Matematický časopis

Filoména Píšová

Centrálne premietanie v ortogonálnom priestore

Matematický časopis, Vol. 22 (1972), No. 3, 199--207

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126525`

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Matematický časopis 22 (1972), No. 3

CENTRÁLNE PREMIETANIE V ORTOGONÁLNOM PRIESTORE

FILOMÉNA PÍŠOVÁ, Bratislava

1. V tejto práci nadväzujem na prácu [1]. Trojrozmerný afinný priestor nad komutatívnym telesom $\mathbf{T}$ (char. $\mathbf{T} \neq 2$) rozširujem obvyklým spôsobom na projektívny priestor a v tomto priestore definujem stredové premietanie. Do vektorového priestoru adjungovaného afinnému priestoru zavediem metriku a predpokladám, že tento metrický vektorový priestor je regulárny (t. j. s nulovým radikálom). Pre premietanie v tomto priestore riešim úlohy polohy a za predpokladu, že teleso $\mathbf{T}$ je kvadraticky uzavreté, riešim i úlohy podobné úlohám: hľadanie dĺžky úsečky a otáčanie roviny v reálnom euklidovskom priestore. V celej práci predpokladám ako známe pojmy a vety z [2]; pojem afinného a projektívneho priestoru a iné pojmy používam však podľa [3].

2. Nech $\mathscr{A}$ je afinný trojrozmerný priestor nad komutatívnym telesom $\mathbf{T}$ (char. $\mathbf{T} \neq 2$) (prvkami priestoru $\mathscr{A}$ sú body, pričom sú definované isté jeho podmnožiny ako priamky a roviny). Ak zvolíme v priestore $\mathscr{A}$ ľubovoľný bod 0, potom pre každý bod $A \in \mathscr{A}$ existuje práve jedna translácia $\mathbf{A}$, ktorá zobrazuje bod 0 do bodu A. Translácie priestoru $\mathscr{A}$ tvoria (vzhľadom na sčítanie definované ako skladanie zobrazení a vzhľadom na násobenie prvkami telesa $\mathbf{T}$ ako endomorfizmy zachovávajúce rovnobežnosť a bod O) trojrozmerný vektorový priestor V nad telesom $\mathbf{T}$; priestor V budeme nazývať adjungovaným k priestoru $\mathscr{A}$. Pre bijekciu medzi $\mathscr{A}$ a V, v ktorej každý bod $A \in \mathscr{A}$ zobrazíme do vektora $\mathbf{A} \in V$, použijeme tiež symbol ι. Rovnobežnosť priamok v $\mathscr{A}$ je relácia ekvivalencie a každú triedu tejto relácie nazveme nevlastným bodom priestoru $\mathscr{A}$ a aj každej z priamok tej triedy. Nech $\tilde{\mathscr{A}}$ je zjednotenie množiny všetkých bodov priestoru $\mathscr{A}$ a všetkých jeho nevlastných bodov; pod priamkou $\tilde{a}$ priestoru $\tilde{\mathscr{A}}$ budeme rozumieť zjednotenie množiny všetkých bodov priamky a priestoru $\mathscr{A}$ a nevlastného bodu, do ktorého patrí priamka a; pod rovinou $\tilde{\alpha}$ priestoru $\tilde{\mathscr{A}}$ budeme rozumieť zjednotenie množiny všetkých bodov roviny α priestoru $\mathscr{A}$ a množiny všetkých nevlastných bodov priamok roviny α. Množinu všetkých nevlastných bodov roviny $\alpha \in \mathscr{A}$ budeme nazývať nevlastnou priamkou roviny α. Množinu všetkých nevlastných bodov priestoru $\mathscr{A}$ budeme nazývať nevlastnou rovinou priestoru $\mathscr{A}$. Priestor $\tilde{\mathscr{A}}$ je zjednotením vlastných a nevlastných bodov priestoru $\mathscr{A}$. Kvôli zjednodušeniu vyjadrovania budeme niekedy nevlastným bodom (priamkam) pria-

mok (rovín) priestoru $\mathscr{A}$ hovoriť aj nevlastné body (priamky) priamok (rovín) priestoru $\mathscr{A}$. Body z $\tilde{\mathscr{A}}$, ktoré nie sú nevlastné, budeme nazývať vlastnými bodmi priestoru $\tilde{\mathscr{A}}$ a podobne priamky (roviny) priestoru $\tilde{\mathscr{A}}$, ktoré obsahujú aspoň jeden vlastný bod, budeme nazývať vlastnými priamkami (rovinami) priestoru $\tilde{\mathscr{A}}$.

