Zdeněk Hedrlín; Pavel Goralčík

О сдвигах полугрупп. I. Периодеческие и квазипериодеческие преобразования

Matematický časopis, Vol. 18 (1968), No. 3, 161--176

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126467

MATEMATICKÝ ČASOPIS

ROČNÍK 18 1968 ČÍSLO 3

О СДВИГАХ ПОЛУГРУПП I ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ЗДЕНЕК ГЕДРЛИН (ZDENĚK HEDRLÍN), ПАВЕЛ ГОРАЛЬЧИК (PAVEL GORALČÍK), Прага

Левым сдвигом полугруппы S называется любое преобразование f: $S \to S$ такое, что $f(x \,.\, y) = f(x) \,.\, y$ для всех $x, y \in S$, правые сдвиги определяются дуально. Примером левых сдвигов служат левые умножения в S, т. е. преобразования f_s, $s \in S$, определяемые равенством $f_s(x) = s \,.\, x$ для всех $x \in S$ — их называют внутренними сдвигами. Известно, что, в случае полугруппы S^1 с единицей, внутренними сдвигами исчерпываются все сдвиги S^1.

Пусть φ произвольное преобразование некоторого множества X. Если снабдить X умножением ,,нулевым слева'', т. е. умножением подчиненным тождеству $xy = x$, то получим полугруппу, левым сдвигом которой является φ. С другой стороны, превратить X в полугруппу таким образом, чтобы φ служило для нее внутренным сдвигом, оказывается далеко не всегда возможным.

Внутренние сдвиги полугрупп — коммутативных или некоммутативных — выделяются среди всевозможных преобразований особым строением. Целью настоящей работы является описание одного класса внутренних сдвигов полугрупп, содержащего, в частности, все внутренние сдвиги периодических полугрупп(1).

Если учесть тот факт, что к всякой полугруппе может быть внешне присоединена единица, то можно сказать, что преобразование φ множества

(1) Впоследествии стала авторам известна работа [3], в которой описание внутренних сдвигов периодических полугрупп, совершенно другим путем, получено. Поскольку нами применяемый метод коммутирующих преобразований позволяет решить проблему сдигов полностью, мы решили привести в несокращенном виде и те результаты, которые покрываются упомянутой работой.

X, являющееся внутренним сдвигом некоторой полугруппы, или является сдвигом полугруппы с единицей, или может быть продолжено до такого путем присоединения к множеству X одного элемента и подходящего доопределения значения преобразования φ на этом элементе.

Вообще говоря, верно также обратное утверждение, но мы будем в состоянии его установить только когда у нас будет полное описание сдвигов полугрупп с единицей.

Лемма 1. *Пусть F и G две системы преобразований множества X. Для того, чтобы F и G были системами соотвественно левых и правых сдвигов некоторой полугруппы с единицей, множеством элементов которой служит X, необходимо и достаточно, чтобы*

а) *существовал элемент e такой, что $F(e) = G(e) = X$ (под $F(e)$ подразумевается множество всех $f(e)$ для $f \in F$, аналогично $G(e)$), и чтобы*

б) *любые $f \in F$ и $g \in G$ были взаимно перестановочны в смысле суперпозиции преобразований.*

Доказательство. Системы левых и правых сдвигов любой полугруппы с единицей обладают свойствами а) и б). Обратно, из а) вытекает, что для любого $x \in X$ существует преобразование $f_x \in F$ такое, что $f_x(e) = x$. Преобразование f_x определяется в силу б) однозначно, так как из предположения $f_x(e) = x = f'_x(e)$ вытекает $f_x(g(e)) = f'_x(g(e))$ для всех $g \in G$. Если определить произведение на X по формуле $x \,.\, y = f_x(f_y(e)) = f_x(y)$, то $(X,.)$ будет требуемой полугруппой.

Определение 1. *Пусть φ^k обозначает k-тую степень преобразования φ в смысле суперпозиции преобразований* (2). *Скажем, что два элемента x, $y \in X$ эквивалентны по φ, если существуют целые неотрицательные m и n такие, что $\varphi^m(x) = \varphi^n(y)$. Если обозначить это отношение через E_φ, то*

$$xE_\varphi y \equiv \exists\, m, n\, (\varphi^m(x) = \varphi^n(y)).$$

Классы $E_\varphi(x)$ элементов эквивалентных с x по φ(3) *будем называть компонентами элемента x по φ. Преобразование φ, обладающее единственной компнентой, назовем связным преобразованием.*

Определение 2. *Пусть φ преобразование множества X. Число элементов, встречающихся в полседовательности $\{\varphi^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ бесконечное число раз,*

(2) Напомним, что степени преобразований определяются рекуррентным соотношением $\varphi^{k+1} = \varphi \circ \varphi^k$ для $k = 0, 1, \ldots$, причем φ^0 означает тождественное преобразование.

(3) Легко проверяется рефлексивность симметричность и транзитивность отношения E_φ.

назовем порядком $r(x)$ элемента x, множество Z_x этих элементов назовем циклом элемента x. В случае бесконечного X может быть также $r(x) = 0$, т. е. *цикл Z_x будет пустым множеством. Очевидно, порядки и циклы элементов одной и той же компоненты совпадают, поэтому можно говорить также о порядках компонент. Объединение всех циклов $Z_\varphi = \bigcup_{x \in X} Z_x$ назовем циклической частью множества X.*

Определение 3. *Преобразование φ такое, что для всех $x \in X$ порядок $r(x)$ положительный, будем называть периодическим преобразованием. В обратном случае φ будет называться непериодическим преобразованием.*

Периодические преобразования образуют довольно широкий класс — в него входят все преобразования конечных множеств.

Определение 4. *Пусть φ-периодическое преобразование. Уровнем $u(x)$ по φ элемента x назовем наименьшее целое неотрицательное n такое, что $\varphi^n(x) \in Z_x$.*

Преобразование φ множества X связано с определенным квазипорядком R_φ на X, именно:

Определение 5. *Скажем, что $xR_\varphi y$, если существует преобразование g множества X перестановочное с φ,* т. е. *$g(\varphi(x)) = \varphi(g(x))$ для всех $x \in X$, причем $g(x) = y$.*

Легко проверяется, что R_φ есть отношение рефлексивное и транзитивное.

Теорема 1. *Пусть φ — периодическое преобразование множества X. Следующие три утверждения эквивалентны:*

(А) *φ является сдвигом полугруппы с единицей,*

(Б) *существует $e \in X$ такой, что $eR_\varphi x$ для всех $x \in X$,*

(В) *существует $e \in X$ такой, что $r(e)$ делится на $r(x)$ и $u(e) \geqslant u(x)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Из (А) вытекает (Б). Если φ является левым сдвигом полугруппы S с единицей e и множеством элементов X, то для каждого $x \in X$ правый сдвиг g_x, определяемый элементом x, перестановочен с φ и на e принимает значение x, т. е., $eR_\varphi x$ для каждого $x \in X$.

