají asymptotiky a existuje nekonečně mnoho směrů sdružených a odpovídajících si na obou plochách (viz poslední případ odst. 1), nebo vedle $D = 0$ je

$${}^1L : {}^1M : {}^1N \neq {}^2L : {}^2M : {}^2N. \tag{18}$$

V tomto případě, v důsledku poslední úvahy odstavce 1, si neodpovídají asymptotiky, a tedy neexistují sdružené čáry odpovídající si v korespondenci mezi plochami ${}^1P, {}^2P$.

V tomto odstavci dokážeme základní větu pro naše úvahy:

Věta 2. *Buďte ${}^1P$, ${}^2P$ plochy definované* (1) *a takové, že existují na nich sdružené křivky $u^1 = u = konst.$, $u^2 = v = konst.$, které si odpovídají v korespondenci, v níž bodu ${}^1M(u, v) \in {}^1P$ přísluší bod ${}^2M(u, v) \in {}^2P$.*

Dále předpokládejme v případě, kdy ${}^1P$ a ${}^2P$ jsou přímkové, že si jejich přímky neodpovídají.

Konečně buďte

$${}^i\Gamma^a_{bc} = {}^i\left\{{a \atop bc}\right\}, \quad (a, b, c = 1, 2)$$

Christoffelovy symboly plochy ${}^iP$.

Nutná a postačující podmínka pro existenci další netriviální dvojice ploch ${}^1P$, ${}^2P$, t. *j., která nevznikne z prvé posunutím nebo středovou souměrností, a která má tytéž invarianty* (3) *jako ${}^1P$, ${}^2P$, je*

1. $${}^1\Gamma^1_{12} = {}^2\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{12}, \qquad {}^1\Gamma^2_{12} = {}^2\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{12}, \tag{19ab}$$

2. *buď*

$$\left(2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial}{\partial u}\,\Gamma^1_{12}\right)\left(2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial}{\partial v}\,\Gamma^2_{12}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\,\Gamma^1_{12} - \frac{\partial}{\partial v}\,\Gamma^2_{12}\right) \neq 0. \tag{20}$$

nebo

$$2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} = \frac{\partial}{\partial u}\,\Gamma^1_{12} = \frac{\partial}{\partial v}\,\Gamma^2_{12}, \tag{21}$$

$$3. \qquad 2\Gamma^1_{12} \frac{\dfrac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}}{2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12}}{2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}}\right), \tag{22a}$$

$$2\Gamma^2_{12} \frac{\left(2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}\right)}{\left(2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}\right)^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\frac{\left(2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12}\right)}{\left(2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}\right)}. \tag{22b}$$

Jsou-li plochy ^1P a ^2P přímkové a odpovídají-li si přímky obou ploch v zmíněné korespondenci, pak nutná a postačující podmínka, aby existovaly další páry ploch ploch $^1\bar{P}$ a $^2\bar{P}$ s týmiž invarianty (3), *jako mají ^1P a ^2P, je, aby bodové řady na přímkách si odpovídajících byly podobné.*

Důkaz: Předpokládejme, že vedle ploch ^1P, ^2P existují netriviální plochy $^1\bar{P}$, $^2\bar{P}$ s týmiž invarianty (3). Základní Gaussovy rovnice pro plochy ^1P, ^2P jsou

$$\frac{\partial^2\, {}^k f^i}{\partial u \partial v} = {}^k\Gamma^1_{12}\frac{\partial\, {}^k f^i}{\partial u} + {}^k\Gamma^2_{12}\frac{\partial\, {}^k f^i}{\partial v}.^3 \qquad (k = 1, 2) \tag{23}$$

Vyloučíme-li z (23) a (8), resp. (9), druhé derivace $\dfrac{\partial^2\, {}^k f^i}{\partial u \partial v}$, dostaneme

$$(\mu - \lambda)\, {}^1\Gamma^1_{12} = \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \quad (\lambda - \mu)\, {}^1\Gamma^2_{12} = \frac{\partial \mu}{\partial u}, \tag{24}$$

$$(\mu - \lambda)\, {}^2\Gamma^1_{12} = \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \quad (\lambda - \mu)\, {}^2\Gamma^2_{12} = \frac{\partial \mu}{\partial u}. \tag{25}$$

