Matematický časopis

Imrich Abrhan

Poznámka k maximálnym (H_1, H_2)-ideálom v pologrupách

Matematický časopis, Vol. 21 (1971), No. 3, 214--218

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126492

POZNÁMKA K MAXIMÁLNYM (H_1,H_2)-IDEÁLOM V POLOGRUPÁCH

IMRICH ABRHAN, Bratislava

V poznámke sa zovšeobecňujú a doplňujú výsledky práce [1]. V nasledujúcom S bude znamenať pologrupu a H_1, H_2 jej podpologrupy ($H_1 \neq \emptyset$, $H_2 \neq \emptyset$).

Nech A, B sú podmnožiny v S (pozri [2]). Definujeme:

Ak $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, potom $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$.

Ak $A = \emptyset$, potom $AB = B$. Ak $B = \emptyset$, potom $AB = A$.

Nech $B_1 \subseteq S$, $B_2 \subseteq S$. Nech $I(B_1, B_2) = \{A \subseteq S : B_1A \subseteq A, AB_2 \subseteq A\}$. Prvok $A \in I(B_1, B_2)$ nazývame (B_1, B_2)-ideálom v S (pozri [2]).

Definícia 1. *Nech S je pologrupa a H_1, H_2 jej podpologrupy. Prvok $A \in I(H_1, H_2)$ a $A \neq S$ nazývame maximálnym (H_1, H_2)-ideálom v S, ak neexistuje vlastná podmnožina A' v S ($A' \neq S$) taká, že $A \subsetneqq A'$ a $A' \in I(H_1, H_2)$.*

Hlavným (H_1, H_2)-ideálom v S vytvoreným prvkom $a \in S$ budeme nazývať (H_1, H_2)-ideál tvaru $a \cup H_1a \cup aH_2 \cup H_1aH_2$ a označovať ${}_{H_1}(a)_{H_2}$ (pozri [2]).

Nech pre $a \in S$, $b \in S$ je ${}_{H_1}(a)_{H_2} = {}_{H_1}(b)_{H_2}$. Potom budeme písať $(a, b) \in {}_{H_1}\mathscr{I}_{H_2}$ a hovoriť, že prvky a, b sú *${}_{H_1}\mathscr{I}_{H_2}$-evkivalentné* (pozri [2]). Triedu prislúchajúcu k ekvivalencii ${}_{H_1}\mathscr{I}_{H_2}$ na S budeme označovať ${}_{H_1}F_{H_2}$. Ak trieda ${}_{H_1}F_{H_2}$ obsahuje prvok $a \in S$, potom budeme písať ${}_{H_1}F^a{}_{H_2}$. Podmnožinu S' pologrupy S budeme nazývať ${}_{H_1}\mathscr{I}_{H_2}$-jednoduchou, ak ekvivalencia ${}_{H_1}\mathscr{I}_{H_2}$ vytvára na S' práve jednu triedu (pozri [2]).

Definícia 2. *Prvok $a \in S$ nazývame hlavným (H_1, H_2)-prvkom pologrupy S ak ${}_{H_1}(a)_{H_2} = S$.* Ak $H_1 = H_2 = S$ a ${}_S(a)_S = S$, potom hovoríme, že prvok a je hlavným prvkom v S.

Každý hlavný (H_1, H_2)-prvok v S je aj hlavným prvkom v S. Neplatí obrátene.

Príklad 1. Nech $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Násobenie v S nech je dané multiplikatívnou tabuľkou

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	a	b	e	f	f	e
b	b	a	b	a	f	e	e	f
c	c	d	c	d	h	g	g	h
d	d	c	d	c	g	h	h	g
e	a	b	b	a	e	f	e	f
f	b	a	a	b	f	e	f	e
g	d	c	c	d	g	h	g	h
h	c	d	d	c	h	g	h	g

Nech $H_1 = \{a, b, c, d\}$ a $H_2 = \{g, h\}$, potom prvok $e \in S$ je hlavným prvkom v S a nie je hlavným (H_1, H_2)-prvkom v S (napr. $a \in S$ je hlavným (H_1, H_2)-prvkom v S).