Dohovor. Práve tie priamky a roviny priestoru $\tilde{\mathscr{A}}$, ktoré vznikli z priamok a rovín priestoru $\mathscr{A}$ doplnením nevlastnými bodmi, budeme označovať tým istým písmenom, ale s vlnovkou. Bod priestoru $\mathscr{A}$ a k nemu príslušnú transláciu (vektor) priestoru V budeme označovať tým istým písmenom, ale tučným. Útvar, ktorý vznikne spojením niekoľkých útvarov, budeme označovať tak, že vypíšeme vedľa seba symboly spájaných útvarov. Pod symbolom $\widetilde{AB}$ budeme rozumieť tú priamku z $\tilde{\mathscr{A}}$, ktorá prechádza bodmi A a B. Prienik dvoch útvarov zapíšeme obvyklým znakom $\cap$ pre prienik množín. Dve priamky $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{\mathscr{A}}$ nazveme rovnobežnými, ak $a = b$, alebo ak majú spoločný nevlastný bod. Dve roviny $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \subset \tilde{\mathscr{A}}$ nazveme rovnobežnými, ak alebo $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$, alebo majú spoločnú nevlastnú priamku. Priamku $\tilde{a} \subset \tilde{\mathscr{A}}$ nazveme rovnobežnou s rovinou $\tilde{\alpha} \subset \tilde{\mathscr{A}}$, ak alebo $\tilde{a} \subset \tilde{\alpha}$, alebo majú spoločný nevlastný bod.

V priestore V zavedieme skalárny súčin, pomocou neho ortogonálnu geometriu (pozri [2], str. 154) a budeme predpokladať, že radikál tohto metrického vektorového priestoru (ktorý budeme tiež označovať rad V) je nulový vektor, teda, že priestor V je regulárny.

Ak o je ortogonálna transformácia priestoru V, potom pod izometriou $\varphi: \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ budeme rozumieť každé zobrazenie $\iota \circ o \circ \iota^{-1} \circ \tau$, kde τ je translácia v $\mathscr{A}$.

Dve dvojice bodov (A, B), (C, D) priestoru $(\mathscr{A})$ budeme považovať za kongruentné $[(AB) \sim (CD)]$, ak $(\mathbf{B} - \mathbf{A})^2 = (\mathbf{D} - \mathbf{C})^2$. Ide o reláciu ekvivalencie na $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$. Dve dvojice neizotropických vektorov $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ priestoru V budeme považovať za kongruentné, ak $\dfrac{(\mathbf{AB})^2}{\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2} = \dfrac{(\mathbf{CD})^2}{\mathbf{C}^2\mathbf{D}^2}$. Ide o reláciu ekvivalencie na kartézskom štvorci množiny všetkých neizotropických vektorov z V a platí $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \sim (k\mathbf{A}, l\mathbf{B})$, kde k, l sú ľubovoľné nenulové prvky z $\mathbf{T}$.

Definícia 1. *Nech $\tilde{\pi}$ je vlastná rovina priestoru $\tilde{\mathscr{A}}$ a nech $S \in \tilde{\mathscr{A}} \setminus \tilde{\pi}$; pod stredovým premietaním z bodu S na rovinu $\tilde{\pi}$ budeme rozumieť zobrazenie bodov množiny $\tilde{\mathscr{A}} \setminus S$ na rovinu $\tilde{\pi}$, pričom každý bod $A \in \tilde{\mathscr{A}} \setminus S$ sa zobrazí do bodu $\tilde{\pi} \cap \widetilde{AB}$; priamke $\widetilde{AB}$ hovoríme premietacia priamka bodu A. V ďalšom sa obmedzíme na prípad, keď S je vlastný bod. Pod priemetom množiny $\mathscr{M}$ bodov budeme rozumieť množinu priemetov všetkých bodov množiny $\mathscr{M}$.*

Definícia 2. *Nech $\tilde{a}$ je priamka priestoru $\tilde{\mathscr{A}}$ neležiaca v rovine $\tilde{\pi}$; priesečník P^a priamky $\tilde{a}$ s rovinou $\tilde{\pi}$ nazývame stopníkom priamky $\tilde{a}$. Ak $\tilde{a}'$ je priamka prechádzajúca bodom S a rovnobežná s priamkou $\tilde{a}$, tak priesečník U^a_s priamky $\tilde{a}'$ s rovinou $\tilde{\pi}$ nazývame úbežníkom priamky $\tilde{a}$.*

Úbežník priamky je priemetom nevlastného bodu a leží zrejme na priemete priamky.