Předpokládáme přitom lineární nezávislost vektorů $\dfrac{\partial\, {}^k f^i}{\partial u}, \dfrac{\partial\, {}^k f^i}{\partial v}$. Poněvadž $\lambda = \mu$ vede na $\lambda = \mu = \pm 1$ a tyto hodnoty platí jen pro triviální případy ploch $^1\bar{P}$, $^2\bar{P}$, je nutně $\lambda \neq \mu$ a z (24) a (25) plynou podmínky (19a, b) jako nutné. Můžeme tedy psát

$${}^1\Gamma^1_{12} = {}^2\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{12}, \quad {}^1\Gamma^2_{12} = {}^2\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12}.$$

Rovnice (24) a (25) se redukují tedy na dvě, na př. (24).

Podmínky integrability těchto rovnic jsou další nutné podmínky pro ^1P a ^2P. Určíme je:

[3] Člen s normálovým vektorem vypadne, poněvadž determinant rovnice (23) pro plochy ^1P, resp. ^2P, je $\left|\dfrac{\partial^2 {}^k f^i}{\partial u \partial v}, \dfrac{\partial\, {}^k f^i}{\partial u}, \dfrac{\partial\, {}^k f^i}{\partial v}\right| = 0$ podle rovnice (10).

Funkce λ, μ ve (24) mají v důsledku předpokladu o existenci spojitých třetích derivací funkcí ${}^kf^i$ a rovnic (8), (9) všechny derivace do 2. řádu spojité.

Platí tedy
$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial v\partial u}, \quad \frac{\partial^2\mu}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\mu}{\partial v\partial u}.$$

Vyloučíme-li z (24) a z rovnic (7), t. j. $\lambda\mu = 1$, na př. μ, dostaneme:
$$2(1-\lambda^2)\,\Gamma^1_{12} = \frac{\partial\lambda^2}{\partial v}, \quad 2\lambda^2(1-\lambda^2)\,\Gamma^2_{12} = \frac{\partial\lambda^2}{\partial u} \tag{26}$$
a odtud plyne podmínka integrability rovnic (24)
$$(\lambda^2-1)\left[\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u} - \lambda^2\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial v} + 2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}(\lambda^2-1)\right] = 0. \tag{27}$$
Pro $\lambda = \pm 1$ je (27) zřejmě splněna, to je však případ triviální. Pro ostatní případy, kdy $\lambda \neq \pm 1$, je
$$\lambda^2\left(2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial v}\right) = 2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u}. \tag{28}$$
Je patrno, když
$$2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial v} \neq 0, \tag{29}$$
že vzhledem k nutné podmínce pro nenulový vektor tečný $\lambda \neq 0$ je také
$$2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u} \neq 0. \tag{30}$$
Mimo to vidíme, že pro netriviální řešení, t. j. pro $\lambda \neq \pm 1$, musí
$$\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial v} \neq \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u}. \tag{31}$$
Je-li
$$2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial v} = 0, \tag{32}$$
je pro $\lambda \neq 0$
$$2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u} = 0 \tag{33}$$
a obráceně.

Je tedy
$$\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u} = \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial v}. \tag{34}$$

Pro $\lambda^2 \neq 1$, a tomu tak je při existenci netriviální $({}^1P, {}^2P)$, musí tedy být splněny (29), (30), (31), nebo (32), (33), (34).

Tyto podmínky jsou právě (20) a (21).

Vypočteme-li z podmínky integrability (28) hodnotu λ^2 a dosadíme do (26), dostaneme další nutné podmínky (22a), (22b).

Dokážeme nyní postačitelnost podmínek (19a, b) až (22b).

Pro plochy ${}^1P$, ${}^2P$ je třeba určit rovnice (6) a (6a) nebo (12) a (13), t. j. určit λ a μ při podmínce (7). Zabývejme se nejdříve případem rovnic (6) a (6a).

Rovnice (8), resp. (9), pro λ, resp. μ, je tedy třeba integrovat. To jsme v podstatě provedli.

Rovnice (26) pro λ^2 je při splnění (20) a dále (22a) (22b) integrovatelná jedinou hodnotou $\lambda^2 \neq 1$, vypočtenou z (28).

