Matematicko-fyzikálny časopis

Václav Medek

O istom zobrazení komplexnej projektívnej roviny

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 9 (1959), No. 4, 211--221

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126464

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1959

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O ISTOM ZOBRAZENÍ KOMPLEXNEJ PROJEKTÍVNEJ ROVINY

VÁCLAV MEDEK, Bratislava

B. A. Rozenfeľd [1] udáva jednu možnosť interpretácie komplexného projektívneho priestoru $P_n(\mathrm{i})$ tak, že k bodom tohto priestoru priraďuje priamky reálneho projektívneho priestoru P_{2n+1}. A. P. Norden [2] sa zaoberá touto interpretáciou pre $n = 1$. Cieľom tejto práce je odvodiť niektoré základné pojmy a vzťahy tejto interpretácie pre $n = 2$.

1. Pod komplexnou projektívnou rovinou $P_2(\mathrm{i})$ budeme rozumieť množinu všetkých usporiadaných trojíc čísel $[x_1 + x_2\mathrm{i}, x_3 + x_4\mathrm{i}, x_5 + x_6\mathrm{i}]$[1]), kde aspoň jedno z reálnych čísel x_i je rôzne od nuly; pritom dve usporiadané trojice čísel $[x_1 + x_2\mathrm{i}, x_3 + x_4\mathrm{i}, x_5 + x_6\mathrm{i}]$, $[\varrho(x_1 + x_2\mathrm{i}), \varrho(x_3 + x_4\mathrm{i}), \varrho(x_5 + x_6\mathrm{i})]$, kde $\varrho = \lambda + \mu\mathrm{i} \neq 0$, budeme považovať za ekvivalentné. Tým sme rozdelili množinu všetkých usporiadaných trojíc do tried. Každú triedu nazveme bodom roviny $P_2(\mathrm{i})$, každú usporiadanú trojicu čísel z tejto triedy nazveme predstaviteľkou tohto bodu a každým takýmto trom usporiadaným číslam budeme hovoriť súradnice toho bodu.

Nech bod X je určený predstaviteľkou $[x_1 + x_2\mathrm{i}, x_3 + x_4\mathrm{i}, x_5 + x_6\mathrm{i}]$. Potom všetky ostatné predstaviteľky bodu X majú tvar $[\lambda x_1 - \mu x_2 + (\mu x_1 + \lambda x_2)\,\mathrm{i}, \lambda x_3 - \mu x_4 + (\mu x_3 + \lambda x_4)\,\mathrm{i}, \lambda x_5 - \mu x_6 + (\mu x_5 + \lambda x_6)\,\mathrm{i}]$. Ku každej takejto predstaviteľke možno priradiť (až na pomer $\lambda : \mu$) práve jeden bod reálneho projektívneho päťrozmerného priestoru P_5 o súradniciach $[\lambda x_1 - \mu x_2, \mu x_1 + \lambda x_2, \lambda x_3 - \mu x_4, \mu x_3 + \lambda x_4, \lambda x_5 - \mu x_6, \mu x_5 + \lambda x_6]$. Všetky tieto body vyplnia zrejme priamku X_1 prechádzajúcu bodmi $X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$[2]) a $X'(-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, x_5)$. Každý bod $X \in P_2(\mathrm{i})$ definuje takýmto spôsobom v priestore P_5 involutórnu kolineáciu I o rovniciach

$$x'_1 = -x_2,\ x'_2 = x_1,\ x'_3 = -x_4,\ x'_4 = x_3,\ x'_5 = -x_6,\ x'_6 = x_5,$$

ktorá nemá žiadne samodružné body a spojnice odpovedajúcich si bodov sú obrazmi bodov roviny $P_2(\mathrm{i})$. Ľahko nahliadneme, že toto zobrazenie bodov roviny $P_2(\mathrm{i})$ do uvedených spojníc v P_5 je jednojednoznačné. Spojniciam typu

---

[1]) Niekedy budeme používať i takéto označenie $X_1 = x_1 + x_2\mathrm{i}, X_2 = x_3 + x_4\mathrm{i}, X_3 = x_5 + x_6\mathrm{i}$.