Veta 1. *Množinu všetkých vlastných priamok priestoru $\tilde{\mathscr{A}}$, ktoré nie sú rovnobežné s rovinou $\tilde{\pi}$, možno bijektívne zobraziť na množinu usporiadaných dvojíc všetkých vlastných bodov (stopník, úbežník) roviny $\tilde{\pi}$, teda na množinu $\pi \times \pi$.*

Dôkaz. Každá vlastná priamka priestoru $\tilde{\mathscr{A}}$, ktorá nie je rovnobežná s rovinou $\tilde{\pi}$, má stopník a úbežník. Naopak, nech body P^a, U^a_s sú dva vlastné body roviny $\tilde{\pi}$; potom existuje práve jedna priamka $\tilde{a} \subset \tilde{\mathscr{A}}$, pre ktorú je bod P^a jej stopníkom a bod U^a_s jej úbežníkom. Skutočne, priamka $\tilde{a}$ musí prechádzať bodom P^a a priamka $\tilde{a}$ musí byť rovnobežná so spojnicou $\widetilde{SU^a_s}$; priamka $\tilde{a}$, ktorá vyhovuje obidvom podmienkam, je práve jedna.

Veta 2. *Vlastné priamky $\tilde{a}, \tilde{b}$ sú práve vtedy rovnobežné, ak majú spoločný úbežník.*

Dôkaz vyplýva bezprostredne z definície úbežníka priamky.

Definícia 3. *Nech $\tilde{\alpha}$ je rovina priestoru $\tilde{\mathscr{A}}$, nech $\tilde{\alpha}'$ je rovina prechádzajúca bodom S, pričom rovina $\tilde{\alpha}'$ je rovnobežná s rovinou $\tilde{\alpha}$. Potom priesečnica $\tilde{u}^\alpha_s$ roviny $\tilde{\alpha}'$ s rovinou $\tilde{\pi}$ sa nazýva úbežnicou roviny $\tilde{\alpha}$. Ak rovina $\tilde{\alpha}$ nie je rovnobežná s rovinou $\tilde{\pi}$, tak priesečnica $\tilde{p}^\alpha$ rovín $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\pi}$ je stopa roviny $\tilde{\alpha}$.*

Veta 3. *Priemetom roviny $\tilde{\alpha} \subset \tilde{a}$ je alebo celá rovina $\tilde{\pi}$, alebo priamka $\tilde{\alpha}_s \subset \tilde{\pi}$. Priemetom roviny $\tilde{\alpha}$ je priamka práve vtedy, ak rovina $\tilde{\alpha}$ prechádza bodom S.*

Dôkaz. Nech rovina $\tilde{\alpha}$ neprechádza bodom S. Nech A_s je ľubovoľný bod roviny $\tilde{\pi}$; potom spojnica $\widetilde{SA_s}$ pretína rovinu $\tilde{\alpha}$ práve v jednom bode A a teda priemetom roviny $\tilde{\alpha}$ je rovina $\tilde{\pi}$. Druhá časť vety je zrejmá.

Veta 4. *Dve roviny $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ sú rovnobežné práve vtedy, ak majú spoločnú úbežnicu. Priamka $\tilde{a}$ je rovnobežná s rovinou $\tilde{\alpha}$ práve vtedy, ak úbežník priamky $\tilde{a}$ leží na úbežnici roviny $\tilde{\alpha}$.*

Dôkaz vyplýva bezprostredne z definícií 2 a 3.

Veta 5. *Ak rovina $\tilde{\alpha}$ nie je rovnobežná s rovinou $\tilde{\pi}$, tak priamky $\tilde{p}^\alpha$ a $\tilde{u}^\alpha_s$ sú navzájom rovnobežné. Ak $\tilde{p}^\alpha$ a $\tilde{u}^\alpha_s$ sú dve navzájom rovnobežné priamky roviny $\tilde{\pi}$, tak existuje práve jedna rovina $\tilde{\alpha}$ taká, že priamky $\tilde{p}^\alpha$ a $\tilde{u}^\alpha_s$ sú jej stopou a úbežnicou.*

Dôkaz. Keby priamky $\tilde{p}^\alpha$ a $\tilde{u}_s^\alpha$ neboli navzájom rovnobežné, museli by mať roviny $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\alpha}'$ spoločný vlastný bod, čo je spor s predpokladom, že roviny α a α' sú navzájom rovnobežné. Rovina $\tilde{\alpha}$, ktorá má stopu $\tilde{p}^\alpha$ a úbežnicu $\tilde{u}_s^\alpha$, musí prechádzať priamkou $\tilde{p}^\alpha$ a priesečnicou roviny $\tilde{\alpha}'$ určenej bodom S a úbežnicou $\tilde{u}_s^\alpha$ s nevlastnou rovinou priestoru $\mathscr{A}$; taká je práve jedna.

