Anton Dekrét

K teórii T-páru komplexov priamok v P_3

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 3, 192--201

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126531

K TEÓRII T-PÁRU KOMPLEXOV PRIAMOK V P_3

ANTON DEKRÉT, Žilina

Je známe, že Kleinovým obrazom T-páru komplexov priamok v P_3 je pár trojrozmerných subvariet Kleinovej nadkvadriky Q_4, ktorých lineárne trojrozmerné dotykové priestory v odpovedajúcich si bodoch L, L' sa pretínajú v rovine, ktorá bodmi L, L' neprechádza. Preto skúmanie T-páru komplexov priamok v P_3 je rovnocenné so skúmaním páru trojrozmerných subvariet nadkvadriky Q_4 typu $(+++---)$ v Kleinovom priestore Q, ktorý vznikne z P_5, keď miesto grupy projektívnych transformácií v P_5 sa uvažuje podgrupa G, voči prvkom ktorej je nakdvadrika Q_4 invariantná.

Nech H_i, kde $i = 1, 2, \ldots, 6$, sú vrcholy repéra v projektívnom priestore P_5, ktorého infinitezimálne zobrazenia sú dané vzťahmi

$$\mathrm{d}H_i = \omega_i^k \mathrm{H}_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6) \tag{1}$$

pričom ω_i^k sú Pfaffove formy splňujúce rovnice štruktúry grupy projektívnych transformácií v projektívnom priestore P_5

$$\mathrm{D}\omega_i^k = \omega_i^s \wedge \omega_s^k, \tag{2}$$

kde $s = 1, 2, \ldots, 6$ a D je symbol vonkajšieho diferencovania.

Definícia 1. *Nech $\tilde{K}, \tilde{K}'$ sú dve trojrozmerné diferencovateľné variety v P_5. Budeme hovoriť, že variety $\tilde{K}$, $\tilde{K}'$ tvoria T-pár, ak je medzi nimi dané diferencovateľné jednojednoznačné zobrazenie, pri ktorom trojrozmerné dotykové priestory v odpovedajúcich si bodoch L, L' variet $\tilde{K}, \tilde{K}'$ sa pretínajú v rovine β, ktorá bodmi L, L' neprechádza.*

Zobrazenie popísané v predošlej definícii budeme volať T-zobrazením.

Kanonizujme repér umiestnením vrcholu H_1 do bodu L, vrcholu H_5 do L' a vrcholov H_2, H_3, H_4 do roviny β. Tým

$$\mathrm{d}H_1 = \omega_1^1 H_1 + \omega_1^2 H_2 + \omega_1^3 H_3 + \omega_1^4 H_4,$$
$$\mathrm{d}H_5 = \omega_5^5 H_5 + \omega_5^2 H_2 + \omega_5^3 H_3 + \omega_5^4 H_4,$$

t. j. formy $(\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4)$ a tiež formy $(\omega_5^2, \omega_5^3, \omega_5^4)$ sú nezávislé a hlavné a platí

$$
(3) \qquad \begin{aligned} \omega_1^5 &= \omega_1^6 = 0 . \\ \omega_5^1 &= \omega_5^6 = 0 . \end{aligned}
$$

Vonkajším diferencovaním vzťahov (3) dostaneme

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
\omega_1^2 \wedge \omega_2^5 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^5 + \omega_1^4 \wedge \omega_4^5 &= 0 , \\
\omega_1^2 \wedge \omega_2^6 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^6 + \omega_1^4 \wedge \omega_4^6 &= 0 , \\
\omega_5^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_5^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_5^4 \wedge \omega_4^1 &= 0 , \\
\omega_5^2 \wedge \omega_2^6 + \omega_5^3 \wedge \omega_3^6 + \omega_5^4 \wedge \omega_4^6 &= 0 .
\end{aligned}
$$

Použitím Cartanovej lemy zo vzťahov (4) dostaneme

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
\omega_2^5 &= a\omega_1^2 + b\omega_1^3 + c\omega_1^4 , \\
\omega_3^5 &= b\omega_1^2 + d\omega_1^3 + e\omega_1^4 , \\
\omega_4^5 &= c\omega_1^2 + e\omega_1^3 + f\omega_1^4 ,
\end{aligned}
$$

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
\omega_2^6 &= A\omega_1^2 + B\omega_1^3 + C\omega_1^4 , \\
\omega_3^6 &= B\omega_1^2 + D\omega_1^3 + E\omega_1^4 , \\
\omega_4^6 &= C\omega_1^2 + E\omega_1^3 + F\omega_1^4 .
\end{aligned}
$$

Z 3. vzťahu (4) tiež plynie, že formy ω_2^1, ω_3^1, ω_4^1 sú hlavné.