[2]) Pre bod $X \in P_2(\mathrm{i})$ a $X \in P_5$ budeme používať to isté označenie, pokiaľ nebude môcť dôjsť k nedorozumeniu.

XX' v P_5 budeme hovoriť k-priamky. Z vlastností zobrazenia ihneď vyplýva, že dve rôzne k-priamky nemajú nijaký spoločný bod.

Pod priamkou $p \in P_2(\mathrm{i})$ prechádzajúcou bodmi A, B, kde $A \equiv B$ budeme rozumieť množinu bodov X, ktoré možno vyjadriť takto: $X = \lambda A + \mu B$, kde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2\mathrm{i}$, $\mu = \mu_1 + \mu_2\mathrm{i}$. Súradnice príslušného bodu X v P_5 sú potom

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 + \mu_1 b_1 - \mu_2 b_2, & x_4 &= \lambda_1 a_4 + \lambda_2 a_3 + \mu_1 b_4 + \mu_2 b_3, \\ x_2 &= \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + \mu_1 b_2 + \mu_2 b_1, & x_5 &= \lambda_1 a_5 - \lambda_2 a_6 + \mu_1 b_5 - \mu_2 b_6, \\ x_3 &= \lambda_1 a_3 - \lambda_2 a_4 + \mu_1 b_3 - \mu_2 b_4, & x_6 &= \lambda_1 a_6 + \lambda_2 a_5 + \mu_1 b_6 + \mu_2 b_5, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $[a_1 + a_2\mathrm{i}, a_3 + a_4\mathrm{i}, a_5 + a_6\mathrm{i}]$ a $[b_1 + b_2\mathrm{i}, b_3 + b_4\mathrm{i}, b_5 + b_6\mathrm{i}]$ sú predstaviteľky bodov A a B. Ak $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ prebiehajú všetky reálne čísla, potom všetky body X vytvoria trojrozmerný priestor ${}^pP_3$. Na to stačí ukázať, že matica

$$\begin{pmatrix} a_1, & -a_2, & b_1, & -b_2 \\ a_2, & a_1, & b_2, & b_1 \\ a_3, & -a_4, & b_3, & -b_4 \\ a_4, & a_3, & b_4, & b_3 \\ a_5, & -a_6, & b_5, & -b_6 \\ a_6, & a_5, & b_6, & b_5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

má hodnosť 4. Priamym výpočtom sa presvedčíme, že determinant z prvých štyroch riadkov tejto matice má hodnotu $(a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 + a_4b_2)^2 + (a_2b_3 + a_1b_4 - a_3b_2 - a_4b_1)^2$. Z predpokladu $A \neq B$ vyplýva, že matica

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2\mathrm{i}, & a_3 + a_4\mathrm{i}, & a_5 + a_6\mathrm{i} \\ b_1 + b_2\mathrm{i}, & b_3 + b_4\mathrm{i}, & b_5 + b_6\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

má hodnosť 2. Potom determinant z prvých dvoch stĺpcov musí byť rôzny od nuly

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2\mathrm{i}, & a_3 + a_4\mathrm{i} \\ b_1 + b_2\mathrm{i}, & b_3 + b_4\mathrm{i} \end{vmatrix} = a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 + a_4b_2 + (a_2b_3 + a_1b_4 - a_3b_2 - a_4b_1)\,\mathrm{i} \neq 0.$$

Z toho už naše tvrdenie vyplýva priamo.

Trojrozmerné priestory, ktoré sú obrazmi priamok roviny $P_2(\mathrm{i})$, budeme nazývať k-priestormi.

Ak zvolíme v k-priestore ${}^pP_3$ za základné body bázy body A, A', B, B' (sú lineárne nezávislé, pretože matica (2) má hodnosť 4), potom bod $X \in {}^pP_3$ má súradnice $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ a bod $X'(-\lambda_2, \lambda_1, -\mu_2, \mu_1)$. Vidíme, že involúcia I indukuje v priestore ${}^pP_3$ involúciu I' o rovniciach $\lambda_1' = -\lambda_2$, $\lambda_2' = \lambda_1$, $\mu_1' = -\mu_2$, $\mu_2' = \mu_1$. Spojnice odpovedajúcich si bodov v involúcii I' sú k-priamky a tvoria v ${}^pP_3$ kongruenciu navzájom mimobežných priamok.