Veta 6. *Nech ani priamka $\tilde{a}$ ani rovina $\tilde{\alpha}$ nie sú rovnobežné s rovinou $\tilde{\pi}$; potom priamka $\tilde{a}$ je rovnobežná s rovinou $\tilde{\alpha}$ práve vtedy, ak $U_s^a \in u_s^\alpha$; priamka $\tilde{a}$ leží v rovine $\tilde{\alpha}$ práve vtedy, ak $P^a \in \tilde{p}^\alpha$ a $U_s^a \in \tilde{u}_s^\alpha$.*

Dôkaz vety je zrejmý.

Na podklade vety 6 je možné konštruovať priesečnicu dvoch rovín i priesečník priamky s rovinou.

Keďže bod nie je svojím stredovým priemetom určený, ale vlastná priamka (podľa vety 1) je určená svojím stopníkom a úbežníkom, je výhodné určovať bod usporiadanou trojicou (A_s, P^a, U_s^a), kde A_s je priemet bodu A a P^a a U_s^a je stopník a úbežník vlastnej priamky prechádzajúcej tým bodom.

Veta 7. *Ku každej usporiadanej trojici (A_s, P^a, U_s^a) kolineárnych bodov $A_s, P^a \neq U_s^a$ roviny $\tilde{\pi}$ existuje práve jeden taký bod A, že jeho stredovým priemetom je bod A_s a leží na priamke $\tilde{a}$. Naopak, každý bod rôzny od bodu S a neležiaci na nevlastnej priamke roviny $\tilde{\pi}$ možno charakterizovať popísanou trojicou bodov.*

Dôkaz. Pretože $P^a \neq U_s^a$, neprechádza priamka a bodom S a spojnica $\widetilde{SA_s}$ ju teda pretína práve v jednom bode A. Naopak každým bodom rôznym od bodu S a neležiacim na nevlastnej priamke roviny $\tilde{\pi}$ je možné zostrojiť takú priamku $\tilde{a}$, pre ktorú $P^a \neq U_s^a$.

Pre body, priamky a roviny budeme používať zápisy $A(A_s, P^a, U_s^a)$, $\tilde{a}(P^a, U_s^a)$, $\tilde{\alpha}(\tilde{p}^\alpha, \tilde{u}_s^\alpha)$, ktorých význam je zrejmý.

V ďalšom budeme predpokladať, že v trojici (A_s, P^a, U_s^a) sú body P^a a U_s^a rôzne.

Veta 8. *Bod $A(A_s, P^a, U_s^a)$ leží na priamke $\tilde{b}(P^b, U_s^b)$ práve vtedy, ak alebo 1. $P^b \neq U_s^b$, spojnice $\widetilde{P^aP^b} \neq \widetilde{U_s^aU_s^b}$ sú navzájom rovnobežné a $A_s \in \tilde{b}_s$ (pričom $P^a = P^b$ a $U_s^a = U_s^b$); alebo 2. $P^b = U_s^b$ a $A_s = P^b = U_s^b$; alebo 3. $P^a = P^b = A_s$; alebo 4. $U_s^a = U_s^b = A_s$.*

Dôkaz. 1. Nutná podmienka vyplýva z toho, že ak sa majú priamky $\tilde{a}, \tilde{b}$ pretínať v bode A, musia ležať v jednej rovine. Ak naopak sú spojnice stopníkov a úbežníkov priamok $\tilde{a}, \tilde{b}$ navzájom rovnobežné, potom ležia v rovine, pre ktorú je $\widetilde{P^aP^b}$ stopou a $\widetilde{U_s^aU_s^b}$ úbežnicou; keďže bod A_s je jediný spoločný bod priamok $\tilde{a}_s, \tilde{b}_s$, musí byť bod A spoločným bodom priamok $\tilde{a}, \tilde{b}$.

Tvrdenia 2, 3 a 4 sú zrejmé.

Bod $A(A_s, P^a, U_s^a)$ leží v rovine $\tilde{\alpha}(\tilde{p}^\alpha, \tilde{u}_s^\alpha)$ práve vtedy, ak existuje v rovine $\tilde{\alpha}$ taká priamka $\tilde{b}$, že $A \in \tilde{b}$.

Pre daný bod $A(A_s, P^a, U_s^a)$ neexistuje jediná trojica, ktorá reprezentuje ten bod. Vzniká otázka, ako navzájom súvisia všetky trojice reprezentujúce ten istý bod.