Voľme formy ω_1^2, ω_1^3, ω_1^4 za bázové formy. Potom pre všetky hlavné formy ω_i^k platí

$$
(7) \qquad \omega_i^k = a_i^k \omega_1^2 + b_i^k \omega_1^3 + c_i^k \omega_1^4 .
$$

Dosadením vzťahov (6) a (7) do posledných dvoch vzťahov (4) dostaneme

$$
(8) \qquad \begin{aligned}
a_5^2 b_2^1 - b_5^2 a_2^1 + a_5^3 b_3^1 - b_5^3 a_3^1 + a_5^4 b_4^1 - b_5^4 a_4^1 &= 0 , \\
a_5^2 c_2^1 - c_5^2 a_2^1 + a_5^3 c_3^1 - c_5^3 a_3^1 + a_5^4 c_4^1 - c_5^4 a_4^1 &= 0 , \\
b_5^2 c_2^1 - c_5^2 b_2^1 + b_5^3 c_3^1 - c_5^3 b_3^1 + t_5^4 c_4^1 - c_5^4 b_4^1 &= 0 ,
\end{aligned}
$$

ako aj

$$
(9) \qquad \begin{aligned}
a_5^2 B - b_5^2 A + a_5^3 D - b_5^3 B + a_5^4 E - b_5^4 C &= 0 , \\
a_5^2 C - c_5^2 A + a_5^3 E - c_5^3 B + a_5^4 F - c_5^4 C &= 0 , \\
b_5^2 C - c_5^2 B + b_5^3 E + c_5^3 D + b_5^4 F - c_5^4 E &= 0 .
\end{aligned}
$$

Zo vzťahov (7) vypíšme

$$
(10) \qquad \begin{aligned}
\omega_5^2 &= a_5^2 \omega_1^2 + b_5^2 \omega_1^3 + c_5^2 \omega_1^4 , \\
\omega_5^3 &= a_5^3 \omega_1^2 + b_5^3 \omega_1^3 + c_5^3 \omega_1^4 , \\
\omega_5^4 &= a_5^4 \omega_1^2 + b_5^4 \omega_1^3 + c_5^4 \omega_1^4 .
\end{aligned}
$$

T-zobrazením je určená regulárna kolineácia $\tilde{C}$ medzi dotykovými smermi variet $\tilde{K}$, $\tilde{K}'$ v odpovedajúcich si bodoch H_1, H_5. Ak označíme $\tilde{C}(\omega_1^2 : \omega_1^3 : \omega_1^4) = \omega_5^2 : \omega_5^3 : \omega_5^4$, tak kolineácia $\tilde{C}$ je určená rovnicami (10). Kolineácia $\tilde{C}$ indukuje autokolineáciu C priesečíkov odpovedajúcich si dotykových smerov s rovinou β. Označme $C(h_2H_2 + h_3H_3 + h_4H_4) = h'_2H_2 + h'_3H_3 + h'_4H_4$. Potom je autokolineácia C určená rovnicami

$$
\begin{aligned}
h'_2 &= a_5^2h_2 + b_5^2h_3 + c_5^2h_4, \\
h'_3 &= a_5^3h_2 + b_5^3h_3 + c_5^3h_4, \\
h'_4 &= a_5^4h_2 + b_5^4h_3 + c_5^4h_4.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Označme písmenom C' autokolineáciu priamok v rovine β indukovanú autokolineáciou C.

Samodružné body autokolineácie C sú dané systémom

$$
\begin{aligned}
h_2(a_5^2 + \lambda) + b_5^2h_3 \qquad\qquad + c_5^2h_4 \qquad &= 0, \\
h_2a_5^3 \qquad + h_3(b_5^3 + \lambda) + h_4c_5^3 \qquad &= 0, \\
h_2a_5^4 \qquad + h_3b_5^4 \qquad\qquad + h_4(c_5^4 + \lambda) &= 0,
\end{aligned}
$$

ktorý má riešenie práve vtedy, keď

$$
\begin{vmatrix}
a_5^2 + \lambda, & b_5^2, & c_5^2 \\
a_5^3, & b_5^3 + \lambda, & c_5^3 \\
a_5^4, & b_5^4, & c_5^4 + \lambda
\end{vmatrix} = 0.
\tag{12}
$$