Veta 1. *Dva rôzne k-priestory majú spoločnú práve jednu k-priamku.*

Dôkaz. Dva rôzne trojrozmerné priestory v P_5 majú vždy aspoň jednu priamku spoločnú. Nech X je bod spoločný dvom k-priestorom. Potom obidva tieto k-priestory musia obsahovať aj bod X' a teda celú k-priamku XX'.

Okrem tejto k-priamky nemôžu mať spoločný žiaden bod, pretože by museli mať spoločnú ďalšiu k-priamku a potom by museli splynúť.

Z tejto vety priamo vyplýva, že dve rôzne priamky v $P_2(\mathrm{i})$ majú spoločný práve jeden bod. Všetky priamky roviny $P_2(\mathrm{i})$, ktoré prechádzajú jej ľubovoľným bodom O, môžeme potom dostať takto: Zvolíme ľubovoľnú priamku $o \in P_2(\mathrm{i})$ neprechádzajúcu bodom O. Potom spojnice bodu O so všetkými bodmi priamky o sú zároveň všetky priamky prechádzajúce bodom O. Tento systém priamok nazveme zväzkom priamok o strede O.

Zväzok priamok v $P_2(\mathrm{i})$ sa zobrazuje takto: Daná je k-priamka O_1 a k-priestor ${}^oP_3$, ktorý ju neobsahuje. Potom každá k-priamka priestoru ${}^oP_3$ spolu s priamkou O_1 určujú k-priestor, ktorý je obrazom jednej priamky zväzku v rovine $P_2(\mathrm{i})$. Takýto systém k-priestorov budeme nazývať zväzkom k-priestorov s osou O_1.

2. Kolineácie a antikolineácie roviny $P_2(\mathrm{i})$, t. j. príbuznosti o rovniciach

$$X_i' = A_{ij}X_j \quad \text{(a)} \qquad X_i' = A_{ij}\bar{X}_j \quad \text{(b)} \tag{3}$$

majú tú vlastnosť, že transformujú body do bodov. Odpovedajúce transformácie v P_5 musia mať potom tú vlastnosť, že transformujú k-priamky do k-priamok.

Vyšetrujme také kolineácie v priestore P_5, ktoré transformujú k-priamky do k-priamok. Platí:

Veta 2. *Nutná a postačujúca podmienka, aby kolineácia* K *priestoru* P_5 *transformovala k-priamky do k-priamok je, aby* $\mathsf{KI} = \mathsf{IK}$.

Dôkaz. Nech kolineácia K má rovnice

$$y_i = a_{ik}x_k.$$

Kolineácia K priraďuje teda bodu X bod Y. Ďalej nech $\mathsf{K}(X') = \bar{Y}$. Aby kolineácia K transformovala k-priamku XX' do k-priamky, treba, aby body $YY'\bar{Y}$ ležali na jednej priamke, a to pre ľubovoľnú voľbu bodu X. Prvé dve súradnice bodov $YY'\bar{Y}$ sú

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6.\\
y_1' &= -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5 - a_{26}x_6.\\
\bar{y}_1 &= a_{12}x_1 - a_{11}x_2 + a_{14}x_3 - a_{13}x_4 + a_{16}x_5 - a_{15}x_6.\\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6.\\
y_2' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6.\\
\bar{y}_2 &= a_{22}x_1 - a_{21}x_2 + a_{24}x_3 - a_{23}x_4 + a_{26}x_5 - a_{25}x_6.
\end{aligned}$$

Aby body Y, Y', $\bar{Y}$ ležali na jednej priamke pre ľubovoľný bod X, musia existovať také čísla λ, μ, ν, ktoré nie sú súčasne rovné nule, že platí

$$\lambda y_1 + \mu y_1' + \nu\bar{y}_1 = 0, \qquad \lambda y_2 + \mu y_2' + \nu\bar{y}_2 = 0,$$

a to nezávisle od čísel x_i. Musí teda platiť napríklad

$$\lambda a_{11} - \mu a_{21} + \nu a_{12} = 0, \qquad \lambda a_{12} - \mu a_{22} - \nu a_{11} = 0,$$

$$\lambda a_{21} + \mu a_{11} + \nu a_{22} = 0, \qquad \lambda a_{22} + \mu a_{12} - \nu a_{21} = 0.$$