Definícia 3. *Hovoríme, že $a \in S$ je úplne maximálny (H_1, H_2)- prvok v S, ak $H_1 a H_2 = S$.*

Ak $H_1 = H_2 = S$ a $SaS = S$, potom hovoríme, že prvok a je úplne maximálnym prvkom v S (pozri [1]).

Každý úplne maximálny (H_1, H_2)-prvok v S je úplne maximálny v S. Neplatí obrátene.

Príklad 2. Nech $S = \{0, a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a násobenie v S je dané multiplikatívnou tabuľkou

	0	a	b	c	d	e	f	g	h
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	b	0	0	e	f	0	0
b	0	b	a	0	0	f	e	0	0
c	0	0	0	c	d	0	0	g	h
d	0	0	0	d	c	0	0	h	g
e	0	0	0	e	f	0	0	a	b
f	0	0	0	f	e	0	0	b	e
g	0	g	h	0	0	c	d	0	0
h	0	h	g	0	0	d	c	0	0

V tomto prípade $ScS = S$ t. j. c je úplne maximálny prvok v S, Ak $H_1 = H_2 = \{0, a, b, c, d, e, f\}$, potom $H_1 c H_2 = \{0, c, d, e, f\}$ t. j. c nie je úplne maximálny (H_1, H_2)-prvok v S. Napr. prvok $g \in S$ je úplne maximálny (H_1, H_2)-prvok v S.

Poznámka 1. Každý úplne maximálny (H_1, H_2)-prvok v S je aj hlavným (H_1, H_2)-prvkom v S. Obrátene neplatí.

Veta 1. *Nech každý (H_1, H_2)-ideál v S je hlavný (H_1, H_2)-ideál v S. Potom množina všetkých (H_1, H_2)-ideálov v pologrupe S* je lineárne usporiadaná vzhľadom na $\subseteq$.

Dôkaz. Nech N_1, N_2 sú ľubovoľné (H_1, H_2)-ideály v S. Množina $N_1 \cup N_2$ je (H_1, H_2)-ideál v S. Podľa predpokladu existuje prvok $d \in S$, taký, že ${}_{H_1}(d)_{H_2} = N_1 \cup N_2$. Teda buď $d \in N_1$, alebo $d \in N_2$. Nech $d \in N_1$, potom $N_1 \cup N_2 = {}_{H_1}(d)_{H_2} \subseteq N_1$. Z toho vyplýva $N_2 \subseteq N_1$. Predpoklad $d \in N_2$ vedie analogicky k $N_1 \subseteq N_2$. To znamená, že platí buď $N_1 \subseteq N_2$, alebo $N_2 \subseteq N_1$.

Označme ${}_{H_1}K^a{}_{H_2} = {}_{H_1}(a)_{H_2} \setminus {}_{H_1}F^a{}_{H_2}$. ${}_{H_1}K^a{}_{H_2}$ je množina prvkov z ${}_{H_1}(a)_{H_2}$, ktoré nevytvárajú ${}_{H_1}(a)_{H_2}$.

Lema 1. *Ak ${}_{H_1}K^a{}_{H_2} \neq \emptyset$, potom ${}_{H_1}K^a{}_{H_2}$ je (H_1, H_2)-iedál v S.*

Dôkaz. Nech b je ľubovoľný prvok z ${}_{H_1}K^a{}_{H_2}$ a h ľubovoľný prvok z H_1. Z toho vyplýva ${}_{H_1}(b)_{H_2} \subsetneqq {}_{H_1}(a)_{H_2}$ a ${}_{H_1}(hb)_{H_2} = hb \cup H_1(hb) \cup (hb)H_2 \cup \cup H_1(hb)H_2 \subseteq H_1b \cup H_1bH_2 \subseteq {}_{H_1}(b)_{H_2} \subsetneqq {}_{H_1}(a)_{H_2}$. To znamená, že $hb \in {}_{H_1}K^a{}_{H_2}$ t. j. $H_1({}_{H_1}K^a{}_{H_2}) \subseteq {}_{H_1}K^a{}_{H_2}$. Podobne dokážeme, že $({}_{H_1}K^a{}_{H_2})H_2 \subseteq {}_{H_1}K^a{}_{H_2}$.