V prvém případě, při splnění (20) a dalších, *existuje tedy jediný pár ploch* ${}^1\bar{P}$, ${}^2\bar{P}$, který má tytéž invarianty (3) jako ${}^1P$ a ${}^2P$.

V druhém případě, při splnění (21) a dalších, rovnice (28) nedává λ^2 a je třeba vyjít od (21).

Především konstatujeme, že ve (21) jsou funkce Γ^1_{12}, Γ^2_{12} i jejich derivace spojité, neboť je lze vyjádřit nejvýše třetími derivacemi funkcí ${}^1f^i$, ${}^2f^i$, a u nich předpokládáme spojitost.

Z poslední rovnice (21) plyne, že existuje funkce $X(u, v)$ taková, že

$$\Gamma^1_{12} = \frac{\partial X}{\partial v}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{\partial X}{\partial u}. \tag{35}$$

První rovnice (21) zaručuje, že jsou splněny (22ab) a dává pro $X(u, v)$ vztah

$$2\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}. \tag{36}$$

Této rovnici zřejmě vyhovuje

$$X = -\frac{1}{2}\lg(U + V), \tag{37}$$

kde $U = U(u)$, $V = V(v)$.

Rovnice (26) pro λ^2 budou

$$\frac{\partial}{\partial v}\lg(U + V) = \frac{\partial}{\partial v}\lg(\lambda^2 - 1), \quad \frac{\partial}{\partial u}\lg(V + V) = \frac{\partial}{\partial u}\lg\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{38}$$

Odtud dostaneme

$$\lambda^2 - 1 = (U + V)U_1(u), \quad 1 - \frac{1}{\lambda^2} = (U + V)V_1(v), \tag{39}$$

kde $U_1(u)$ je funkcí jen u, $V_1(v)$ je funkcí jen v.

Z rovnic (39) dostaneme vztah mezi U, V, U_1 a V_1

$$(U_1 - V_1)(U + V) - U_1V_1(U + V)^2 = 0.$$

Poněvadž $U + V \neq 0$ [viz (37) a (35)],
je

$$U_1 - V_1 = U_1V_1(U + V). \tag{40}$$

$U_1 - V_1 = 0$ jen pro $\lambda^2 = 1$, t. j. v triviálním případě.

Rovnici (40) lze psát tedy

$$U(u) + \frac{1}{U_1(u)} = -V(v) + \frac{1}{V_1(v)},$$

t. j.

$$U + \frac{1}{U_1} = -V + \frac{1}{V_1} = C\ (= \text{konst.}).$$

Potom (39) dává

$$\lambda^2 = \frac{C + V}{C - U} \tag{41}$$

a rovnice (7) a (6) dají ${}^1\overline{f}^i$, resp. ${}^2\overline{f}^i$, t. j. hledané plochy ${}^1\overline{P}$, ${}^2\overline{P}$. V tomto případě dostáváme jednoparametrový systém dvojic ${}^1P$, ${}^2P$.

Poznámka. Systém s parametrem C je takový, že pro $C \to \infty$ je

$${}^1P(c) \to {}^1P,\quad {}^2P(c) \to {}^2P.$$

Nyní se vraťme k případu, kdy určujeme ${}^1\overline{P}$ a ${}^2\overline{P}$ z rovnic (12) a (13). Víme, že v tomto případě plochy ${}^1P$, ${}^2P$ jsou přímkové [viz rovnici (14)] a že si jejich přímky neodpovídají [2].

V tomto případě rovnice (24) a (26) jsou nahrazeny rovnicemi (14)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial\, {}^kf^i}{\partial u}\right) = 0, \quad (k = 1, 2)$$

které jsou vždy integrovatelné.

Určíme však plochy ${}^1\overline{P}$, ${}^2\overline{P}$ přímo.

Poněvadž ${}^1P$, ${}^2P$ jsou přímkové, můžeme jejich rovnice napsat ve tvaru

$${}^kf^i(u, v) = {}^kA(u, v)\, {}^kp^i(v) + {}^kq^i(v), \quad (k = 1, 2), \tag{42}$$

kde ${}^kp^i(v)$ je jednotkový vektor na přímce a ${}^kq^i(v)$ je radius-vektor řídící křivky.