Ak vypočítame pomer $\lambda : \mu : \nu$ z prvých dvoch rovníc a z posledných dvoch rovníc, dostaneme porovnaním výsledkov rovnicu

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0. \qquad (\times)$$

Ak vypočítame pomer $\lambda : \mu : \nu$ z prvej a poslednej rovnice a tak isto z druhej a tretej rovnice, dostaneme porovnaním výsledkov rovnice

$$a_{11}^2 - a_{22}^2 + a_{12}^2 - a_{21}^2 = 0, \qquad a_{11}^2 - a_{22}^2 - a_{12}^2 + a_{21}^2 = 0.$$

Z toho

$$a_{11} = \pm a_{22}, \qquad a_{12} = \pm a_{21}.$$

Dosadením do rovnice $(\times)$ zistíme, že môžu nastať tieto dva prípady: 1. $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = -a_{21}$ 2. $a_{11} = -a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$. Tým istým postupom, použijúc aj ostatné súradnice y_i, y_i', $\overline{y}_i$ bodov Y, Y', Y, dostaneme obdobné vzťahy pre koeficienty a_{ik}. Rovnice kolineácie K môžu mať potom dvojaký tvar:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6,\\
y_2 &= a_2x_1 + a_1x_2 - a_4x_3 + a_3x_4 - a_6x_5 + a_5x_6,\\
y_3 &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6,\\
y_4 &= b_2x_1 + b_1x_2 - b_4x_3 + b_3x_4 - b_6x_5 + b_5x_6,\\
y_5 &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6,\\
y_6 &= c_2x_1 + c_1x_2 - c_4x_3 + c_3x_4 - c_6x_5 + c_5x_6;
\end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

$$(4)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 + \alpha_5x_5 + \alpha_6x_6,\\
y_2 &= \alpha_2x_1 - \alpha_1x_1 + \alpha_4x_3 - \alpha_3x_4 + \alpha_6x_5 - \alpha_5x_6,\\
y_3 &= \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_4x_4 + \beta_5x_5 + \beta_6x_6,\\
y_4 &= \beta_2x_1 - \beta_1x_2 + \beta_4x_3 - \beta_3x_4 + \beta_6x_5 - \beta_5x_6,\\
y_5 &= \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3 + \gamma_4x_4 + \gamma_5x_5 + \gamma_6x_6,\\
y_6 &= \gamma_2x_1 - \gamma_1x_2 + \gamma_4x_3 - \gamma_3x_4 + \gamma_6x_5 - \gamma_5x_6.
\end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Ľahko sa presvedčíme, že pre obidve tieto kolineácie platí $KI = IK$.

Nech naopak platí $KI = IK$. Potom porovnaním príslušných koeficientov ihneď vyplýva, že kolineácia K musí mať alebo rovnice (4a) alebo (4b).

Veta 3. *Každá kolineácia (antikolineácia) roviny P_2(i) je reprezentovaná v priestore P_5 kolineáciou typu* (4a) *typu* (4b) *a naopak.*

Dôkaz vety vyplýva ihneď z rozpisu rovníc (3a) a (3b).

Kolineácie typu (4a) budeme nazývať kolineáciami prvého druhu a kolineácie typu (4b) kolineáciami druhého druhu priestoru P_5. Z tvaru rovníc kolineácií prvého a druhého druhu vyplýva, že každú kolineáciu druhého druhu možno dostať ako súčin istej kolineácie prvého druhu a tejto špeciálnej kolineácie druhého druhu:

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = -x_4, \quad x_5' = x_5, \quad x_6' = -x_6. \qquad (5)$$

Identickej kolineácii roviny P_2(i) odpovedá identická kolineácia priestoru P_5. Súčinu dvoch kolineácií $K_2K_1 = K_3$ roviny P_2(i) odpovedá súčin odpovedajúcich kolineácií prvého druhu v P_5. Skutočne, nech $K_1(X) = Y$, $K_2(Y) = Z$, potom $K_3(X) = Z$. Bodom X, Y, Z odpovedajú v P_5 priamky X_1, Y_1, Z_1 a pre odpovedajúce kolineácie prvého druhu v P_5 (ktoré označíme taktiež K_1, K_2, K_3) musí platiť tiež $K_1(X_1) = Y_1$, $K_2(Y_1) = Z_1$, teda $K_3(X_1) = Z_1$, čiže $K_2K_1 = K_3$.