Vonkajším diferencovaním vzťahov (10) dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\omega_1^2 \wedge \{a_5^2(\omega_1^1 - \omega_5^5) + a_5^3\omega_3^2 + a_5^4\omega_4^2 + da_5^2 - b_5^2\omega_2^3 - c_5^2\omega_2^4\} + \\
&+ \omega_1^3 \wedge \{b_5^3\omega_3^2 + b_5^4\omega_4^2 + b_5^2(\omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_2^2 - \omega_5^5) + db_5^2 - a_5^2\omega_3^2 - c_5^2\omega_3^4\} + \\
&+ \omega_1^4 \wedge \{c_5^3\omega_3^2 + c_5^4\omega_4^2 + c_5^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_4^4 - \omega_5^5) + dc_5^2 - b_5^2\omega_4^3 - a_5^2\omega_4^2\} = 0, \\[1ex]
&\omega_1^2 \wedge \{a_5^2\omega_2^3 + a_5^4\omega_4^3 + a_5^3(\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_5^5) + da_5^3 - b_5^3\omega_2^3 - c_5^3\omega_2^4\} + \\
&+ \omega_1^3 \wedge \{b_5^2\omega_2^3 + b_5^4\omega_4^3 + b_5^3(\omega_1^1 - \omega_5^5) + db_5^3 - a_5^3\omega_3^2 - c_5^3\omega_3^4\} + \\
&+ \omega_1^4 \wedge \{c_5^2\omega_2^3 + c_5^3(\omega_1^1 + \omega_3^3 - \omega_4^4 - \omega_5^5) + dc_5^3 + c_5^4\omega_4^3 - a_5^3\omega_4^2 - b_5^3\omega_4^3\} = 0, \\[1ex]
&\omega_1^2 \wedge \{a_5^2\omega_2^4 + a_5^3\omega_3^4 + a_5^4(\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_5^5) + da_5^4 - b_5^4\omega_2^3 - c_5^4\omega_2^4\} + \\
&+ \omega_1^3 \wedge \{b_5^2\omega_2^4 + b_5^3\omega_3^4 + b_5^4(\omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4 - \omega_5^5) + db_5^4 - b_5^4\omega_3^2 - c_5\omega_3^4\} + \\
&+ \omega_1^4 \wedge \{c_5^2\omega_2^4 + c_5^3\omega_3^4 + c_5^4(\omega_1^1 - \omega_5^5) + dc_5^4 - a_5^4\omega_4^2 - b_5^4\omega_4^3\} = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Definícia 2. *Nech je daná trojparametrická sústava $\mathcal{S}$ lineárnych podpriestorov $P_k \subset P_5$. Nech v každom $P_k \in \mathcal{S}$ je určený bod M. Budeme hovoriť, že M je ${}^rF$-ohnisko sústavy $\mathcal{S}$ ležiace v P_k, ak priestorom P_k prechádza r-parametrická podsústava sústavy $\mathcal{S}$, ktorej každá jednoparametrická podsústava Σ obsahujúca P_k má vlastnosť: Body M určené podsústavou Σ určia buď krivku, ktorá má s priestorom P_k styk* 1. *rádu alebo splývajú s pevným bodom.*

Odpovedajúcimi si bodmi H_1, H_5 T-páru $\tilde{K} \leftrightarrow \tilde{K}'$ je určené v P_5 trojparametrické množstvo priamok $\{H_1, H_5\}$, ktoré vytvárajú štvorrozmernú priamkovú varietu $\mathcal{V}_4$. Určme ohniská variety $\mathcal{V}_4$, ležiace na priamke $\{H_1, H_5\}$.

Nech $X = h_1H_1 + h_5H_5$ je ľubovoľný bod priamky $\{H_1, H_5\}$. Podľa definície 2 bod X je ohniskom variety $\mathscr{V}_4$ práve vtedy, keď existuje smer $\omega_1^2 : \omega_1^3 : \omega_1^4$, pre ktorý $\mathrm{d}X \in \{H_1, H_5\}$. Ľahko zistíme:

$$\mathrm{d}X = H_2[h_1\omega_1^2 + h_5\omega_5^2] + H_3[h_1\omega_1^3 + h_5\omega_5^3] + H_4[h_1\omega_1^4 + h_5\omega_5^4] + \\ + 0 \bmod \{H_1, H_5\}.$$

Preto $\mathrm{d}X \in \{H_1, H_5\}$ vtedy a len vtedy, keď platí

$$\begin{aligned} h_1\omega_1^2 + h_5\omega_5^2 &= 0, \\ h_1\omega_1^3 + h_5\omega_5^3 &= 0, \\ h_1\omega_1^4 + h_5\omega_5^4 &= 0. \end{aligned}$$

Tento systém môžeme použitím vzťahov (10) upraviť na tvar

$$\begin{aligned} &\omega_1^2(h_1 + h_5a_5^2) + \omega_1^3h_5b_5^2 + \omega_1^4h_5c_5^2 = 0, \\ (14)\qquad &\omega_1^2h_5a_5^3 + \omega_1^3(h_1 + b_5^3h_5) + \omega_1^4c_5^3h_5 = 0, \\ &\omega_1^2a_5^4h_5 + \omega_1^3b_5^4h_5 + \omega_1^4(h_1 + h_5c_5^4) = 0. \end{aligned}$$

Systémom (14) je určený smer a tým aj rozvinuteľné priamkové plochy variety $\mathscr{V}_4$ prechádzajúce priamkou $\{H_1, H_5\}$ práve vtedy, keď platí

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} h_1 + h_5a_5^2 & h_5b_5^2 & h_5c_5^2 \\ h_5a_5^3 & h_1 + h_5b_5^3 & h_5c_5^3 \\ h_5a_5^4 & h_5b_5^4 & h_1 + h_5c_5^4 \end{vmatrix} = 0.$$

To je rovnica 3. stupňa určujúca už ohniská variety $\mathscr{V}_4$ ležiace na priamke $\{H_1, H_5\}$. Tým sme dokázali vetu.