Z rovnic (42) a (14) dostaneme

$$\lambda\, {}^kp^i \frac{\partial\, {}^kA}{\partial u} = {}^kV^i(v) \neq 0, \tag{43}$$

kde ${}^kV^i$ má derivace alespoň do 3. řádu spojité.

Rovnice (12) nabudou tvaru

$$\frac{\partial\, {}^k\overline{f}^i}{\partial u} = \pm \frac{\partial\, {}^kA}{\partial u}\, {}^kp^i(v),$$

$$\frac{\partial\, {}^k\overline{f}^i}{\partial v} = {}^kV^i(v) \pm \frac{\partial\, ({}^kA\, {}^kp^i)}{\partial v} \pm \frac{\partial\, {}^kq^i}{\partial v}. \tag{44}$$

Z první rovnice (44) vychází integrací

$${}^k\overline{f}^i(u, v) = \pm\, {}^kA\, {}^kp^i \pm {}^kr^i(v). \tag{45}$$

Druhá rovnice (44) dává po integraci pro ${}^k r^i(v)$

$${}^k r^i(v) = {}^k q^i \pm \int_0^v {}^k V^i(v)\,\mathrm{d}v,$$

takže

$${}^k \bar{f}^i = \int_0^v {}^k V^i(v)\,\mathrm{d}v \pm {}^k q^i(v) \pm {}^k A\, {}^k p^i(v). \tag{46}$$

Je zřejmé, že z existence ${}^k P^0$ plyne existence ${}^k V^i$, a dále, že pro $v =$ konst., t. j. pro přímky si odpovídající na ${}^k P$ a ${}^k \bar{P}$ obě bodové řady jsou shodné a jedna vznikne z druhé posunutím o vektor ${}^k l^i = \int_0^v {}^k V^i\, dv$.

Poněvadž ${}^1 p^i(v)$, ${}^2 p^i(v)$ jsou jednotkové vektory na přímkách rovnoběžných, plyne ze (43):

$${}^2 V^i(v) : {}^1 V^j(v) = {}^2 p^j \frac{\partial^2 A}{\partial u} : \frac{\partial^1 A}{\partial u}\, {}^1 p^j = \Phi(v), \tag{47}$$

t. j.

$${}^2 V(v) = \Phi(v) \,.\, {}^1 V(v),$$

nebo

$${}^2 A(u, v) = {}^1 A \Phi(v) + \psi(v). \tag{48}$$

Tyto rovnice ukazují, že bodová řada na přímce plochy ${}^2 P$ je podobná k bodové řadě na přímce odpovídající plochy ${}^1 P$.

Nutnost podmínky ve větě je prokázána.

Postačitelnost je zřejmá z obráceného postupu.

Poznámky.

1. V tomto případě *existuje tedy k* ${}^1 P$ *a* ${}^2 P$ *nekonečně mnoho párů* ${}^1 \bar{P}, {}^2 \bar{P}$, které mají s nimi stejné invarianty (3).

Plochy těchto dvojic jsou na sebe zobrazeny tak, že bodové řadě na každé přímce jedné plochy odpovídá *podobná řada* na přímce druhé plochy. Charakteristika podobnosti se mění při přechodu od přímky k přímce.

2. Snadným výpočtem vycházejícím z (6) a (7), resp. (12) a (13), zjistíme, že invarianty (3) dvojice ${}^1 \bar{P}, {}^2 \bar{P}$ jsou tytéž jako u ${}^1 P, {}^2 P$.

Závěr.

Je patrno, že jsme při svých úvahách podstatným způsobem použili tečné kolineace korespodence mezi oběma plochami. S její pomocí se nám podařilo integrovat základní rovnice.

Dále je zřejmé, že *invarianty* (3) *neurčují dvojici ploch* ${}^1 P, {}^2 P$ *jednoznačně*. Vzniká tedy otázka, kterým podmínkám musí invarianty (3) vyhovovat, aby jimi byla určena dvojice jednoznačně.