Kolineácie roviny P_2(i) tvoria grupu. Súčin kolineácie a antikolineácie je antikolineácia a súčin dvoch antikolineácií je kolineácia. Kolineácie a antikolineácie tvoria grupu.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva:

Veta 4. *Kolineácie prvého druhu v P_5 tvoria grupu. Súčin kolineácie prvého druhu a kolineácie druhého druhu je kolineácia druhého druhu. Kolineácie prvého a druhého druhu tvoria grupu.*

Nech A, B, C sú rôzne body priamky $p \in P_2$(i). Zvoľme súradnicový systém tak, aby tieto body mali súradnice $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(1, 1, 0)$. Nech $X = \lambda A + \mu B$, kde $\mu \neq 0$, to znamená $X \neq A$. Potom dvojpomer $(ABCX) = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Ak $\dfrac{\lambda}{\mu}$ je reálne číslo, možno dať tomuto faktu geometrický význam. Nech ${}^pP_3$ je k-priestor, do ktorého sa zobrazuje priamka p. Súradnice bodov A, B, C, X v tomto k-priestore sú $A(1, 0, 0, 0)$, $B(0, 0, 1, 0)$, $C(1, 0, 1, 0)$ $X(\lambda, 0, \mu, 0)$. Všetky tieto body ležia na jednej priamke a zrejme $(ABCX) = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Vidíme ak $\dfrac{\lambda}{\mu}$ je reálne číslo, všetky body X vyplnia celú spojnicu ABC (s výnimkou bodu A). k-priamky, ktoré prechádzajú bodmi spojnice ABC, vytvárajú regulus (spájajú body spojnice ABC a im v involúcii I priradené body spojnice $A'B'C'$). Dvojpomer $(ABCX)$ je teda dvojpomer k-priamok prechádzajúcich týmito bodmi v tomto regule.

Ľubovoľné tri rôzne priamky k-priestoru určujú jediný regulus. Každá štvorica k-priamok tohoto regulu má reálny dvojpomer, to znamená, že aj príslušná štvorica bodov v rovine P_2(i) má reálny dvojpomer. Takýto systém bodov roviny P_2(i) nazývame reťazcom. Platí teda:

Veta 5. *Reťazce roviny P_2(i) sa zobrazujú do regulov zložených z k-priamok.*

Podobne ako v reálnej projektívnej rovine, aj v rovine P_2(i) platí:

Veta 6. *Jediné involutórne kolineácie roviny P_2(i) sú jej harmonické homológie.*

Dôkaz možno robiť presne tak ako v reálnej projektívnej rovine [3].

Príslušná konštrukcia v P_5 vypadá takto: Nech OO' je k-priamka odpovedajúca stredu homológie. Nech ${}^oP_3$ je k-priestor odpovedajúci osi homológie, pričom k-priamka OO' neleží v priestore ${}^oP_3$. Nech AA' je k-priamka rôzna od OO' a neležiaca v ${}^oP_3$. Potom k-priamky OO' a AA' určujú k-priestor ${}^aP_3$, ktorý má s k-priestorom ${}^oP_3$ spoločnú k-priamku $\bar{A}\bar{A}'$. k-priamky OO', AA', $\bar{A}\bar{A}'$ ležia v k-priestore ${}^aP_3$ a určujú v ňom reťazec. V tomto reťazci existuje k-priamka BB' harmonicky združená ku k-priamke AA' vzhľadom na spojnice OO' a $\bar{A}\bar{A}'$ a to je hľadaná k-priamka.

V rovine P_2(i) existuje jediný typ antikolineácií [1]. Vhodnou voľbou súradnicového systému možno písať rovnice antikolineácie vo tvare

$$X_i = \bar{X}_i . \tag{6}$$

Táto antikolineácia má za samodružné body všetky body, ktorých jedna predstaviteľka má všetky súradnice reálne.