Pod homotetiou roviny π rozumieme stredovú kolineáciu roviny π s vlastným stredom a nevlastnou osou reštringovanú na rovinu π.

Veta 9. *Nech $A_s \neq P^a \neq U_s^a \neq A_s$ a nech body $A_s, P^a, U_s^a, P^x, U_s^x$ sú všetky vlastné; potom trojice (A_s, P^a, U_s^a) a (A_s, P^x, U_s^x), kde $P^x \neq A_s$ a $\tilde{x}$ je priamka z $\mathscr{A}$, reprezentujú ten istý bod práve vtedy, ak bodu P^x odpovedá bod U_s^x v homotetii roviny π so stredom A_s a priraďujúcej bodu P^a bod U_s^a.*

Dôkaz. Vzhľadom na to, že rovina $\tilde{\pi}$ je desarguesovská, homotetia $\varkappa$ určená stredom A_s a párom odpovedajúcich si bodov P^a, $U_s^a = P^a\varkappa$ existuje a je jediná. Podľa predchádzajúceho, ak je daný bod A, musia si body P^x, U_s^x v trojici (A_s, P^x, U_s^x) reprezentujúcej bod A, odpovedať v homotetii $\varkappa$. Naopak, ak bod U_s^x odpovedá bodu P^x v homotetii $\varkappa$, sú spojnice $\widetilde{P^xP^a}$ a $\widetilde{U_s^xU_s^a}$ navzájom rovnobežné a bod A leží na obidvoch priamkach a, x, alebo $P^a = P^x$, $U_s^a = U_s^x$ a teda $\tilde{a} = \tilde{x}$.

Poznámka. Bod $A \in \pi$ reprezentujú trojice (A_s, P^a, U_s^a), kde $P^a = A_s$ a U_s^a je ľubovoľný bod roviny π. Nevlastný bod $N \in \tilde{\pi}$ reprezentujú trojice (N_s, P^a, U_s^a), kde $U_s^a = N_s$ a P^a je ľubovoľný bod roviny π.

Veta 10. *Nech bod $A \neq S$ je vlastný bod roviny $\tilde{\pi}'$ ($\tilde{\pi}' \parallel \tilde{\pi}, S \in \tilde{\pi}'$); potom trojica (A_s, P^x, U_s^x) reprezentuje bod A práve vtedy, ak bod A_s je nevlastný bod roviny $\tilde{\pi}$ a zobrazenie $P^x \to U_s^x$ bodov roviny π je translácia so smerom A_s.*

Dôkaz. Ak bod $A \neq S$ je vlastným bodom roviny $\tilde{\pi}'$, tak každá priamka $\tilde{x}$, ktorá prechádza bodom A a nie je rovnobežná s rovinou $\tilde{\pi}$, musí mať priemet $\tilde{x}_s$ prechádzajúci nevlastným bodom A_s a teda priamky $\tilde{x}_s$ sú navzájom rovnobežné so smerom A_s. Ak dve priamky $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ prechádzajú bodom A, ležia v rovine a ak žiadna z priamok $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ neleží v rovine $\tilde{\pi}'$, tak spojnice $\widetilde{P^xP^y}$ a $\widetilde{U_s^xU_s^y}$ sú navzájom rovnobežné. Ak zobrazenie $P^x \to U_s^x$ je translácia roviny π, tak spojnice $\widetilde{P^xP^y}$ a $\widetilde{U_s^xU_s^y}$ sú navzájom rovnobežné a spoločný bod priamok $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ leží v rovine $\tilde{\pi}'$.

V ďalšom budeme predpokladať, že priemetňa π je regulárnou rovinou, t. j., že všetky jej priamky sú neizotropické, alebo je hyperbolickou rovinou s dvoma rôznymi osnovami izotropických priamok ([2], str. 163). V tomto prípade sú kolmice na rovinu π regulárne priamky a nie sú rovnobežné s π. Zostrojme kolmicu bodom S na rovinu π a jej vlastný priesečník s rovinou π označme H; budeme ho nazývať hlavným bodom premietania $\mathscr{S}$. V ďalšom budeme tiež predpokladať, že bod O splýva s bodom H (ak neurčíme inak). Predpokladajme ďalej, že každý prvok telesa $\mathbf{T}$ je kvadrátom.

Definícia 4. *Vektor* $\mathbf{S}$ *je nenulový a označme* $d = \mathbf{S}^2$. *Prvok* d *budeme nazývať dištanciou premietania* $\mathscr{S}$. *Množinu* k *všetkých bodov* $X \in \pi$ *takých, že* $\mathbf{X}^2 = d^2$ *budeme nazývať dištančnou kružnicou premietania* $\mathscr{S}$.