Veta 1. *Varieta $\mathscr{V}_4$ má na každej svojej priamke najviac 3 ohniská — body vratu troch rozvinuteľných priamkových plôch variety $\mathscr{V}_4$ prechádzajúcich priamkou $\{H_1, H_5\}$.*

Rovnice (12) a (15) sú totožné ($+\lambda = h_1/h_5$).

Koreňom λ rovnice (12) je teda určené práve jedno ohnisko M variety $\mathscr{V}_4$ na priamke $\{H_1, H_5\}$, množina $\mathscr{M}$ samodružných bodov kolneácie C a množina $\mathscr{M}'$ samodružných priamok kolineácie C'. Budeme používať označenie $\mathscr{M} = \varkappa(M)$, $\mathscr{M}' = \varkappa'(M)$.

Nech λ je jednoduchý koreň rovnice (12). Kanonizujme repér umiestnením vrcholu H_2 do samodružného bodu kolineácie C a vrcholov H_3, H_4 na samodružnú priamku kolineácie C' určených koreňom λ. Vtedy $\lambda = a_5^2$, $a_5^3 = a_5^4 = b_5^2 = c_5^2 = 0$. Koreňom λ je určené ohnisko $M = -a_5^2H_1 + H_5$. Potom

$$\mathrm{d}M = \omega_5^5M + [-\mathrm{d}a_5^2 - a_5^2(\omega_1^1 - \omega_5^5)]H_1 + \omega_1^3[H_3(b_5^3 - a_5^2) + b_5^4H_4] + \\ + \omega_1^4[c_5^3H_3 + H_4(c_5^4 - a_5^2)].$$

Z toho už vyplýva správnosť nasledujúcej vety.

Veta 2. *Nech M je ohnisko variety $\mathscr{V}_4$ určené jednoduchým koreňom λ rovnice* (12). *Potom M je ${}^1F$-ohniskom a pohybuje sa po variete, ktorá má v bode M styk* 1. *rádu s lineárnym podpriestorom $\{H_1, H_5, \varkappa'(M)\}$.*

Definícia 3. *Páry kriviek variet $\tilde{K}$, $\tilde{K}'$, ktoré si sebe odpovedajú v T-zobrazení a ktorých dotyčnice v odpovedajúcich si bodoch sa pretínajú v samodružných bodoch kolineácie C, budeme volať T-pármi kriviek. Nech G je množina kriviek variety $\tilde{K}$, ktorých dotyčnice pretínajú určitú samodružnú priamku kolineácie C'. Nech G' je obraz množiny G v T-zobrazení. Dvojicu (G, G') budeme stručne volať T-párom kongruencií daného T-páru variet $\tilde{K} \leftrightarrow \tilde{K}'$.*

Poznámka. Každou rozvinuteľnou priamkovou plochou variety $\mathscr{V}_4$ je určený T-pár kriviek.

Triedenie T-párov variet $\tilde{K} \leftrightarrow \tilde{K}'$ môžeme previesť podľa typov autokolineácie C.

1. Nech autokolineácia C má práve 3 samodružné body. Potom podľa vety 2 na priamke $\{H_1, H_5\}$ ležia práve tri ohniská variety $\mathscr{V}_4$, t. j. priamkou $\{H_1, H_5\}$ prechádzajú práve tri rozvinuteľné priamkové plochy variety $\mathscr{V}_4$. Odpovedajúcimi si bodmi H_1, H_5 variet $\tilde{K}, \tilde{K}'$ prechádzajú práve tri T-páry kriviek a tri T-páry kongruencií.

2. Nech rovnica (12) má jeden jednoduchý a jeden dvojnásobný reálny koreň, pre ktorý má systém (14) hodnosť dve. Vtedy kolineácia C má práve dva samodružné body. Kanonizujme repér umiestnením vrcholu H_3 do samodružného bodu, ktorý odpovedá dvojnásobnému koreňu, H_2 do samodružného bodu, ktorý odpovedá jednoduchému koreňu a vrchol H_4 na samodružnú priamku kolineácie C', ktorá odpovedá jednoduchému koreňu. Vtedy $b_5^2 = c_5^2 = a_5^3 = a_5^4 = b_5^4 = 0$, $b_5^3 = c_5^4 = \lambda_{2,3}$, $\lambda_1 = a_5^2$. Dvojnásobným koreňom je určené ohnisko $M = b_5^3 H_1 - H_5$. Potom

$$\mathrm{d}M = \omega_5^5 M + [\mathrm{d}b_5^3 + b_5^3(\omega_1^1 - \omega_5^5)]H_1 + \omega_1^2(b_5^3 - a_5^2)H_2 - \omega_1^4 c_5^3 H_3.$$

Z tohto a z vety 2 už vyplýva správnosť nasledujúcej vety.