(Б) влечет (В). Пусть $x \in X$ и пусть g такое перестановочное с φ преобразование, что $g(e) = x$. Тогда $g(\varphi^n(e)) = \varphi^n(x)$ для всех целых $n \geqslant 0$, слеследовательно, g отображает Z_e на Z_x. Если бы было $u(e) < u(x)$, то $\varphi^{u(e)}(e) \in Z_e$ и $g(\varphi^{u(e)}(e) = \varphi^{u(e)}(x) \notin Z_x$, что невозможно. Пусть $y \in Z_e$, и $g(y) = z \in Z_x$. Из $\varphi^{r(e)}(y) = y$ вытекает $\varphi^{r(e)}(z) = z$, значит, $r(e)$ делится на $r(x)$.

Из (В) вытекает (А). По существу надо построить при предположении (В) полугруппу с единицей такую, чтобы φ было ее сдвигом.

Фиксируем e такой, что $r(e)$ делится на $r(x)$ и $u(e) \geqslant u(x)$ для всех $x \in X$. Дальше, для $x,\ y \in X$ пусть означает:

(1) $p(x,\ y)$ — наименьшее $n \geqslant 0$ такое, что $\varphi^{u(x)+n}(x) = \varphi^{u(y)}(y)$, если $xE_\varphi y$. Заметим, что для $y = \varphi^s(x)$ будет $p(x,\ y) = 0$, если $s \leqslant u(x)$, и $p(x,\ y) = res_{r(x)}(s - u(x))$, где $res_{r(x)}(m)$ — наименьший неотрицательный остаток при делении m на $r(x)$, если $s > u(x)$.

(2) T_x — множество всех $t \in E_\varphi(x) \backslash Z_x$ таких, что $p(x,\ t) = 0$.

(3) $d(x,\ y) = u(x) - u(y)$.

(4) $L_k = \{t : t \in T_e,\ \varphi^k(t) = \varphi^{u(e)}(e)\}$ для $k = 1,\ \ldots,\ u(e)$. Эти множества образуют разложение на T_e, и, кроме того, имеет место $\varphi(L_k) = L_{k-1}$ для всех k, $1 < k \leqslant u(e)$.

(5) P — частичный порядок на T_e такой, что

а) все L_k, $k = 1,\ \ldots,\ u(e)$, упорядочены по P линейно,

б) если $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in T_e$ и xPy, то $\varphi(x)P\varphi(y)$.

в) все элементы $\varphi^k(e)$, $k = 0,\ \ldots,\ u(e) - 1$, являются минимальными по P.

Порядок P можно построить по индукции следующим образом:

(I) На множестве L_1 определим P как произвольный линейный порядок с наименьшим элементом $\varphi^{u(e)-1}(e)$.

(II) Пусть P уже построен на множестве L_k, $1 \leqslant k < u(e)$.

Для $t,\ t' \in L_{k+1}$ таких, что $\varphi(t) \neq \varphi(t')$, положим tPt' в том и только в том случае, если $\varphi(t)P\varphi(t')$. На множествах вида $\varphi^{-1}[\varphi(t)]$, $t \in L_{k+1}$, $\varphi(t) \neq \varphi^{u(e)-k}(e)$ определяем P как произвольный линейный порядок, на множестве $\varphi^{-1}[\varphi^{u(e)-k}(e)]$ как линейный порядок с наименьшим элементом $\varphi^{u(e)-(k+1)}(e)$.

Очевидно, а) и б) удовлетворяются. в) можно доказать по индукции, опираясь на тот факт, что t и s несравнимы по P, если $t \in L_i$, $s \in L_j$, $L_i \neq L_j$.

(6) A_x — множество $t \in T_e$ таких, что или $u(t) \geqslant u(x)$ и $\varphi^{d(t,\,x)}(t)Px$, или $u(t) < u(x)$ и $tP\varphi^{d(x,\,t)}(x)$.

(7) $\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{для } t \in Z_t \\ t & \text{для } t \notin Z_t. \end{cases}$

Требуемую полугруппу зададим в виде F и G ее левых и правых сдвигов. Положим

для $x \in T_e$
$$f_x(t) = g_x(t) = \begin{cases} \varphi^{d(e,\,t)}(x), & t \in A_x, \\ \varphi^{d(e,\,x)}(t), & t \in E_\varphi(e) \backslash A_x, \end{cases}$$
$$f_x(t) = \varphi^{d(e,\,x)}(t),\ g_x(t) = t \text{ для } t \in X \backslash E_\varphi(e),$$

для $x \in E_\varphi(e) \backslash T_e$
$$f_x(t) = g_x(t) = \begin{cases} \varphi^{d(e,\,t)}(x), & t \in T_e, \\ \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,t)}(x)), & t \in E_\varphi(e) \backslash T_e, \end{cases}$$
$$f_x(t) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)}(t)),\ g_x(t) = t \text{ для } t \in X \backslash E_\varphi(e),$$

для $x \in X \backslash E_\varphi(e)$

$$f_x(t) = x \text{ для } t \in X,\ g_x(t) = \begin{cases} \varphi^{d(e,t)}(x),\ t \in T_e, \\ \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(x)), \quad t \in E_\varphi(e)\backslash T_e, \\ t,\ t \in X\backslash E_\varphi(e). \end{cases}$$

Так как $f_x(e) = g_x(e) = x$ для всех $x \in X$, системы $F = \{f_x\}_{x\in X}$ и $G = \{g_x\}_{x\in X}$ удовлетворяют условию а) леммы 1, при этом $\varphi = f_{\varphi(e)}$.

Доказательство будет завершено, если мы покажем, что преобразования $f_x \in F$ перестановочны с преобразованиями $g_y \in G$. Поскольку эти преобразования определяются частично, проверка перестановочности распадается на несколько случаев:

(I) $x,\ y \in T_e$, (II) $x \in T_e$, $y \in E_\varphi(e)\backslash T_e$, (III) $x,\ y \in E_\varphi(e)\backslash T_e$, (IV) $x \in T_e$, $y \in X\backslash E_\varphi(e)$, (V) $x \in E_\varphi(e)\backslash T_e$, $y \in X\backslash E_\varphi(e)$, (VI) $x,\ y \in X\backslash E_\varphi(e)$, (VII) $x \in E_\varphi(e)\backslash T_e$, $y \in T_e$, (VIII) $x \in X\backslash E_\varphi(e)$, $y \in T_e$, (IX) $x \in X\backslash E_\varphi(e)$, $y \in E_\varphi(e)\backslash T_e$.

Случаи (VI), (VIII), (IX) не надо детально рассматривать, так как f_x постоянная, принимающая значение в $X\backslash E_\varphi(e)$, и g_y на $X\backslash E_\varphi(e)$ тождественно. Далее заметим, что для любых $x,\ y \in X$ преобразования f_x и g_y отображают $X\backslash E_\varphi(e)$ в себя, причем g_y на $X\backslash E_\varphi(e)$ тождественное. По этим соображениям тривиальна проверка (I)—(IX) для $t \in X\backslash E_\varphi(e)$. Более того, преобразование f_x совпадает с g_x на главной компоненте $E_\varphi(e)$, тем самым (VII) сводится к (II).

Проверим сейчас по очереди случаи (I) — (V) для $t \in E_\varphi(e)$. (I) Пусть $x,\ y \in T_e$. Можно показать, что или $A_x \subset A_y$, или $A_y \subset A_x$, (множества $(A_x)_{x\in T_e}$ составляют монотонную систему), более точно, если например $u(x) \geqslant u(y)$, то из $\varphi^{d(x,y)}(x)\,Py$ следвет $A_x \subset A_y$, и из $yP\varphi^{d(x,y)}(x)$, $y \neq \varphi^{d(x,y)}(x)$ следует $A_y \subset A_x$. Так как f_x совпадает с g_y на $E_\varphi(e)$, (I) достаточно проверить при дополнительном предположении $A_x \subset A_y$.