Poznámka. V priestore $\mathscr{A}$ neexistujú izotropické roviny (pozri [1], str. 218). Priestor $\mathscr{A}$ teda alebo neobsahuje žiadnu izotropickú priamku, alebo ak obsahuje izotropické priamky, potom žiadne tri z rôznych osnôv neležia v jednej rovine (ak obsahuje priestor $\mathscr{A}$ jednu izotropickú priamku, musí ich obsahovať viac, pretože musí obsahovať hyperbolické roviny). V prvom prípade má priestor V index 0, v druhom prípade má index 1.

Definícia 5. *Množinu všetkých izotropických priamok prechádzajúcich bodom* A *priestoru* $\mathscr{A}$ *budeme nazývať izotropickou kužeľovou plochou s vrcholom v bode* A.

Každou izotropickou priamkou prechádza jedna singulárna rovina. Zvoľme v priestore $\mathscr{A}$ ľubovoľnú rovinu α neprechádzajúcu bodom O. Potom, ak zavedieme medzi vektormi z $V \setminus \{\mathbf{o}\}$ reláciu ekvivalencie takú, že dva nenulové vektory sú ekvivalentné práve vtedy, ak sú kolineárne, možno triedy ekvivalencie bijektívne zobraziť na body projektívnej roviny $\tilde{\alpha}$. V priestore V zvoľme ortonormálnu bázu a pomocou nej zaveďme v rovine α homogénne súradnice (ortonormálnu bázu môžeme zaviesť, pretože každý prvok telesa $\mathbf{T}$ je kvadrátom). Potom pre body roviny $\tilde{\alpha}$ odpovedajúce izotropickým vektorom z V platí $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. To je rovnica pravej kužeľosečky a tá má v každom bode dotyčnicu. Rovina prechádzajúca touto dotyčnicou a bodom O je singulárna rovina prechádzajúca danou izotropickou priamkou.

Na podklade predchádzajúcich úvah môžeme zaviesť

Definícia 6. *Izotropickú kužeľovú plochu s vrcholom v bode* S *budeme nazývať hlavnou izotropickou kužeľovou plochou a kužeľosečku, v ktorej pretína rovinu* $\tilde{\pi}$, *budeme značiť* $\tilde{o}$.

Poznámka. Podľa toho, či rovina π je alebo nie je hyperbolickou rovinou, obsahuje kužeľosečka $\tilde{o}$ dva, alebo žiaden nevlastný bod.

Z predchádzajúcich úvah bezprostredne vyplývajú tieto dve tvrdenia:

1. Nech priestor V má index 1;

a) nech rovina π nie je hyperbolickou rovinou; potom všetky body kužeľosečky $\tilde{o}$ sú práve úbežníky všetkých izotropických priamok. Izotropické priamky sa premietajú alebo do bodov kužeľosečky $\tilde{o}$, alebo do regulárnych priamok.

b) nech rovina π je hyperbolická, potom izotropické priamky rovnobežné s izotropickými priamkami roviny π (okrem tých dvoch, ktoré prechádzajú bodom S) sa premietajú do izotropických priamok; pre všetky ostatné izotropické priamky platí tvrdenie a).

Rovina je práve vtedy hyperbolická, resp. singulárna, resp. bez izotropických priamok, ak jej úbežnica má s kužeľosečkou $\tilde{o}$ spoločné dva, resp. jeden, resp. žiaden bod.

Veta 11. *Nech regulárna rovina α neprechádza stredom premietania S a nech priamka p^α je regulárna; potom existuje taká izometria roviny α na priemetňu π, že stredový priemet bodu a jeho obrazu v tej izometrii je vždy kolineárny s tým istým bodom a priamka p^α je bodove invariantná.*