Veta 3. *Nech kolineácia C má práve dva samodružné body, z ktorých jeden odpovedá dvojnásobnému koreňu rovnice* (12). *Potom varieta $\mathscr{V}_4$ má na priamke $\{H_1, H_5\}$ práve dve ${}^1F$-ohniská, ktoré sa pohybujú po varietách, ktoré majú styk prvého rádu s lineárnymi priestormi $\{H_1, H_5, \varkappa'(M)\}$, kde M je príslušné ohnisko.*

3. Nech kolineácia C je homológiou. Vtedy rovnica (12) má jeden jednoduchý a jeden dvojnásobný koreň, pre ktorý hodnosť systému (14) je 1. Kanonizujme repér umiestnením vrcholu H_2 do stredu homológie, vrcholov H_3, H_4 na os homologie. Vtedy $a_4^3 = a_5^4 = b_5^2 = b_5^4 = c_5^2 = c_5^3 = 0$, $b_5^3 = c_5^4 = \lambda_{2,3}$, $\lambda_1 = a_5^2$.

Rovnosti (13) majú teraz tvar:

$$\omega_1^2 \wedge [\mathrm{d}a_5^2 + a_5^2(\omega_1^1 - \omega_5^5)] + \omega_1^3 \wedge (b_5^3 - a_5^2)\omega_3^2 + \omega_1^4 \wedge \omega_4^2(c_5^4 - a_5^2) = 0,$$

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^3(a_5^2 - b_5^3) + \omega_1^3 \wedge [\mathrm{d}b_5^3 + b_5^3(\omega_1^1 - \omega_5^5)] = 0,$$
$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^4(a_5^2 - c_5^4) + \omega_1^4 \wedge [\mathrm{d}c_5^4 + c_5^4(\omega_1^1 - \omega_5^5)] = 0.$$

Z posledných dvoch rovností vyplýva $\mathrm{d}b_5^3 + b_5^3(\omega_1^1 - \omega_5^5) = k\omega_1^2$. Dvojnásobnému koreňu $\lambda_{3,2} = b_5^3$ odpovedá ohnisko $M = b_5^3 H_1 - H_5$. Potom $\mathrm{d}M = \omega_5^5 M + \omega_1^2[H_2(b_5^3 - a_5^2) + kH_1]$. Z toho už vyplýva správnosť nasledujúcej vety.

Veta 4. *Ak kolineácia C je homológiou, tak varieta $\mathscr{V}_4$ má na priamke $\{H_1, H_5\}$ jedno ${}^1F$-a jedno ${}^2F$-ohnisko, pritom ${}^2F$-ohnisko sa pohybuje po krivke, ktorej dotyčnica pretína priamku $\{H_1, H_2\}$, kde H_2 je stred homológie.*

Poznámka. Nech M_2 je ${}^2F$-ohnisko určené dvojnásobným koreňom rovnice (12) v prípade, keď C je homologia. Potom $\varkappa(M)$ je os homológie. T-pár kongruencií určený osou homológie je v repéri popísanom pred vetou 4 daný rovnicou $\omega_1^2 = 0$. Výpočtom ľahko zistíme $\mathrm{D}\omega_1^2 = 0 \bmod \omega_1^2$. Preto množiny G, G' (viď definíciu 3) určené osou homologie sú subvarietami variet $\tilde{K}, \tilde{K}'$.

4. Nech rovnica (12) má trojnásobný reálny koreň λ, pre ktorý systém (14) má hodnosť 2. Repér môžeme kanonizovať tak, že matica autokolineácie C bude mať „Jordanov tvar“

$$\begin{pmatrix} a_5^2 & b_5^2 & 0 \\ 0 & a_5^2 & c_5^3 \\ 0 & 0 & a_5^2 \end{pmatrix}.$$

H_2 je teda samodružný bod autokolineácie C a priamka $\{H_2, H_3\}$ je samodružnou priamkou autokolineácie C'. $M = a_5^2 H_1 - H_5$ je jediné ohnisko variety $\mathscr{V}_4$ na priamke $\{H_1, H_5\}$.

$$\mathrm{d}M = \omega_5^5 M + [\mathrm{d}a_5^2 + a_5^2(\omega_1^1 - \omega_5^5)]H_1 - \omega_1^3 b_5^2 H_2 - \omega_1^4 c_5^3 H_3.$$

Z toho už vyplýva správnosť nasledujúcej vety.