(1) Для $t \in A_x$ имеем $g_y(t) = \varphi^{d(e,t)}(y) = \tau$. Элемент τ либо принадлежит, либо не принадлежит множеству A_x. Рассмотрим подробнее случай $\tau \in A_x$:

а) Если $u(\tau) \leqslant u(x)$, то $\tau = \varphi^{d(x,\tau)}(x)$. Действительно, если предположить $\tau \neq \varphi^{d(x,\tau)}(x)$, то $\tau P\varphi^{d(x,\tau)}(x)$(иначе τ на принадлежало бы A_x). Если $d(e,t) \geqslant d(x,\tau)$, то $\varphi^{d(e,t)-d(x,\tau)}(y)Px$, причем $\varphi^{d(e,t)-d(x,t)}(y) \neq x$, т. е. $x \notin A_y$. Если $d(e,\ t) < d(x,\ \tau)$, то $yP\varphi^{d(x,\tau)-d(e,t)}(x)$, $y \neq \varphi^{d(x,\tau)-d(e,t)}(x)$, и опять получаем $x \notin A_y$ в противоречие к предположению $A_x \subset A_y$.

б) Если $u(\tau) > u(x)$, то $\varphi^{d(\tau,x)}(\tau) = x$. Иначе из $\varphi^{d(\tau,x)}(\tau)Px$, $\varphi^{d(\tau,x)}(\tau) \neq x$ вытекает $\varphi^{d(e,t)+d(\tau,x)}(y)Px$, $\varphi^{d(e,t)+d(\tau,x)}(y) \neq x$, т. е. $x \notin A_y$.

Сейчас приступим, предполагая $\tau \in A_x$, к вычислению $f_x(\tau)$. По определению $f_x(\tau) = \varphi^{d(e,\tau)}(x)$; в случае а) $d(e,\tau) = d(e,x) + d(x,\tau)$, и $f_x(\tau) = \varphi^{d(e,x)+d(x,\tau)}(x) = \varphi^{d(e,x)}(\varphi^{d(x,\tau)}(x)) = \varphi^{d(e,x)}(\tau) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$ в случае б) $f_x(\tau) = \varphi^{d(e,\tau)}(x) =$

$= \varphi^{d(e,x)-d(\tau,x)}(x) = \varphi^{d(e,x)}(\tau) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$ (заметим, что $d(e, x) \geqslant d(\tau, x)$). Для $\tau \notin A_x$ получаем автоматически

$$f_x(\tau) = \varphi^{d(e,x)}(\tau) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y).$$

Итак, для $t \in A_x$ имеем $f_x(g_y(t)) = \varphi(y)^{d(e,x)+d(e,t)}$.

Займемся сейчас вычислением $g_y(f_x(t))$. В случае $\tau = f_x(t) = \varphi^{d(e,t)}(x) \in \in A_y$ имеем $g_y(\tau) = \varphi^{d(e,\tau)}(y) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$, так как $d(e, \tau) = d(e, x) + + d(e, t)$. Для того, чтобы $\tau \notin A_y$, необходимо $d(e, t) \geqslant u(x)$, т. е. $\tau \in Z_e$. Но тогда $\tau = \varphi^{d(y,x)+d(e,t)}(y)$, и $g_y(\tau) = \varphi^{d(e,y)}(\tau) = \varphi^{d(e,y)+d(y,x)+d(e,t)}(y) = = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$. Таким образом $g_y(f_x(t)) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$.

(2) Для $t \in A_y \backslash A_x$ вычисление $f_x(g_y(t)) = \varphi^{d(e,t)+d(e,x)}(y)$ в точности совпадает с аналогичным вычислением в случае (1).

Если $\tau = \varphi^{d(e,x)}(t) \in A_y$, то $g_y(\tau) = \varphi^{d(e,\tau)}(y) = \varphi^{d(e,t)+d(e,x)}(y)$, поскольку $d(e, \tau) = d(e, t) + d(e, x)$.

Если $\tau \notin A_y$, то $\tau \in Z_e$ и $\tau = \varphi^{d(y,t)+d(e,x)}(y)$. По определению $g_y(\tau) = = \varphi^{d(e,y)}(\tau) = \varphi^{d(e,y)+d(y,t)+d(e,x)}(y) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$.

(3) Для $t \in E_\varphi(e)\backslash A_y$ $f_x(g_y(t)) = \varphi^{d(e,x)+d(e,y)}(t) = g_y(f_x(t))$.

(II) Пусть $x \in T_e$, $y \in E_\varphi(e)\backslash T_e$, тогда

(1) для $t \in A_x$ $f_x(g_y(t)) = \varphi^{d(e,x)}(g_y(t))$, так как $g_y(t) \notin A_x$, т. е.

$$f_x(g_y(t)) = \varphi^{d(e,x)}(\varphi^{d(e,t)}(y)) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y).$$

Далее, $g_y(f_x(t)) = g_y(\tau)$, $\tau = \varphi^{d(e,t)}(x)$.

Если $\tau \in T_e$, то $g_y(\tau) = \varphi^{d(e,\tau)}(y)$, но $d(e, \tau) = d(e, t) + d(e, x)$, т. е.

$$g_y(f_x(t)) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y).$$

Если $\tau \notin T_e$, то $\tau \in Z_e$ и $u(\tau) = 0$, поэтому $g_y(\tau) = \varphi^{u(e)+p(e,\tau)}(y)$, $p(e, \tau) = res_{r(e)}(d(e, t) - u(x))$и, так как $\varphi^{u(e)}(y) \in Z_e$, $d(e, t) - u(x) \geqslant 0$, получаем $g_y(\tau) = \varphi^{u(e)+d(e,t)-u(x)}(y) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$.

(2) Для $t \in T_e \backslash A_x$ опять $f_x(g_y(t)) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$, далее, $g_y(f_x(t)) = g_y(\tau)$, $\tau = \varphi^{d(e,x)}(t)$.