Dôkaz. Podľa [1] (veta 17) existuje medzi rovinami α a π izometria, ak rovina α nie je kolmá na priemetňu. Ak rovina α je kolmá na priemetňu, môžeme takú izometriu skonštruovať týmto spôsobom: Nech A, B sú dva ľubovoľné rôzne body roviny α, ktorých spojnica AB pretína priamku p^α vo vlastnom bode; bez újmy na obecnosti môžeme tento bod zvoliť za bod O. Potom $\boldsymbol{B} = c\boldsymbol{A}$; nech $\boldsymbol{K}$ je vektor $\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}$ (kde A_1 je kolmý priemet bodu A na rovinu π); potom $\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B} = k\boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{B}_1 = l\boldsymbol{A}_1$. Z toho $\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B} = l\boldsymbol{A}_1 - c\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{K} = k(\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A})$; ďalej $(l - k)\boldsymbol{A}_1 - (c - k)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$. Keďže vektor $\boldsymbol{A}$ nie je vektorom roviny π, nie sú vektory $\boldsymbol{A}_1$ a $\boldsymbol{A}$ kolineárne a teda musí $l = k = c$. Zvoľme teraz ľubovoľný nenulový vektor $\boldsymbol{L}$ kolmý na rovinu α; tento vektor je potom vektorom roviny π. Nájdeme taký vektor $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_1 + m\boldsymbol{L}$, že $\boldsymbol{A}_0^2 = \boldsymbol{A}^2$. Pretože $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{K}$, dostávame rovnicu $(\boldsymbol{A}_1 + m\boldsymbol{L})^2 = (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{K})^2$, odkiaľ vzhľadom na $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{L} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{K} = 0$ vyplýva $m^2\boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{K}^2$, čiže $m = \dfrac{\boldsymbol{K}^2}{\boldsymbol{L}^2}$ Podobne nájdeme taký vektor $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B}_1 + n\boldsymbol{L}$, že $\boldsymbol{B}_0^2 = \boldsymbol{B}^2$. Jednoduchým výpočtom výjde $\boldsymbol{B}_0 = c\boldsymbol{A}_0$ a teda vektory $\boldsymbol{A}_0$ a $\boldsymbol{B}_0$ sú kolineárne. Dvojice vektorov $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ sú zrejme kongruentné a keďže boli volené celkom ľubovoľne, je zobrazenie, v ktorom každému bodu $A \in \alpha$ odpovedá bod $A_0 \in \pi$, izometriou. Celkove teda existuje izometria medzi každou regulárnou rovinou a rovinou π.

Podľa Wittovej vety je možné popísanú izometriu rozšíriť na celý priestor V. Keďže v tej izometrii sú invariantné vektory jednorozmerného podpriestoru (reprezentovaného priamkou p^α), môže byť hľadaná izometria priestoru V alebo rotácia σ okolo osi p^α, alebo symetria τ podľa roviny prechádzajúcej priamkou p^α (pozri [2], str. 181—183).

a) Nech hľadaná izometria je rotácia σ, ktorá je súčinom symetrií σ_1, σ_2 podľa rovín prechádzajúcich priamkou p^α. Zvoľme izometriu $\varrho = \sigma_1\sigma_2\alpha$, kde α je symetria podľa roviny α. Keďže ϱ je súčinom troch symetrií a ponecháva vektory priamky p^α invariantnými, musí byť symetriou. Rotáciu $\sigma_1\sigma_2$ môžeme teda písať i vo tvare $\varrho\alpha$, kde ϱ je symetriou podľa nejakej roviny ϱ. Rotácia $\varrho\alpha$ transformuje vektor $\boldsymbol{A}$ roviny α do vektora $\boldsymbol{A}_0$ roviny π, čiže $(\varrho\alpha)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0$; keďže ale $\alpha\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, musí $\varrho\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0$. Z toho vyplýva, že vektor $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_0$ je kolmý na rovinu ϱ.

b) Ak izometria τ je symetriou, musí rovina symetrie τ prechádzať priamkou p^α. I v tomto prípade musí vektor $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_0$ byť kolmý na rovinu τ symetrie τ.

V obidvoch prípadoch musia teda spojnice bodov A a A_0 pre všetky body roviny α a ich obrazy v rovine π byť kolmé na nejakú rovinu a musia teda byť navzájom rovnobežné. Priemety spojníc AA_0 musia mať potom spoločný úbežník U a keďže body A_0 ležia v priemetni, musia body A_s ležať na spojniciach UA_0.

Keďže zobrazenie $\mathscr{S}$ sprostredkuje bijekciu medzi π a α (v ktorej je každý bod $A \in \alpha$ obrazom bodu $A_s \in \pi$) a zobrazenie medzi α a π sprostredkované symetriou ϱ alebo τ je taktiež bijekciou (pri ktorej každý bod $A \in \alpha$ prejde do bodu $A_0 \in \pi$), je aj súčin $\varkappa$ oboch bijekcií bijekciou medzi π a π zobrazujúcou vždy A_s do A_0. Dá sa ľahko ukázať, že táto bijekcia je kolineáciou. Kolineácia $\varkappa$ má bodove invariantnú priamku p^α, je teda stredovou kolineáciou a musí mať teda aj stred, ktorým je zrejme bod U.