Veta 5. *Nech autokolineácia C má práve jeden samodružný bod. Potom varieta $\mathscr{V}_4$ má na priamke $\{H_1, H_5\}$ práve jedno ${}^1F$-ohnisko M, ktoré sa pohybuje po variete, ktorá má v bode M styk 1. rádu s lineárnym priestorom $\{H_1\, H_5, \varkappa(M)\}$.*

5. Nech autokolineácia C je eláciou. Rovnica (12) má trojnásobný koreň, pre ktorý má systém (14) hodnosť 1. Repér môžeme kanonizovať tak, že matica kolineácie C má tvar:

$$\begin{pmatrix} a_5^2 & b_5^2 & 0 \\ 0 & a_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_5^2 \end{pmatrix}.$$

Vtedy H_2 je stred elácie a priamka $\{H_2, H_4\}$ je osou elácie. Rovnosti (13) majú teraz tvar

$$\omega_1^2 \wedge [\mathrm{d}a_5^2 + a_5^2(\omega_1^1 - \omega_5^5) - b_5^2\omega_2^3] + \omega_1^3 \wedge [b_5^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_5^5) + \mathrm{d}b_5^2] +$$
$$+ \omega_1^4 \wedge -b_5^2\omega_4^3 = 0,$$
$$\omega_1^3 \wedge b_5^2\omega_2^3 + b_5^3(\omega_1^1 - \omega_5^5) + \mathrm{d}b_5^3] = 0,$$
$$\omega_1^3 \wedge b_5^2\omega_2^4 + \omega_1^4 \wedge [\mathrm{d}a_5^2 + a_5^2(\omega_1^1 - \omega_5^5)] = 0.$$

Koreňom $\lambda = a_5^2$ je určené jediné ohnisko variety $\mathscr{V}_4$ na priamke

$$\{H_1, H_5\} : M = a_5^2 H_1 - H_5.$$

Ľahko zistíme

$$\mathrm{d}M = \omega_5^5 M + H_1[\mathrm{d}a_5^2 + a_5^2(\omega_1^1 - \omega_5^5)] - \omega_1^3 b_5^2 H_2.$$

Z toho už vyplýva správnosť nasledujúcej vety.

Veta 6. *Ak autokolineácia C je eláciou, tak varieta $\mathscr{V}_4$ má práve jedno a to ${}^2F$-ohnisko M, ktoré sa pohybuje po variete najviac dvojrozmernej, ktorá má v bode M styk* 1. *rádu s lineárnym priestorom $\{H_1, H_5, H_2\}$, kde H_2 je stred elácie.*

6. Nech autokolineácia C je identitou. Vtedy $a_5^2 = b_5^3 = c_5^4$, $b_5^2 = c_5^2 = a_5^3 = c_5^3 = a_5^4 = b_5^4 = 0$. Rovnosti (13) majú teraz tvar

$$\omega_1^2 \wedge \Omega = \omega_1^3 \wedge \Omega = \omega_1^4 \wedge \Omega = 0, \quad \text{kde} \quad \Omega = \mathrm{d}a_5^2 + a_5^2(\omega_1^1 - \omega_5^5).$$

To je možné vtedy a len vtedy, keď $\Omega = 0$. Charakteristická rovnica (12) má práve jeden trojnásobný koreň $\lambda = a_5^2$, ktorým je určené práve jedno ohnisko $M = a_5^2 H_1 - H_5$. Ľahko zistíme, že platí $\mathrm{d}M = \omega_5^5 M$. Z toho plynie správnosť vety.

Veta 7. *Nech autokolineácia C je identitou. Potom varieta $\mathscr{V}_4$ je kužeľom s vrcholom M. T-zobrazenie je teda stredovým priemetom variety $\tilde{K}$ na varietu $\tilde{K}'$.*

Ďalšie úvahy budeme prevádzať v Kleinovom priestore Q. Určme doplňujúce rovnice štruktúry. Uvažujme Kleinovu nadkvadriku Q_4 v tvare

$$2h_1h_5 + (h_3)^2 - (h_2)^2 - (h_4)^2 + (h_6)^2 = 0.$$

Potom hľadané doplňujúce rovnice štruktúry majú tvar (viď [1], (14))

$$(16) \quad \begin{aligned} &\omega_1^5 = \omega_5^1 = \omega_4^4 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_6^6 = 0, \\ &\omega_2^5 - \omega_1^2 = \omega_2^1 - \omega_5^2 = \omega_1^3 + \omega_3^5 = \omega_3^1 + \omega_5^3 = \omega_4^5 - \omega_1^4 = 0, \\ &\omega_4^1 - \omega_5^4 = \omega_1^1 + \omega_5^5 = \omega_1^6 + \omega_6^5 = \omega_6^1 + \omega_5^6 = \omega_2^3 - \omega_3^2 = 0, \\ &\omega_2^4 + \omega_4^2 = \omega_2^6 - \omega_6^2 = \omega_4^3 - \omega_3^4 = \omega_3^6 + \omega_6^3 = \omega_4^6 - \omega_6^4 = 0. \end{aligned}$$

Variety $\tilde{K}, \tilde{K}'$ sú už teraz Kleinove obrazy komplexov, ktoré tvoria T-pár. Všetky doterajšie výsledky platia samozrejme aj pre T-pár komplexov. Pripomeňme si, že repér je kanonizovaný tak, že vrcholy H_1, H_5 sú odpovedajúce si body v T-zobrazení a vrcholy H_2, H_3, H_4 ležia v rovine β.