Если $\tau \in T_e$, то $g_y(\tau) = \varphi^{d(e,\tau)}(y) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$, если $\tau \notin T_e$, то $u(\tau) = 0$, $d(e, x) - u(t) \geqslant 0$, $g_y(\tau) = \varphi^{u(e)+p(e,\tau)}(y) = \varphi^{u(e)+res_{r(e)}(d(e,x)-u(t))}(y) = = \varphi^{u(e)+d(e,x)-u(t)}(y) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$

(3) Для

$$t \in E_\varphi(e)\backslash T_e \; f_x(g_y(t)) = \varphi^{d(e,x)}(\psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(y))) = \psi^{d(e,x)-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(y)).$$

$$g_y(f_x(t) = g_y(\tau), \; \tau = \varphi^{d(e,x)}(t) \in E_\varphi(e)\backslash T_e, \; g_y(\tau) = \psi^{-u(\tau)}(\varphi^{u(e)+p(e,\tau)}(y));$$

если,

$$d(e, x) \leqslant u(t), \text{ то } u(\tau) = u(t) - d(e, x), \; p(e, \tau) =$$

$$= p(e,\ t),\ g_y(\tau) = \psi^{d(e,\ x)-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\ t)}(y)),$$

если, $d(e,\ x) > u(t)$, то $u(\tau) = 0,\ p(e,\ \tau) = res_{r(e)}(p(e,\ t) + d\,(e,\ x) - u(t))$

$$g_y(\tau) = \varphi^{u(e)+res(p(e,\ t)+d(e,\ x)-u(t))}(y) = \varphi^{u(e)+p(e,\ t)+res(d(e,\ x)-u(t))}(y) =$$

$$= \psi^{d(e,\ x)-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\ t)}(y)).$$

(III) Пусть $x,\ y \in E_\varphi(e)\backslash T_e$, тогда

(1) для $t\in T_e$ $f_x(g_y(t)) = f_x(\tau),\ \tau = \varphi^{d(e,\ t)}(y)\in E_\varphi(e)\backslash T_e,\ f_x(\tau) = \psi^{-u(\tau)}(\varphi^{u(e)+p(e,\ \tau)}(x))$.

Если

$$d(e,\ t) \leqslant u(y),\ \text{то}\ u(\tau) = u(y) - d(e,\ t),\ p(e,\ \tau) =$$

$$= p(e,\ y),\ f_x(\tau) = \psi^{d(e,\ t)-u(y)}(\varphi^{u(e)+p(e,\ y)}(x)),$$

если $d(e,\ t) > u(y)$,то $u(\tau) = 0,\ p(e,\ \tau) = res_{r(e)}(p(e,\ y) + d(e,\ t) - u(y))$, и опять $f_x(\tau) = \psi^{d(e,\ t)-u(y)}(\varphi^{u(e)+p(e,\ y)}(x))$.

С другой стороны, из за симметрии предположений будет

$$g_y(f_x(t)) = \psi^{d(e,\ t)-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,\ x)}(y)).$$

Но

$$\varphi^{u(e)}(y) = \varphi^{u(x)+res(p(x,\ y)+d(e,\ y))}(x) = \varphi^{u(x)+p(x,\ y)+d(e,\ y)}(x),$$

поэтому

$$g_y(f_x(t)) = \psi^{d(e,\ t)-u(x)}(\varphi^{u(x)+p(x,\ y)+d(e,\ y)+p(e,\ x)}(x)) = \psi^{d(e,\ t)-u(x)}(\varphi^{u(x)+p(e,\ y)+d(e,\ y)}(x)) =$$

$$= \psi^{d(e,\ t)-u(x)-u(y)}(\varphi^{u(e)+u(x)+p(e,\ y)}(x)) = \psi^{d(e,\ t)-u(y)}(\varphi^{u(e)+p(e,\ y)}(x)).$$

(2) Для $t \in E_\varphi(e)\backslash T_e$, $f_x(g_y(t)) = f_x(\tau)$, $\tau = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\ t)}(y))$, $f_x(\tau) = \varphi^{u(e)+p(e,\ \tau)}(x)$, так как $u(\tau) = 0$;

$$p(e,\ \tau) = res_{r(e)}(p(e,\ y) + d(e,\ y) + p(e,\ t) - u(t))$$

$$f_x(\tau) = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\ y)+d(e,\ y)+p(e,\ t)}(x)).$$

Аналогично $g_y(f_x(t)) = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\ x)+d(e,\ x)+p(e,\ t)}(y))$, подставляя $\varphi^{u(e)}(y) = \varphi^{u(x)+p(x,\ y)+d(e,\ y)}(x))$.

$$g_y(f_x(t)) = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(x)+p(x,\ y)+d(e,\ y)+p(e,\ x)+d(e,\ x)+p(e,\ t)}(x)) =$$

$$= \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\ y)+d(e,\ y)+p(e,\ t)}(x)).$$

(IV) Пусть $x \in T_e,\ y \in X\backslash E_\varphi(e)$, тогда

(1) для $t \in A_x$, $f_x(g_y(t)) = f_x(\varphi^{d(e,\ t)}(y)) = \varphi^{d(e,\ x)+d(e,\ t)}(y)$,

$$g_y(f_x(t)) = g_y(\tau),\ \tau = \varphi^{d(e,\ t)}(x)$$

Если $\tau \in T_e$, то $g_y(\tau) = \varphi^{d(e,\tau)}(y) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$; если $\tau \notin T_e$, то $\tau \in Z_e$, $u(\tau) = 0$, $d(e, t) \geqslant u(x)$,

$$g_y(\tau) = \varphi^{u(e)+p(e,\tau)}(y),\ p(e, \tau) = res_{r(e)}(d(e, t) - u(x))$$

и так как $\varphi^{u(e)}(y) \in Z_y$, $d(e, t) - u(x) \geqslant 0$ и $r(e)$ делится на $r(y)$, то

$$g_y(\tau) = \varphi^{u(e)+d(e,t)-u(x)}(y) = \varphi^{d(e,t)+d(e,x)}(y).$$

(2) Для $t \in T_e \backslash A_x$, $f_x(g_y(t)) = f_x(\varphi^{d(e,t)}(y)) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$,

$$g_y(f_x(t)) = g_y(\tau),\ \tau = \varphi^{d(e,x)}(t).$$

Если $\tau \in T_e$, то $g_y(\tau) = \varphi^{d(e,\tau)}(y) = \varphi^{d(e,x)+d(e,t)}(y)$, если $\tau \notin T_e$, то $u(\tau) = 0$, $p(e, \tau) = res_{r(e)}(d(e, x) - u(t))$, $d(e, x) - u(t) = d(e, t) - u(x)$, дальше как в случае (1).

(3) Для $t \in E_\varphi(e) \backslash T_e$, $f_x(g_y(t)) = f_x(\psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(y))) = \psi^{d(e,x)-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(y))$, $g_y(f_x(t)) = g_y(\tau)$, $\tau = \varphi^{d(e,x)}(t) \in E_\varphi(e) \backslash T_e$.

Если $d(e, x) \leqslant u(t)$, то $u(\tau) = u(t) - d(e, x)$, $p(e, \tau) = p(e, t)$,

$$g_y(\tau) = \psi^{-u(\tau)}(\varphi^{u(e)+p(e,\tau)}(y)) = \psi^{d(e,x)-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(y));$$

если $d(e, x) > u(t)$, то $u(\tau) = 0$, $p(e, \tau) = res_{r(e)}(p(e, t) + d(e, x) - u(t))$, $g_y(\tau) = \varphi^{u(e)+p(e,t)+d(e,x)-u(t)}(y) = \psi^{d(e,x)-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(y))$.