Geometrický význam bodu U možno zistiť touto úvahou: Rovina $\alpha' = Su_s^\alpha$ je rovnobežná s rovinou α a obsahuje stred premietania S. Medzi rovinou α' a rovinou π možno skonštruovať podobnú izometriu ako medzi rovinami α a π posunutím rovín α a π vo smere kolmom na priamku p^α tak, aby sa priamka p^α posunula do priamky u_s^α. V tejto izometrii $\sigma' : \alpha' \to \pi$ odpovedá bodu S bod U a možno ho preto označiť S_0'. Izometria σ' je izometriou typu popísaného v [1] (veta 17). Skonštruujme teraz bodom S spádovú priamku s roviny α' a nech jej stopník je bod $P \in u_s^\alpha$. Potom dvojice bodov (P, S) a (P, S_0') sú kongruentné. Podľa konštrukcie popísanej v [1] (str. 223) a podľa definície 4 leží bod ${}^\pi S$ (t. j. bod, ktorý dostaneme z bodu S „sklopením" premietacej roviny spádovej priamky s do priemetne π) na dištančnej kružnici premietania $\mathscr{S}$. Teda bod ${}^\pi S$ možno dostať jednoducho tak, že v bode H zostrojíme kolmicu na priamku s_1 v rovine π a jej priesečník s dištančnou kružnicou je hľadaný bod ${}^\pi S$. Páry bodov $(P, {}^\pi S)$ a (P, S_0') sú potom kongruentné. Táto konštrukcia bodu S_0' je úplne podobná konštrukcii používanej v centrálnom premietaní v reálnom euklidovskom priestore.

Napokon uvedieme konštrukciu páru bodov v priemetni π kongruentného k páru bodov daných ich priemetmi a stopníkmi a úbežníkmi priamok, ktoré nimi prechádzajú, ktorá je obdobou konštrukcie pri hľadaní dĺžky úsečky v reálnom euklidovskom priestore.

Nech A, B sú dva vlastné body priestoru $\mathscr{A}$ rôzne od bodu S a nech ich spojnica $m = AB$ nie je izotropická. Zostrojme priamkou m ľubovoľnú regulárnu rovinu α neprechádzajúcu bodom S. Potom stopník P^m priamky $\tilde{m}$ leží na stope $\tilde{p}^\alpha$ a úbežník U_s^m leží na úbežnici $\tilde{u}_s^\alpha$. Jednoduchým výpočtom zistíme, že na stope $\tilde{p}^\alpha$ je možné nájsť také body A', B', že dvojice (A, B) a (A', B') sú kongruentné a spojnice AA', BB' sú navzájom rovnobežné. Ak zobrazíme priamku m na priamku p^α tak, že bodu $M \in m$ priradíme bod

$M' \in p^\alpha$ a spojnica MM' je rovnobežná so spojnicou AA', tak toto zobrazenie je izometriou. Nech teraz α' je rovina rovnobežná s rovinou α a prechádzajúca bodom S a nech m' je priamka rovnobežná s priamkou m a prechádzajúca bodom S. Potom posunutím $P^m \to U_s^m$ prejde priamka m do priamky m' a priamka p^α do priamky u_s^α. Izometria $m \to p^\alpha$ prejde do izometrie $m' \to u_s^\alpha$, pričom bodu S bude odpovedať bod $S' \in u_s^\alpha$ a $SS' \parallel AA'$. Pre bod S' platí, že dvojice (S, U_s^m) a (S', U_s^m) sú kongruentné a bod S' je úbežník smeru AA'. Podobne ako pri konštrukcii bodu S_0' vo vete 15 je možné aj tu na konštrukciu bodu S' (ktorý sa obyčajne označuje Δ^m a nazýva meracím bodom pre smer priamky m) použiť dištančnú kružnicu a „sklopenie" kolmopremietacej roviny priamky m'.

LITERATÚRA

[1] MEDEK, V.: Darstellende Geometrie eines Raumes mit Ortogonalgeometrie. Mat. čas. *19*, 1969, 216—224.

[2] АРТИН, Э.: Геометрическая алгебра, Москва 1969.

[3] IYANAGA, S.—MATSUZAKA, K.: Affine geometry and projective geometry. Journal Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, *14*, 1967, 171—196.

Došlo 21. 1. 1970

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
Bratislava

THE CENTRAL PROJECTION IN AN ORTHOGONAL SPACE

Filoména Píšová

Summary

The aim of this paper is to define the central projection of a three-dimensional orthogonal space over a field T (characteristic $T \neq 2$) on a regular plane of this space and to derive some theorems about projections of points, lines and planes. Some metric properties are studied under the assumption that all elements of the field T are squares