Veta 2. *Nech pologrupa S obsahuje aspoň jeden (H_1, H_2)-ideál rôzny od S a nech S obsahuje apoň jeden hlavný (H_1, H_2)-prvok. Potom pologrupa S obsahuje práve jeden maximálny (H_1, H_2)-ideál N a $S \setminus N$ je množina všetkých hlavných (H_1, H_2)-prvkov.*

Dôkaz. Označme P množinu všetkých hlavných (H_1, H_2)-prvkov v S. Nech a je ľubovoľný prvok z P, potom $P = {}_{H_1}F^a{}_{H_2}$, $S = {}_{H_1}(a)_{H_2}$. Potom $P \neq S$, pretože $P = S$ implikuje spor s predpokladom, že existuje (H_1, H_2)-ideál $\neq S$. Označme $S \setminus P = N$, teda $S = P \cup N$. Podľa lemy 1 N je maximálny (H_1, H_2)-ideál v S. Predpokladajme, že existuje nejaký iný maximálny (H_1, H_2)-ideál N' v S, potom $N' \cap P \neq \emptyset$. Z toho vyplýva, že $S = {}_{H_1}(a)_{H_2} \subseteq \subseteq N'$. To je spor s tým, že $N' \neq S$.

Z vety 1 vyplýva:

Veta 3. *Ak pologrupa S má viac ako jeden maximálny (H_1, H_2)-ideál, potom nemôže obsahovať žiadny úplný (H_1, H_2)-prvok.*

Veta 4. *Nech pologrupa S obsahuje aspoý jeden (H_1, H_2)-ideál $\neq S$ a nech obsahuje aspoň jeden úplne maximálny (H_1, H_2)-prvok. Potom S obsahuje práve jeden maximálny (H_1, H_2)-ideál N a $P = S \setminus N$, je množina všetkých úplne maximálnych (H_1, H_2)-prvkov.*

Dôkaz. Nech P je množina všetkých hlavných (H_1, H_2)-prvkov, teda $P = {}_{H_1}F_{H_2}$. Nech a je ľubovoľný úplne maximálny (H_1, H_2)prvok. Podľa poznámky 1 je $a \in P$. Nech b je ľubovoľný prvok z P a $b \neq a$. Teda ${}_{H_1}(a)_{H_2} = = {}_{H_1}(b)_{H_2}$. Potom alebo $a \in H_1b$, alebo $a \in bH_2$, alebo $a \in H_1bH_2$. Nech $a \in H_1b$, potom $S = H_1aH_2 \subseteq H_1bH_2$. To isté dostaneme pre $a \in bH_2$, $a \in \in H_1bH_2$. To znamená, že b je úplne maximálny (H_1, H_2)-prvok. Z predchádzajúceho a z vety 2 vyplýva tvrdenie vety 4.

Z vety 3 vyplýva priamo

Veta 5. *Ak pologrupa S má viac ako jeden maximálny (H_1, H_2)-ideál, potom nemôže mať žiadny úplne maximálny (H_1, H_2)-prvok.*

Veta 6. *(H_1, H_2)-ideál N v S je maximálny (H_1, H_2)-ideál S vtedy a len vtedy, ak $S \setminus N$ je ${}_{H_1}\mathscr{I}_{H_2}$-jednoduchá množina.*