(V) Пусть $x \in E_\varphi(e) \backslash T_e$, $y \in X \backslash E_\varphi(e)$, тогда

(1) для $t \in T_e$, $f_x(g_y(t)) = f_x(\tau)$, $\tau = \varphi^{d(e,t)}(y) \notin E_\varphi(e)$, $f_x(\tau) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,x)}(\tau)) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,x)+d(e,t)}(y))$;

$$g_y(f_x(t)) = g_y(\tau),\ \tau = \varphi^{d(e,t)}(x) \in E_\varphi(e) \backslash T_e,\ g_y(\tau) = \psi^{-u(\tau)}(\varphi^{u(e)+p(e,\tau)}(y)).$$

Если $d(e, t) \leqslant u(x)$, то $u(\tau) = u(x) - d(e, t)$, $p(e, \tau) = p(e, x)$,

$$f_y(\tau) = \psi^{d(e,t)-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,x)}(y)) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,x)+d(e,t)}(y));$$

если $d(e, t) > u(x)$, то $u(\tau) = 0$, $p(e, \tau) = res_{r(e)}(p(e, x) + d(e, t) - u(x))$, и в силу того, что $r(e)$ делится на $r(y)$

$$g_y(\tau) = \varphi^{u(e)+res(p(e,x)+d(e,t)-u(x))}(y) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,x)+d(e,t)}(y)).$$

(2) Для $t \in E_\varphi(e) \backslash T_e$ имеет место $f_x(g_y(t)) = f_x(\tau)$, $\tau = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(y)) \notin E_\varphi(e)$

$$f_x(\tau) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,x)}(\tau)) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,x)}(\psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(y)))) =$$

$$= \varphi^{d(e,x)+p(e,x)}(\psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(y))) = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,x)+d(e,x)+p(e,t)}(y)),$$

$$g_y(f_x(t)) = g_y(\tau),\ \tau = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(x)) \in Z_e,\ u(\tau) = 0,$$

$$g_y(\tau) = \varphi^{u(e)+p(e,\tau)}(y),\ p(e, \tau) = res_{r(e)}(p(e, x) + d(e, x) + p(e, t) - u(t)),$$

$$g_y(\tau) = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,x)+d(e,x)+p(e,t)}(y)).$$

Тем самым, теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть φ — периодическое преобразование множества X. Следующие три утверждения эквивалентны:*

($А_K$) *φ является сдвигом коммутативной полугруппы с единицей,*

($Б_K$) *существуют e и e' такие, что $eR_\varphi x$ и xRe' для всех $x \in X$,*

($В_K$) *существуют e и e' такие, что $u(e') = 0$ и $r(e)$ делится на $r(x)$, $r(x)$ делится на $r(e')$ и $u(e) \geqslant u(x)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. ($А_K$) влечет ($Б_K$). Пусть φ является сдвигом коммутативной полугруппы S с единицей e и множеством элементов X. В силу теоремы 1 имеет место $eR_\varphi x$ для всех $x \in X$. Фиксируем дальше произвольный элемент $e' \in X$ такой, что $u(e') = 0$, $r(e') \leqslant r(x)$ для всех $x \in X$. Пусть $x \in X$ произвольный элемент, и пусть $f_{e'}$, f_x сдвиги соответствующие элементам e' и x. Так как S коммутативна, имеет место $f_{e'}(x) = f_x(e')$. Обозначим $b = f_x(e')$. Из перестановочности f_x с φ следует, что $u(b) \leqslant u(e')$ и $r(e')$ делится на $r(b)$ (см. вторую часть доказательства теоремы 1). В силу выбора элемента e' имеет место $u(b) = 0$, $r(b) = r(e')$. Определим сейчас преобразование g множества X, полагая $g(t) = t$ для $t \in X \backslash E_\varphi(b)$, $g(t) = \varphi^{u(e)\,.\,r(a)+k-u(t)}(e')$, если $\varphi^{u(t)}(t) = \varphi^k(b)$. Отметим, что, благодаря $R = u(e)\,.\,r(a)$, показатель степени будет всегда неотрицательным. Покажем, что g перестановочно с φ:

Для $t \in X \backslash E_\varphi(b)$ это очевидно. Пусть $t \in E_\varphi(b)$, и пусть $u(t) > 0$, $\varphi^{u(t)}(t) = \varphi^k(b)$. Тогда для $y = \varphi(t)$ имеет место $u(y) = u(t) - 1$, и, $\varphi^{u(y)}(y) = \varphi^{u(t)-1}(\varphi(t)) = \varphi^{u(t)}(t) = \varphi^k(b)$. Следовательно,

$$g(\varphi(t)) = g(y) = \varphi^{R+k-u(t)+1}(e') = \varphi(g(t)).$$

Пусть $t \in E_\varphi(b)$, $u(t) = 0$, т. е. $\varphi^{u(t)}(t) = t = \varphi^k(b)$.

Тогда $\varphi(t) = \varphi^{k+1}(b)$, и, по определению g,

$$g(\varphi(t)) = \varphi^{R+k+1}(e') = \varphi(\varphi^{R+k}(e')) = \varphi(g(t)).$$

Таким образом, сложное преобразование $h = g \circ f_{e'}$ перестановочно с φ. Используя равенство $f_{e'}(x) = f_x(e') = b$, мы получаем $h(x) = g(f_{e'}(x)) = g(b) = \varphi^R(e') = e'$, т. е. $xR_\varphi e'$.

($Б_K$) влечет ($В_K$). По соображениям аналогичным доказательству импликации (Б) $\Rightarrow$ (В) теоремы 1.

($В_K$) влечет ($А_K$). В силу леммы 1 достаточно построить такую систему F взаимно перестановочных преобразований, чтобы $F(e) = X$. Из каждой компоненты $E_\varphi(x)$ выберем один элемент $e(x)$ такой, что $u(e(x)) =$

$= \max\{u(t) : t \in E_\varphi(x)\}$. Фиксируя e и e', подчиненные условию (B_K) теоремы 2, полагаем, сохраняя прежние обозначения, для $x \in T_e$

$$f_x(t) = \begin{cases} \varphi^{d(e,\,t)}(x), & t \in A_x, \\ \varphi^{d(e,\,x)}(t), & t \in X \backslash A_x, \end{cases}$$

для $x \in E_\varphi(e) \backslash T_e$

$$f_x(t) = \begin{cases} \varphi^{d(e,\,t)}(x), & t \in T_e, \\ \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,t)}(x)), & t \in E_\varphi(e) \backslash T_e, \\ \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)}(t)), & t \in X \backslash E_\varphi(e), \end{cases}$$

для $x \in X \backslash E_\varphi(e)$

$$f_x(t) = \begin{cases} \varphi^{d(e,\,t)}(x), & t \in T_e, \\ \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,t)}(x)), & t \in E_\varphi(e) \backslash T_e, \\ \varphi^{p(e(x),\,x)+d(e(x),\,x)+p(e(t),\,t)+d(e(t),\,t)}(e'), & t \in X \backslash E_\varphi(e). \end{cases}$$

Видно, что $f_x(e) = x$ для любого $x \in X$, притом преобразование φ совпадает с $f_{\varphi(e)}$. Проверка перестановочности непосредственна, рассмотрим опять по очереди четыре случая:

(I) Если $x, y \in E_\varphi(e)$, то f_x, f_y перестановочны, как вытекает из сравнения с конструкцией 1 в некоммутативном случае.