K priamke $\{H_1, H_5\}$ je vzhľadom na nadkvadriku Q_4 polárne združený priestor $\{H_2, H_3, H_4, H_6\} = \mathscr{L}$. Týmto priestorom je určený zväzok nadrovín, ktorých nadrovinové súradnice sú

$$-s|H_2H_3H_4H_6H_1| + |H_2H_3H_4H_6H_5| \equiv \gamma .$$

Definícia 4. *Nadrovinu γ zväzku budeme volať fokálnou, ak existuje smer $\omega_1^2 : \omega_1^3 : \omega_1^4$ tak, že nadrovina γ obsahuje diferenciálne okolie prvého rádu priestoru $\mathscr{L}$ v tomto smere.*

Určíme fokálne nadroviny, Označme symbolom δ diferencovanie v hľadanom fokálnom smere. Z definície 4 plynie:

$\gamma \,.\, \delta H_2 = \gamma \,.\, \delta H_3 = \gamma \,.\, \delta H_4 = \gamma \,.\, \delta H_6 = 0$. To je možné vtedy a len vtedy, keď platí

$$\begin{aligned} s\omega_2^5 + \omega_2^1 &= 0, \\ s\omega_3^5 + \omega_3^1 &= 0, \\ s\omega_4^5 + \omega_4^1 &= 0, \\ s\omega_6^5 + \omega_6^1 &= 0. \end{aligned}$$

Tento systém použitím (16) možno napísať v tvare

$$\begin{aligned} s\omega_1^2 + \omega_5^2 &= 0, \\ s\omega_1^3 + \omega_5^3 &= 0, \\ s\omega_1^4 + \omega_5^4 &= 0, \end{aligned}$$

ktorý použitím (10) môžeme napísať konečne v tvare

$$\begin{aligned} \omega_1^2(s + a_5^2) + \omega_1^3 b_5^2 + \omega_1^4 c_5^2 &= 0, \\ \omega_1^2 a_5^3 + \omega_1^3(s + b_5^3) + \omega_1^4 c_5^3 &= 0, \\ \omega_1^2 a_5^4 + \omega_1^3 b_5^4 + \omega_1^4(s + c_5^4) &= 0. \end{aligned}$$

To je ale systém (14), kde $s = h_1/h_5$. Preto existujú najviac tri fokálne nadroviny. Dokážeme nasledujúcu vetu.

Veta 8. *Fokálna nadrovina odpovedajúca koreňu s rovnice (15) pretína priamku $\{H_1, H_5\}$ v bode, ktorý s ohniskom variety $\mathscr{V}_4$ odpovedajúcom koreňu s harmonicky oddeľuje body H_1, H_5.*

Dôkaz. Nech $s = h_1/h_5$ je koreň rovnice (15). Potom $F = sH_1 + H_5$ je ohnisko variety $\mathscr{V}_4$ a $-s|H_2H_3H_4H_6H_1| + |H_2H_3H_4H_6H_5| \equiv \gamma$ je fokálna nadrovina. Určme priesečík roviny γ s priamkou $\{H_1, H_5\}$. $\gamma(tH_1 + H_5) = 0$. Preto $s + t = 0$. Hľadaným priesečíkom je bod $-sH_1 + H_5$. Tým je veta dokázaná.

Roviny β tvoria trojparametrickú sústavu rovín, ktorej ohniská ležiace v rovine β ležia na kubike (viď [1] vzťah (8'))

$$\begin{vmatrix} h_2 & -h_3 & h_4 \\ h_2a_5^2 - h_3a_4^3 + h_4a_5^3 & h_2b_5^2 - h_3b_5^3 + h_4b_5^4 & h_2c_5^2 - h_3c_5^3 + h_4c_5^4 \\ h_2m + h_3n + h_4r & h_2n + h_3p + h_4q & h_2r + h_3q + h_4v \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

V práci [1] vo vete 2 sa dokazuje, že ohniskami množstva rovín β sú priesečíky hlavných dotykových smerov (tzv. hlavné body) oboch komplexov s rovinou β. Dokážeme nasledujúcu vetu.

Veta 9. *Pól samodružnej priamky kolineácie C' vzhľadom na kužeľosečku, v ktorej pretína rovina β nadkvadriku Q_4 leží na kubike* (17), *t. j. je ohniskom sústavy rovín β.*

Dôkaz. Umiestnime vrcholy repéru H_3, H_4 na samodružnú priamku autokolineácie C'. Vtedy $b_5^2 = c_5^2 = 0$. Dosadením do (17) už ľahko ukážeme, že bod H_2, ktorý je pólom priamky $\{H_3, H_4\}$, leží na kubike.