Dôkaz. I. Predpokladajme, že $S \setminus N$ obsahuje viac ako jeden prvok. Nech a je ľubovoľný prvok z $S \setminus N$, potom dokážeme, že $S \setminus N \subseteq {}_{H_1}(a)_{H_2}$. Predpokladajme, že $S \setminus N \nsubseteq {}_{H_1}(a)_{H_2}$, potom existuje prvok $b \in S \setminus N$ taký, že $b \notin {}_{H_1}(a)_{H_2}$. Z toho vyplýva, že $b \notin N \cup {}_{H_1}(a)_{H_2}$. Množina $N \cup {}_{H_1}(a)_{H_2}$ je (H_1, H_2)-ideál v S a $N \subsetneqq N \cup {}_{H_1}(a)_{H_2} \neq S$. To je spor s tým, že N je maximálny (H_1, H_2)-ideál v S.

Analogicky pre ľubovoľné $b \in S \setminus N$ platí $S \setminus N \subseteq {}_{H_1}(b)_{H_2}$. To znamená, že pre ľubovoľné dva prvky $a, b \in S \setminus N$ je $a \in {}_{H_1}(b)_{H_2}$ a $b \in {}_{H_1}(a)_{H_2}$. Z toho vyplýva, že ${}_{H_1}(a)_{H_2} = {}_{H_1}(b)_{H_2}$. Nech c je ľubovoľný prvok z N, potom ${}_{H_1}(c)_{H_2} \subseteq N$, teda ${}_{H_1}(c)_{H_2} \neq {}_{H_1}(a)_{H_2}$. Z predchádzajúceho vyplýva, že $S \setminus N$ je ${}_{H_1}\mathscr{I}_{H_2}$-jednoduchá množina v S.

Ak $S \setminus N = \{a\}$, potom tvrdenie je zrejmé.

II. Nech $S \setminus N$ je ${}_{H_1}\mathscr{I}_{H_2}$-jednoduchá množina v S a nech N nie je maximálny (H_1, H_2)-ideál v S. Potom existuje (H_1, H_2)-ideál N' v S taký, že $N \subsetneqq N' \subsetneqq S$. Z toho vyplýva, že $N' \cap (S \setminus N) \neq \emptyset$. Pre každé $a \in N' \cap (S \setminus N)$ je ${}_{H_1}(a)_{H_2} \supseteq S \setminus N$ a ${}_{H_1}(a)_{H_2} \subseteq N'$. To znamená, že $S = N \cup {}_{H_1}(a)_{H_2}$. Z predchádzajúceho vyplýva $S \subseteq N'$. To je spor s tým, že $N' \subsetneqq S$.

Ak pologrupa obsahuje práve jeden maximálny (H_1, H_2)-ideál N taký, že každý iný (H_1, H_2)-ideál $\neq S$ je podmnožinou N, potom ho budeme označovať $N^* = N$.

Veta 7. *Nech N je maximálny (H_1, H_2)-ideál v S. Každý (H_1, H_2)-ideál $\neq S$ je podmnožinou maximálneho (H_1, H_2)-ideálu N t. j. $N = N^*$ práve vtedy, ak nastane aspoň jeden z nasledujúcich prípadov.*

i) *$S \setminus N$ obsahuje hlavný (H_1, H_2)-prvok.*

ii) *$S \setminus N$ obsahuje maximálny (H_1, H_2)-prvok.*

Dôkaz I. Ak $S \setminus N^*$ obsahuje aspoň jeden úplne maximálny (H_1, H_2)-prvok, potom podľa vety 4 pologrupa S obsahuje práve jeden maximálny (H_1, H_2)-ideál N, t. j. $N = N^*$ a $S \setminus N = S \setminus N^*$ je množina všetkých úplne maximálnych (H_1, H_2)-prvkov.