3. Všetky body, ktorých jedna predstaviteľka má všetky súradnice reálne, zobrazujú sa do bodov roviny ${}^oP_2$ o rovniciach $x_2 = x_4 = x_6 = 0$. Nazvime všetky roviny, ktoré vzniknú z roviny ${}^oP_2$ kolineáciami prvého druhu r-rovinami.

Veta 7. *r-rovina neobsahuje žiadne k-priamky.*

Dôkaz. Vetu stačí dokázať pre r-rovinu ${}^oP_2$. Body roviny ${}^oP_2$ majú súradnice $(a, 0, b, 0, c, 0)$. Involúcia I priraďuje týmto bodom body $(0, a, 0, b, 0, c)$. Tieto body ležia v rovine ${}^oP_2'$. Roviny ${}^oP_2$ a ${}^oP_2'$ sú zrejme mimobežné a teda rovina ${}^oP_2$ nemôže obsahovať žiadnu k-priamku.

Kritérium, podľa ktorého možno určiť, či rovina je r-rovinou, udáva táto veta.

Veta 8. *Rovina je r-rovinou vtedy a len vtedy, ak obsahuje také tri body, že tieto body a body k nim priradené involúciou I sú lineárne nezávislé.*

Dôkaz. Rovina ${}^oP_2$ je určená bodmi $A_1(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $A_3(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $A_5(0, 0, 0, 0, 1, 0)$. Involúcia I transformuje tieto body do bodov $A_1'(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $A_3'(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $A_5'(0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Kolineácia prvého druhu transformuje tieto body do bodov $\bar{A}_1(a_1, -a_2, b_1, -b_2, c_1, -c_2)$, $\bar{A}_3(a_3, -a_4, b_3, -b_4, c_3, -c_4)$, $\bar{A}_5(a_5, -a_6, b_5, -b_6, c_5, -c_6)$, $\bar{A}_1'(a_2, a_1, b_2, b_1, c_2, c_1)$, $\bar{A}_3'(a_4, a_3, b_4, b_3, c_4, c_3)$, $\bar{A}_5'(a_6, a_5, b_6, b_5, c_6, c_5)$. Tieto body sú lineárne nezávislé, lebo ich súradnice tvoria stĺpce v determinante kolineácie. Rovina ${}^oP_2$ sa pritom transformuje do roviny P_2 určenej bodmi $\bar{A}_1$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_5$.

Ak sú naopak dané lineárne nezávislé body $\bar{A}_1$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_5$, $\bar{A}_1'$, $\bar{A}_3'$, $\bar{A}_5'$, potom body $\bar{A}_1$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_5$ určujú rovinu a existuje jediná kolineácia prvého druhu, ktorá transformuje body A_1, A_3, A_5, A_1', A_3', A_5' po rade do bodov $\bar{A}_1$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_5$, $\bar{A}_1'$, $\bar{A}_3'$, $\bar{A}_5'$ a teda rovina určená bodmi $\bar{A}_1$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_5$ je r-rovinou.

Definícia. *Všetky body roviny P_2(i), ktoré sa zobrazujú do k-priamok pretínajúcich r-rovinu, tvoria 2-reťazec.*

Veta 9. *Existuje jediný 2-reťazec prechádzajúci štyrmi bodmi roviny P_2(i), z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke.*

Dôkaz. Nech body M, N, P, Q roviny P_2(i), z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke, zobrazujú sa do k-priamok M_1, N_1, P_1, Q_1 priestoru P_5; potom žiadne tri z priamok M_1, N_1, P_1, Q_1 nemôžu ležať v jednom k-priestore. Priamkami M_1, N_1 je určený k-priestor ${}^1P_3$ a priamkami P_1, Q_1 je určený k-priestor ${}^2P_3$. k-priestory ${}^1P_3$, ${}^2P_3$ majú spoločnú k-priamku O_1. Nech O je ľubovoľný bod priamky O_1. Bodom O prechádza jediná priamka ${}^1a$ taká, že pretína priamky M_1, N_1; nech má s týmito priamkami spoločné body M, N. Podobne bodom O prechádza jediná priamka ${}^2a$ pretínajúca priamky P_1, Q_1 v bodoch P, Q. Priamkami ${}^1a$, ${}^2a$ prechádza r-rovina P_2, pretože napr. body M, N, P, M', N', P' sú lineárne nezávislé. Každým bodom priamky O_1 prechádza teda jedna r-rovina, ktorá pretína k-priamky M_1, N_1, P_1, Q_1.