(II) Если $x \in T_e$, $y \in X \backslash E_\varphi(e)$, то

(1) для $t \in A_x$ $f_x(f_y(t)) = f_x(\tau)$, $\tau = \varphi^{d(e,\,t)}(y) \in X \backslash E_\varphi(e)$, поэтому $f_x(\tau) = \varphi^{d(e,\,x)}(\tau) = \varphi^{d(e,\,t)+d(e,\,x)}(y)$, с другой стороны,

$$f_y(f_x(t)) = f_y(\tau), \ \tau = \varphi^{d(e,\,t)}(x);$$

если $\tau \in T_e$, то $f_y(\tau) = \varphi^{d(e,\,\tau)}(y) = \varphi^{d(e,\,t)+d(e,\,x)}(y)$; если $\tau \notin T_e$, то $\tau \in Z_e$ и $f_y(\tau) = \psi^{-u(\tau)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,\tau)}(y))$, но

$$u(\tau) = 0, \ p(e, \tau) = res_{r(e)}(d(e, t) - u(x)), \ d(e, t) \geqslant u(x),$$

поэтому $f_y(\tau) = \varphi^{u(e)+d(e,\,t)-u(x)}(y) = \varphi^{d(e,\,t)+d(e,\,x)}(y)$.

(2) Для $t \in T_e \backslash A_x$, $f_x(f_y(t)) = f_x(\varphi^{d(e,\,t)}(y)) = \varphi^{d(e,\,t)+d(e,\,x)}(y)$,

$$f_y(f_x(t)) = f_y(\tau), \quad \tau = \varphi^{d(e,\,x)}(t);$$

если $\tau \in T_e$, то $f_y(\tau) = \varphi^{d(e,\,\tau)}(y) = \varphi^{d(e,\,t)+d(e,\,x)}(y)$; если $\tau \notin T_e$, то $\tau \in Z_e$, и $f_y(\tau) = \psi^{-u(\tau)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,\tau)}(y))$, но $u(\tau) = 0$ и $p(e, \tau) = res_{r(e)}(d(e, x) - u(t))$, причем $d(e, x) - u(t) = d(e, t) - u(x) \geqslant 0$ и $r(e)$ делится на $r(y)$, следовательно, $f_y(\tau) = \varphi^{d(e,\,t)+d(e,\,x)}(y)$.

(3) Для $t \in E_\varphi(e) \backslash T_e$ имеет место $f_x(f_y(t)) = f_x(\tau)$, $\tau = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,t)}(y)) \in X \backslash E_\varphi(e)$, $f_x(\tau) = \varphi^{d(e,\,x)}(\tau) = \psi^{d(e,\,x)-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,t)}(y))$,

$$f_y(f_x(t)) = f_y(\tau), \ \tau = \varphi^{d(e,\,x)}(t) \in E_\varphi(e) \backslash T_e, \ f_y(\tau) = \psi^{-u(\tau)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,\tau)}(y));$$

если $d(e, x) < u(t)$, то $u(\tau) = u(t) - d(e, x)$, $p(e, \tau) = p(e, t)$,

$$f_y(\tau) = \psi^{d(e,\,x)-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,t)}(y)),$$

если $d(e,\,x) \geqslant u(t)$, то $u(\tau) = 0$, $p(e,\,\tau) = res_{r(e)}(p(e,\,t) + d(e,\,x) - u(t))$,
$f_y(\tau) = \varphi^{u(e)+p(e,\,t)+d(e,\,x)-u(t)}(y) = \psi^{d(e,\,x)-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,t)}(y))$.

(4) Для $t \in X \backslash E_\varphi(e)$ будет $f_x(f_y(t)) = \varphi^{p(e(y),\,y)+d(e(y),\,y)+p(e(t),\,t)+d(e(t),\,t)+d(e,\,x)}(e')$,
$f_y(f_x(t)) = f_y(\tau)$, $\tau = \varphi^{d(e,\,x)}(t)$;
если $d(e,\,x) \leqslant u(t)$, то $p(e(\tau),\,\tau)) = p(e(t),\,t)$, $d(e(\tau),\tau) = d(e(t),t) + d(e,\,x)$,
$f_y(f_x(t)) = f_x(f_y(t))$,
если $d(e,\,x) > u(t)$, то

$d(e(\tau),\tau) = u(e(t))$, $p(e(\tau),\tau) = res_{r(t)}(p(e(t),t) + d(e,\,x) - u(t))$,

$$f_y(f_x(t)) = f_x(f_y(t)).$$

(III) Если $x \in E_\varphi(e) \backslash T_e$, $y \in X \backslash E_\varphi(e)$, то
(1) для $t \in T_e$ получаем $f_x(f_y(t)) = f_x(\tau)$, $\tau = \varphi^{d(e,\,t)}(y) \in X \backslash E_\varphi(e)$,

$$f_x(\tau) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)}(\tau)) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)+d(e,\,t)}(y)),$$

$$f_y(f_x(t)) = f_y(\tau),\ \tau = \varphi^{d(e,\,t)}(x) \in E_\varphi(e) \backslash T_e,\ f_y(\tau) = \psi^{-u(\tau)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,\tau)}(y));$$

если $d(e,\,t) \leqslant u(x)$, то $u(\tau) = u(x) - d(e,\,t)\, p(e,\,\tau) = p(e,\,x)$,
и $f_y(\tau) = \psi^{d(e,\,t)-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)}(y)) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)+d(e,\,t)}(y))$;
если $d(e,\,t) > u(x)$, то $u(\tau) = 0$ и $p(e,\,\tau) = res_{r(e)}(p(e,\,x) + d(e,\,t) - u(x))$,

$$f_y(\tau) = \varphi^{u(e)+p(e,\,x)+d(e,\,t)+res(-u(x))}(y) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)+d(e,\,t)}(y)).$$

(2) Для $t \in E_\varphi(e) \backslash T_e$, $f_x(f_y(t)) = f_x(\tau)$, $\tau = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,t)}(y)) \in X \backslash E_\varphi(e)$,

$$f_x(\tau) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)}(\tau)) = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)}(\psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,t)}(y))) =$$
$$= \varphi^{d(e,\,x)+p(e,\,x)}(\psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,t)}(y)) = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)+d(e,\,x)+p(e,\,t)}(y))),$$

$f_y(f_x(t)) = f_y(\tau), \tau = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,t)}(x)) \in E_\varphi(e) \backslash T_e, f_y(\tau) = \psi^{-u(\tau)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,\tau)}(y))$,

$$u(\tau) = 0,\ p(e,\,\tau) = res_{r(e)}(p(e,\,x) + d(e,\,x) + p(e,\,t) - u(t)),$$

$$f_y(\tau) = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)+d(e,\,x)+p(e,\,t)}(y)).$$

(3) Для $t \in X \backslash E_\varphi(e)$

$$f_x(f_y(t)) = \varphi^{p(e(y),\,y)+d(e(y),\,y)+p(e(t),\,t)+d(e(t),\,t)+p(e,\,x)+d(e,\,x)}(e'),$$

$$f_y(f_x(t)) = f_y(\tau),\ \tau = \psi^{-u(x)}(\varphi^{u(e)+p(e,\,x)}(t)) \in X \backslash E_\varphi(e),$$

$$f_y(\tau) = \varphi^{p(e(y),\,y)+d(e(y),\,y)+p(e(\tau),\,\tau)+d(e(\tau),\,\tau)}(e'),$$

$$d(e(\tau),\tau) = u(e(t)),\quad p(e(\tau),\tau) = res_{r(t)}(p(e(t),t) + p(e,x) + d(e,x) - u(t)),$$

и так как $r(t)$ делится на $r(e')$, то $f_y(f_x(t)) = f_x(f_y(t))$.