Nech $S \setminus N^*$ neobsahuje žiadny úplne maximálny (H_1, H_2)-prvok. Podľa vety 6 množina $S \setminus N^*$ je ${}_{H_1}\mathscr{I}_{H_2}$-jednoduchá. Pretože $S \setminus N^*$ nie je (H_1 ,H_2)-ideál v S, potom je $H_1(S \setminus N^*) \nsubseteq S \setminus N^*$ alebo $(S \setminus N^*)H_2 \nsubseteq S \setminus N^*$. Nech napríklad $H_1(S \setminus N^*) \nsubseteq S \setminus N^*$ potom existuje $a \in S \setminus N^*$ také, že $H_1 a \nsubseteq S \setminus N^*$. To znamená, že ${}_{H_1}(a)_{H_2} \cap N^* \neq \emptyset$.

Keďže ${}_{H_1}(a)_{H_2} \nsubseteq N^*$, potom nutne ${}_{H_1}(a)_{H_2} = S$.

II. Predpokladajme, že N je maximálny (H_1, H_2)-ideál v S a o $S \setminus N$ platí i). Potom existuje podľa vety 2 práve jeden maximálny (H_1, H_2)-ideál N^* taký, že $S \setminus N^*$ je množina všetkých hlavných (H_1, H_2)-prvkov. To znamená $N = N^*$. Nech N' je ľubovoľný (H_1, H_2)-ideál $\neq S$ a nech $N' \nsubseteq N^*$. Z toho vyplýva $S = {}_{H_1}(a)_{H_2} \subseteq N'$ pre $a \in (S \setminus N^*) \cap N'$. To je spor (pretože $N' \neq S$).

Z vety 6 a vety 7 vyplýva priamo

Veta 8. *(H_1, H_2)-ideál $N \neq S$ v S je maximálny (H_1, H_2)-ideál v S a $N = N^*$ práve vtedy, ak nastane aspoň jeden z týchto prípadov*

i) *$S \setminus N$ obashuje všetky hlavné (H_1, H_2)-prvky a žiadne iné.*

ii) *$S \setminus N$ obsahuje všetky maximálne (H_1, H_2)-prvky a žiadne iné.*

LITERATÚRA

[1] Fabrici I., *O úplne maximálnych prvkoch v pologrupách*, Mat.-fyz. časop. *13* (1963), 16—19.

[2] Hrmová R., *Relative ideals in semigroups*, Mat. časop. *17* (1967), 206—223.

[3] Szász G., *Über Primideále von Helbgruppen*. Publs. math. *13* (1966), 39—41.

Došlo 24. 9. 1969

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Strojníckej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
Bratislava

NOTE ON THE MAXIMAL (H_1, H_2)-IDEALS OF SEMIGROUPS

Imrich Abrhan

Summary

Let S be semigroup and let H_1, H_2 be subsemigroups of S.

An element $a \in S$ is called a principal (H_1, H_2)-element of S if $S = a \cup H_1a \cup aH_2 \cup \cup H_1aH_2$.

An element $a \in S$ is called a totally maximal (H_1, H_2)-element of S if $S = H_1aH_2$.

Let $I(H_1, H_2) = \{N : N \subseteq S,\ N \neq \emptyset,\ H_1N \subseteq N,\ NH_2 \subseteq N\}$. The elements $N \in \in I(H_1, H_2)$ will be called (H, T)-ideals of S.

An element $N \in I(H_1, H_2)$ and $N \neq S$ is called a maximal (H_1, H_2)-ideal of S if there is no $N' \in I(H_1, H_2)$ such that $N \subsetneq N' \subsetneq S$.

If there exists a maximal (H_1, H_2)-ideal N of S containing every (H_1, H_2)-ideal of S different from S we shall denote it by N^*.

The main result is the following theorem:

Theorem 8. *(H_1, H_2)-ideal $N \neq S$ of S is a maximal (H_1, H_2)-ideal of S* and $N = N^*$ *if and only if at least one the following conditions holds*

(i) *$S \setminus N$ is the set of all principal (H_1, H_2)-elements.*

(ii) *$S \setminus N$ is the set of all totally maximal (H_1, H_2)-elements.*