

Matematický časopis

Pavel Bartoš

O niektorých kombinatorických nerovnostech

Matematický časopis, Vol. 21 (1971), No. 3, 219--220

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126493>

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1971

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O NIEKTORÝCH KOMBINATORICKÝCH NEROVNOSTIACH

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Veta. *Nech je n prirodzené číslo, a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) nezáporné čísla. Platia nerovnosti*

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \geq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sqrt{a_k a_{k+1}} \geq 2^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \sqrt[2^2]{a_k^{(2)} a_{k+1}^{(2)} a_{k+2}^{(2)}} \geq \\ \geq 2^3 \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} \sqrt[2^3]{a_k^{(3)} a_{k+1}^{(3)} a_{k+2}^{(3)} a_{k+3}^{(3)}} \geq \dots \geq 2^n \sqrt[2^n]{a_0^{(n)} a_1^{(n)} \dots a_n^{(n)}},$$

príčom rovnosť platí práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Dôkaz. Dokážeme nerovnosť

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \geq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sqrt{a_k a_{k+1}}.$$

(2) platí, keď $n = 1$, lebo vtedy platí $a_0 + a_1 \geq 2\sqrt{a_0 a_1}$ a rovnosť platí práve vtedy, keď $a_0 = a_1$. Nech platí (2) pre ľubovoľné nezáporné čísla a_0, a_1, \dots, a_n a určité prirodzené n . Potom (2) tiež platí pre ľubovoľné nezáporné čísla a_1, a_2, \dots, a_{n+1} , a teda platí

$$(3) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{k+1} \geq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sqrt{a_{k+1} a_{k+2}}.$$

Sčítaním nerovností (2) a (3) dostaneme

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a_k \geq 2 \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sqrt{a_k a_{k+1}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \sqrt{a_k a_{k+1}} \right],$$

odkiaľ vyplýva

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k \geq 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{a_k a_{k+1}},$$

čiže (2) platí aj pre $n+1$. Tým je nerovnosť (2) dokázaná. Rovnosť zrejme platí práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = \dots = a_n$.

Opätovným použitím nerovnosti (2) dostaneme nerovnosti

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sqrt{a_k a_{k+1}} &\geq 2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \sqrt[2^2]{a_k^{(2)} a_{k+1}^{(2)} a_{k+2}^{(2)}}, \\ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \sqrt[2^2]{a_k^{(2)} a_{k+1}^{(2)} a_{k+2}^{(2)}} &\geq 2 \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} \sqrt[2^3]{a_k^{(3)} a_{k+1}^{(3)} a_{k+2}^{(3)} a_{k+3}^{(3)}}, \end{aligned}$$

až po nerovnosť

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \sqrt[2^{n-1}]{a_k^{(n-1)} a_{k+1}^{(n-1)} \dots a_{k+n-1}^{(n-1)}} \geq 2 \sqrt[2^n]{a_0^{(n)} a_1^{(n)} \dots a_n^{(n)}},$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = \dots = a_n$. Tým je nerovnosť (1) dokázaná.

Poznámka. Nerovnosť

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \geq 2^n \sqrt[2^n]{a_0^{(n)} a_1^{(n)} \dots a_n^{(n)}}$$

vyplýva z nerovnosti medzi váženým aritmetickým a geometrickým priemerom, ak je váhou $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n} \right)$.

ON SOME COMBINATORIAL INEQUALITIES

Pavel Bartoš

Summary

Theorem. Let n be a natural number, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — non-negative numbers. Then the inequalities (1) hold. The equalities in (1) take place if and only if $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Došlo 12. 11. 1969