(IV) Если $x, y \in X \setminus E_\varphi(e)$, то

(1) для $t \in T_e$ $f_x(f_y(t)) = f_x(\tau)$, $\tau = \varphi^{d(e,t)}(y) \in X \setminus E_\varphi(e)$,

$$f_x(\tau) = \varphi^{p(e(x),x)+d(e(x),x)+p(e(\tau),\tau)+d(e(\tau),\tau)}(e'),$$

$$p(e(\tau),\tau) = p(e(y),\tau),\ d(e(\tau),\tau) = d(e(y),\tau).$$

Если $d(e, t) \leqslant u(y)$, то $p(e(y), \tau) = p(e(y),y)$, $d(e(y),\tau) = d(e(y),y) + d(e,t)$,

$$f_x(\tau) = \varphi^{p(e(x),x)+d(e(x),x)+p(e(y),y)+d(e(y),y)+d(e,t)}(e'),$$

если $d(e,t) > u(y)$, то $d(e(y),\tau) = u(e(y))$, $p(e(y),\tau) = res_{r(y)}(p(e(y),y) + d(e,t) - u(y))$, и так как $r(y)$ делится на $r(e')$ и $d(e, t) - u(y) > 0$,

$$f_x(\tau) = \varphi^{p(e(x),x)+d(e(x),x)+p(e(y),y)+d(e(y),)y+d(e,t)}(e').$$

Из за симметрии предпосылок и результата относительно x, y, мы получаем то же самое значение и для $f_y(f_x(t))$.

(2) Для $t \in E_\varphi(e) \setminus T_e$ $f_x(f_y(t)) = f_x(\tau)$, $\tau = \psi^{-u(t)}(\varphi^{u(e)+p(e,t)}(y)) \in X \setminus E_\varphi(e)$,

$$f_x(\tau) = \varphi^{p(e(x),x)+d(e(x),x)+p(e(\tau),\tau)+d(e(\tau),\tau)}(e'),$$

$u(\tau) = 0$, поэтому $d(e(\tau),\tau) = d(e(y),\tau) = u(e(y))$, $p(e(\tau),\tau) = p(e(y),\tau) = res_{r(y)}(p(e(y),y) + p(e, t) + d(e, t) - u(y))$,

$$f_x(\tau) = \varphi^{p(e(x),x)+d(e(x),x)+p(e(y),y)+d(e(y),y)+p(e,t)+d(e,t)}(e')$$

и то же самое получаем для $f_y(f_x(t))$ по соображениям приведенным выше.

(3) Для $t \in X \setminus E_\varphi(e)$

$$f_x(f_y(t)) = f_x(\tau),\ \tau = \varphi^{p(e(y),y)+d(e(y),y)+p(e(t),t)+d(e(t),t)}(e'),$$

$$f_x(\tau) = \varphi^{p(e(x),x)+d(e(x),x)+p(e(\tau),\tau)+d(e(\tau),\tau)}(e') =$$

$$= \varphi^{p(e(x),x)+d(e(x),x)+p(e(y),y)+d(e(y),y)+p(e(t),t)+d(e(t),t)+u(e(e'))+p(e(e'),e')}(e'),$$

и то же самое для $f_y(f_x(t))$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть φ — связное периодическое преобразование множества X. Следующие три утверждения эквивалентны:*

(а) *φ является сдвигом некоторой полугруппы с единицей,*

(б) *φ является сдвигом коммутативной полугруппы с единицей,*

(в) *существует $n \geqslant 0$ такое, что $u(x) \leqslant n$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. (а) влечет (в), так как, по теореме 1, уровень $u(e)$ единицы ограничивает все остальные уровни $u(x)$, $x \in X$. (в) влечет (б). Для этого достаточно зафиксировать элемент e такой, что $u(e) = \max \{u(x) : x \in X\}$, и проверить условие ($B_K$) теоремы 2 для этого элемента e и элемента $e' = \varphi^{u(e)}(e)$. (б) влечет (а) очевидным образом.

Следствие 2. *Всякое преобразование φ конечного множества X, состоящего из n элементов, содержится в коммутативной полугруппе преобразований F, состоящей по крайней мере из n преобразований.*

Доказательство. а) Пусть сначала φ связно. В силу конечности X φ периодично и все уровни $u(x)$ по φ ограничены. Таким образом, φ включается, по следствию 1 теоремы 2, в полугруппу всех сдвигов некоторой коммутативной полугруппы $(X, .)$, число элементов которой равно n.

Предположим, что φ несвязно. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ компоненты φ, числа элементов которых соответственно равны $k_1, \ldots, k_m$. Из связности $\varphi | X_i$, $i = 1, \ldots, m$, и из а) вытекает существование G_i — коммутативных полугрупп преобразований множеств X_i, содержащих $\varphi | X_i$ и обладающих k_i преобразованиями.

Пусть G состоит из всех преобразований множества X таких, что $f | X_i \in G_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Легко проверяется, что G является коммутативной полугруппой обладающей $\prod_{i=1}^{m} k_i$ преобразованиями и содержащей φ.

Если $k_i \geqslant 2$ для всех $i = 1, \ldots, m$, то $\prod_1^m k_i \geqslant \sum_1^m k_i = n$ и G можно принять в качестве F.

Если некоторые компоненты φ, скажем $X_1, \ldots, X_q$, одноэлементные, т. е. $X_i = \{x_i\}$ для $i = 1, \ldots, q$, но $k_i \geqslant 2$ для $i = q+1, \ldots, m$, то к G прибавим еще полугруппу H всех постоянных вида $h_i(t) = x_i$ для всех $t \in X$, $i = 1, \ldots, q$. Для любого $g \in G$ и $t \in X$ имеет место

$$g(h_i(t)) = g(x_i) = g(\varphi(x_i)) = \varphi(g(x_i)) = \varphi(x_i) = x_i = h_i(g(t)),$$

т. е. $g \circ h_i = h_i \circ g = h_i$ для $i = 1, \ldots, q$. Следовательно, $F = G \cup H$ является коммутативной полугруппой преобразований. $\varphi \in F$. Так как φ несвязно и все f из G сохраняют компоненты X_i, $i = 1, \ldots, m$, т. е. также несвязны, G и H дизъюнктны, и, значит, число преобразований полугруппы F равно

$$q + \prod_1^m k_i = q + \prod_{q+1}^m k_i = \sum_1^q k_i + \prod_{q+1}^m k_i \geqslant \sum_1^q k_i + \sum_{q+1}^m k_i = n.$$

Этим следствием усиливается один результат из [1].

Если φ — периодическое преобразование множества X, и если множество уровней $\{u(x) : x \in X\}$ ограничено, то цикилическая часть Z_φ множества X является наибольшим множеством, которое отображается преобразованием φ на себя, притом φ обратимо на Z_φ и все компоненты $E_\varphi(x)$, $x \in X$, пересекаются с Z_φ. Это обстоятельство позволяет распространить формулировки теорем 1 и 2 на следующий класс преобразований:

Определение 6. *Пусть φ — произвольное преобразование множества X, пусть Q_φ наибольшее (в смысле включения) подмножество множества X такое, что $\varphi(Q_\varphi) = Q_\varphi$.*

Преобразование φ назовем квазипериодическим преобразованием, если а) *φ взаимно однозначно на Q_φ, и* б) *$E_\varphi(x) \cap Q_\varphi \neq \emptyset$ для всех $x \in X$.*

В силу б) можно определить уровень $v(x)$ над Q_φ для каждого $x \in X$ как $v(x) = \min \{n : \varphi^n(x) \in Q_\varphi\}$.