LITERATURA

1. Löbell, F., Differentialinvarianten bei Flächenabbildungen, Akad. Wiss. München, 1943, 217—237. 2. Vyčichlo, F., O diferenciálních invariantech zvláštní dvojice přímkových ploch. Sborník Geometrie v technice a v umění, STN, Praha 1955, 131—134.

Došlo 23. XII. 1955.

О ПАРАХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ОБЩИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ИНВАРИАНТАМИ

Ф. ВЫЧИХЛО

Выводы

Пусть

$$x^i = {}^kf^i(u^1, u^2), \qquad k = 1, 2, \; i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

уравнения поверхностей ${}^1P$, ${}^2P$.

Образуем во взаимно соответствующих точках ${}^1M(u_0^1, u_0^2) \in {}^1P$, ${}^2M(u_0^1, u_0^2) \in {}^2P$ инварианты

$$\begin{aligned}
{}^1n &= \frac{\partial^1 f}{\partial u^1} \times \frac{\partial^1 f}{\partial u^2} \\
{}^2n &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^1} \times \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \\
b &= \frac{\partial^1 f}{\partial u^1} \times \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^1 f}{\partial u^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial u^1} \\
s &= \frac{\partial^1 f}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^1 f}{\partial u^3} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^1},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\left(\frac{\partial^k f}{\partial u^\alpha}\right)_{(u_0^1,\, u_0^2)}$, $(\alpha = 1, 2)$ — четыре касательных вектора с составляющими

$$\left(\frac{\partial^k f^i}{\partial u^\alpha}\right)_{(u_0^1,\, u_0^2)}.$$

Проблема, решаемая в работе, такова:

Существуют-ли кроме поверхностей (1) и дальнейшие пары поверхностей, обладающие теми же инвариантами (3)?

Автором доказываются две теоремы:

Теорема 1. Необходимым условием существования помимо поверхностей (1) дальнейших пар поверхностей с инвариантами (3), не получающихся из пары (1) ни путем сдвига, ни путем преобразования симметрии, является существование на каждой из поверхностей (1) сети сопряженных линий, которой бы при соответствии между этими двумя поверхностями отвечала сеть сопряженных линий второй поверхности.

Теорема 2. Пусть ${}^1P$ и ${}^2P$ — поверхности, определенные соотношениями (1), и такие, что на них существуют сопряженные кривые $u^1 = u^2 = \text{konst.}$, $u^1 = v = \text{konst.}$, отвечающие друг другу при соответствии, при котором точке ${}^2M(u, v) \in {}^1P$ отвечает точка ${}^1M(u, v) \in {}^2P$.

Далее, мы предполагаем, что в случае линейчатых поверхностей ${}^1P$ и ${}^2P$ их прямые не соответствуют друг другу.

Пусть, наконец, ${}^k\Gamma^a_{bc} = {}^k\left\{ {a \atop bc} \right\}$, $(a, b, c, k = 1,2)$ означают символы Христоффеля для поверхности ${}^kP$.

Необходимые и достаточные условия существования дальнейшей нетривиальной пары поверхностей ${}^1P$, ${}^2P$, т. е. такой, которая не получается из первой путем сдвига или преобразования центральной симметрии, и имеющей те же инварианты (3), как и ${}^1P$, ${}^2P$, имеют вид

1)

$$ {}^1\Gamma^1_{12} = {}^2\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{12}, \quad {}^1\Gamma^2_{12} = {}^2\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{12} \tag{19a, b}$$

2) или

$$\left(2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12}\right)\left(2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12} - \frac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}\right) \neq 0 \tag{20}$$

или

$$2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} = \frac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12} = \frac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}, \tag{21}$$

3)

$$2\Gamma^1_{12}\,\frac{\dfrac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}}{2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12}}{2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}}\right), \tag{22a}$$

$$2\Gamma^2_{12}\,\frac{\left(2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}\right)}{\left(2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}\right)^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12}}{2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \dfrac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}}\right). \tag{22b}$$

Если поверхности ${}^1P$ и ${}^2P$ линейчатые и если прямые обеих поверхностей отвечают друг другу при указанном соответствии, то необходимым и достаточным условием существования дальнейших пар поверхностей ${}^1P$ и ${}^2P$ с теми же инвариантами, как ${}^1P$ и ${}^2P$, является подобие рядов точек на соответствующих друг другу прямых.