Dôsledky. 1. *Keď autokolineácia C je eláciou, tak kubika* (17) *sa rozpadá na kužeľosečku a na priamku.*

2. *Keď autokolineácia C je homológiou, tak kubika* (17) *sa rozpadá na kužeľosečku prechádzajúcu stredom homológie a na os homológie.*

3. *Keď autokolineácia C je identitou, tak každý bod roviny β je ohniskom. V tomto prípade ohnisková krivka ohniska $M = h_2H_2 + h_3H_3 + h_4H_4$ je daná systémom* (viď [1] vzťah (7′))

$$h_2\omega_1^2 - h_3\omega_1^3 + h_4\omega_1^4 = 0,$$

$$\omega_1^2(mh_2 + nh_3 + rh_4) + \omega_1^3(nh_2 + ph_3 + qh_4) + \omega_1^4(rh_2 + qh_3 + vh_4) = 0.$$

Tento systém má hodnosť 1 *práve vtedy, keď*

$$\begin{aligned} nh_2 + nh_3 + rh_4 &= \lambda h_2, \\ nh_2 + ph_3 + qh_4 &= -\lambda h_3, \\ rh_2 + qh_3 + vh_4 &= \lambda h_4. \end{aligned}$$

To je už ale systém určujúci singulárne body zväzku kužeľosečiek C_1, C_2 (viď [1] strana 53), t. j. hlavné body komplexu $\tilde{K}$. V skúmanom prípade platí $C_2 \equiv C_4$ (viď [1] strana 53), t. j. hlavné body komplexov $\tilde{K}$, $\tilde{K}'$ splývajú. Tým je dokázané tvrdenie:

Tvrdenie. *V prípade, keď autokolineácia C je identitou, práve hlavné body komplexov $\tilde{K}$, $\tilde{K}'$ sú ${}^2F$-ohniská sústavy rovín β.*

LITERATÚRA

[1] Dekrét A., *Poznámka k T-páru komplexov priamok v P_3*, Mat. časop. *17* (1967), 48—54.

[2] Акивис М. А., *Пары Т-комплексов*, Матем. сб. *27* (*69*) (1950), 351—378.

[3] Кованцов Н. И., *Теория комплексов*, Киев 1963.

Došlo 7. 8. 1967.

Katedra matematiky
Vysokej školy dopravnej,
Žilina

К ТЕОРИИ T-ПАРЫ КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТАНСТВЕ P_3

Антон Декрет

Резьюме

Линейные трехмерные касательные пространства многообразий K, K', являющихся образами Клейна T-пары комплексов прямых в P_3, в соответсвующих себе точках L, L' пересекаются в плоскости β. Точечное соответствие между K, K' индуцирует в плоскости β автоколлинеацию C (C') точек (прямых). Прямые $\{L, L'\}$ образуют трехпараметрическую конгруенцию прямых в пространстве Клейна. В статьи ищутся отношения между фокусами этой конгруенции и неподвижными элементами автоколлинеаций C, C'. Плоскости β образуют трехпараметрическое множество плоскостей, фокусы которого, лежащие в плоскости β, лежат на кривой 3-его порядка. Фокусам этого множества являются полюсы, ответчающие неподвижным прямым автокоялинеации C' в полярном соответствии, порожденном коническим сечением, в котором пересекает плоскость β абсолют пространства Клейна.

VYPÍSANIE CENY SLOVENSKEJ AKADÉMIE VIED

Predsedníctvo Slovenskej akadémie vied na návrh Vedeckého kolégia matematiky SAV vypísalo Cenu Akadémie na prácu „Rozpracovanie programu vyučovania matematiky na strednej všeobecnovzdelávacej škole v modernom poňatí" vo výške do 35 000 Kčs s termínom ukončenia 31. decembra 1971. Ministerstvo školstva SSR pripravuje reorganizáciu školského systému, a to nielen po stránke vonkajšej organizácie, ale aj z hľadiska vnútornej náplne. Reforma sa má uskutočniť po roku 1970 a má prispieť k modernizácii vyučovania na našej strednej škole. Pokiaľ ide o matematiku, je na školách situácia veľmi nepriaznivá. Obsah výučby v matematike je na úrovni minulého storočia. Problém prestavby vyučovania matematiky je obťažný a je v popredí záujmu v celom svete. V niektorých štátoch (Francúzsko, USA, Belgicko, ZSSR, ale aj iných) venujú sa tejto otázke špičkoví matematici. V Československu je angažovanosť vedeckých pracovníkov v tomto smere nedostatočná a riešenie problematiky vyučovania matematiky sa ponecháva na kádre, ktoré študujú problematiku viac z hľadiska metodiky než z hľadiska vedeckého. Od práce v súťaži sa žiada podrobnejšie rozpracovanie učiva matematiky pre gymnázium v modernom poňatí ako v obsahu, tak aj v metóde a náčrt učiva pre školu I. cyklu, aby bolo vidieť celkovú koncepciu.

Vzhľadom na uvedené skutočnosti je spolupráca čo najširšieho okruhu matematikov na tejto úlohe veľmi vítaná. Ďalšie informácie si môžu záujemci vyžiadať na Vedeckom kolégiu matematiky SAV, Bratislava, Štefánikova ul. 41.

Vedecké kolégium matematiky SAV