Теорема 3. *Пусть φ — квазипериодическое преобразование множества X. Следующие три утверждения эквивалентны*:

(А) *φ является сдвигом некоторой полугруппы с единицей,*

(Б) *существует $e \in X$ такой, что $eR_\varphi x$ для всех $x \in X$,*

(В) *существует $e \in X$ такой, что $r(e)$ делится на $r(x)$ и $v(e) \geqslant v(x)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. (А) влечет (Б). Пусть F, G — системы соответственно левых и правых сдвигов полугруппы S с единицей e и множеством элементов X, и пусть $\varphi \in F$. По лемме 1 имеет место $G(e) = X$ и все $g \in G$ перестановочны с φ. Утверждение (Б) следует.

(Б) влечет (В). Если g перестановочно с φ, то $\varphi(g(Q_\varphi)) = g(Q_\varphi)$, следовательно, в силу определения множества Q_φ, имеет место $g(Q_\varphi) \subset Q_\varphi$. Пусть $g(e) = x$. Тогда $\varphi^{v(e)}(x) = g(\varphi^{v(e)}(e)) \in Q_\varphi$, следовательно, $v(e) \geqslant$ $\geqslant v(x)$. Если $r(e) > 0$, то $\varphi^{v(e)+r(e)}(e) = \varphi^{v(e)}(e)$ влечет $\varphi^{v(e)+r(e)}(x) = \varphi^{v(e)}(x)$ следовательно, $r(x) > 0$ и $r(e)$ делится на $r(x)$. Если $r(e) = 0$, то $r(e)$ делистся тривиально на $r(x)$.

(В) влечет (А). Зафиксируем элемент e такой, что $v(e) \geqslant v(x)$ и $r(e)$ делится на $r(x)$ для всех $x \in X$. Если $r(e) > 0$, то также $r(x) > 0$, т. е. φ периодично, и тогда применима теорема 1.

Предполагая дальше, что $r(e) = 0$, введем следующие вспомогательные определения:

(1) Для $x \in E_\varphi(e)$ положим $p(x) = m - n$, если $\varphi^{v(e)+m}(e) = \varphi^{v(x)+n}(x)$.

(Если также $\varphi^{v(e)+m'}(e) = \varphi^{v(x)+n'}(x)$, причем, скажем, $m \geqslant m'$, то в силу $r(e) = 0$, равенства

$$\varphi^{v(x)+n}(x) = \varphi^{v(e)+m}(e) = \varphi^{m-m'}(\varphi^{v(e)+m'}(e)) = \varphi^{m-m'}(\varphi^{v(x)+n'}(x))$$

влекут $v(x) + n = m - m' + v(x) + n'$, т. е. $m - n = m' - n'$.)

(2) $T_e = \{t : t \in E_\varphi e,\ p(t) = 0,\ t \neq \varphi^{v(e)}(e)\}$.

(3) Для $x \in E_\varphi(e)$ положим $d(x) = v(e) - v(x)$.

(4) $L_k = \{t : t \in T_e, \varphi^k(t) = \varphi^{v(e)}(e)\}$ для $k = 1, \ldots, v(e)$.

(5) Частичный порядок P упорядочивает все L_k, $k = 1, \ldots, v(e)$, линейно, все элементы $\varphi^k(e)$, $k = 0, \ldots, v(e) - 1$, являются минимальными относительно P, и если $\varphi(x), \varphi(y) \in T_e$ и xPy, то $\varphi(x)P\varphi(x)$.

(6) Для $x \in T_e$ положим

$$A_x = \{t : u(t) \geqslant v(x) \Rightarrow \varphi^{v(t)-v(x)}(t)Px,\ u(t) < v(x) \Rightarrow tP\varphi^{v(x)-v(t)}(x)\}$$

(7) В силу условия а) определения 6, обратимо следующее преобразование ψ:

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in Q_\varphi, \\ t, & t \in X \setminus Q_\varphi. \end{cases}$$

Остается определить системы $F = \{f_x\}$ и $G = \{g_x\}$ сдвигов требуемой полугруппы. Положим

для $x \in T_e$

$$f_x(t) = \begin{cases} \varphi^{d(t)}(x), & t \in A_x, \\ \varphi^{d(x)}(t), & t \in X \setminus A_x, \end{cases} \qquad g_x(t) = \begin{cases} f_x(t), & t \in E_\varphi(e), \\ t, & t \in X \setminus E_\varphi(e); \end{cases}$$

для $x \in E_\varphi(e) \setminus T_e$

$$f_x(t) = \begin{cases} \varphi^{d(t)}(x), & t \in T_e, \\ \psi^{p(x)+d(x)-v(t)}(\varphi^{v(t)}(t)), & t \in X \setminus T_e, \end{cases} \qquad g_x(t) = \begin{cases} f_x(t), & t \in E_\varphi(e), \\ t, & t \in X \setminus E_\varphi(e); \end{cases}$$

для $x \in X \setminus E_\varphi(e)$

$$f_x(t) = x \text{ для всех } t \in X,\ g_x(t) = \begin{cases} \varphi^{d(t)}(x), & t \in T_e \\ \psi^{p(t)+d(t)-v(x)}(\varphi^{v(x)}(x)), & t \in E_\varphi(e) \setminus T_e, \\ t, & t \in X \setminus E_\varphi(e). \end{cases}$$

Почти непосредственно видно, что $\varphi = f_{\varphi(e)} \in F$ и $F(e) = G(e) = X$. Доказательство заканчивается проверкой условия б) леммы 1. В силу того, что эта проверка чисто механическая, и следует шаг за шагом выкладкам в доказательстве теоремы 1, считаем возможным ее опустить.

Что касается коммутативного случая, мы ограничимся, не доказывая этого, лишь замечанием, что формулировка теоремы 2 справедлива также для квазипероиодических преобразований.

Существенную роль при изучении структуры сдвигов играют „транзитивные" свойства полугруппы H_φ всех преобразований перестановочных с данным преобразованием φ. Свойство систем F и G, выраженное условием а) леммы 1, можно назвать их полутранзитивностью. Для того, чтобы периодическое или квазипериодическое преобразование φ было сдвигом некоторой полугруппы с единицей, оказалась не только необходимой, но и достаточной как раз полутранзитивность системы H_φ. Что касается технической стороны описания и построения коммутирующих преобразований, мы опирались на результаты из работы [2], где приведена, в частности, конструкция H_φ для произвольного преобразования φ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hedrlín Z., *On a number of commuting transformations*, Comment. math. Univ. carolinae *4* (1963), 132—136.
[2] Novotný M., *O jednom problému z theorie zobrazení*, Spisy vyd. Přírodověd. fak. Masarykovy univ., A7, *344* (1953), 53—64.
[3] Шайн Б. М., *О сдвигах в группах и полугруппах*, Волжский мат. сборник вып. 2, Куйбышев, 1964, 163—169.

Поступило 4. 10. 1965.

Katedra základních matematických disciplin
na matematicko-fysikální fakultě Karlovy university,
Praha