Naopak nech nejaká r-rovina $\overline{P}_2$ pretína priamky M_1, N_1, P_1, Q_1 v bodoch $\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{P}$, $\overline{Q}$. Potom body $\overline{M}$, $\overline{N}$ a ich spojnica ${}^1\overline{a}$ musia ležať v k-priestore ${}^1P_3$ a body $\overline{P}$, $\overline{Q}$ a ich spojnica ${}^2\overline{a}$ v k-priestore ${}^2P_3$. Pretože priamky ${}^1\overline{a}$, ${}^2\overline{a}$ ležia v jednej rovine, musia sa pretínať v bode $\overline{O}$. Bodom $\overline{O}$ prechádza k-priamka $\overline{O}_1$ spoločná obom k-priestorom ${}^1P_3$, ${}^2P_3$. Pretože taká priamka je len jedna, je $\overline{O}_1 \equiv O_1$. Teda r-rovina $\overline{P}_2$ je jednou z r-rovín, konštruovaných v predchádzajúcom odseku.

Priamky M_1, N_1, P_1, Q_1 pretína teda systém r-rovín, ktoré majú tú vlastnosť, že každým bodom priamok M_1, N_1, O_1, P_1, Q_1 prechádza práve jedna rovina tohto systému (budeme hovoriť o k-systéme r-rovín). Nech R_1 je k-priamka pretínajúca r-rovinu P_2 v bode R. Potom priamka R_1 pretína všetky r-roviny k-systému. O bode R môžeme predpokladať, že neleží na žiadnej z priamok ${}^1a$, ${}^2a$, pretože v tých prípadoch je tvrdenie zrejmé. Zvoľme bodom R dve priamky ${}^1r$, ${}^2r$. Priamkou ${}^1r$ prechádza k-priestor ${}^1R_3$ a priamkou ${}^2r$ k-priestor ${}^2R_3$. k-priestory ${}^1R_3$, ${}^2R_3$ majú spoločnú priamku R_1. Ľubovoľnú inú r-rovinu $\overline{P}_2$ toho istého k-systému pretínajú priestory ${}^1R_3$, ${}^2R_3$ v priamkach ${}^1\overline{r}$, ${}^2\overline{r}$, ktoré sa pretínajú v bode $\overline{R}$. Týmto bodom musí potom prechádzať aj priamka R_1, ktorá teda pretína aj rovinu $\overline{P}_2$.

Veta 10. *Daný je 2-reťazec r-rovinou P_2 a k-priamka P_1, ktorá neprislúcha tomuto 2-reťazcu; potom existuje jediný k-priestor P_3 priamkou P_1 taký, že má s daným 2-reťazcom spoločný reťazec.*

Dôkaz. Každý trojrozmerný priestor má s rovinou P_2 spoločný aspoň jeden bod. Žiaden trojrozmerný prietor prechádzajúci priamkou P_1 nemôže obsahovať rovinu P_2, lebo by sa museli potom priamka P_1 a rovina P_2 pretnúť. Priamkou P_1 a rovinou P_2 je určený štvorrozmerný priestor P_4. Priestor P_4 nemôže obsahovať rovinu P_2' (roviny P_2, P_2' obsahujú 6 lineárne nezávislých bodov), preto ju pretína v priamke Q_1'. Priestor P_3 určený priamkami P_1, Q_1' je k-priestor. Skutočne, pretína rovinu P_2 v priamke $\overline{Q}_1$, ktorá má aspoň jeden bod A spoločný s priamkou Q_1. Potom priamka P_1 a spojnica AA' určujú ten istý priestor P_3 a je teda k-priestorom. Priamka $\overline{Q}_1$ musí potom splynúť s priamkou Q_1 a priestor P_3 je hľadaným k-priestorom.

Nech $\overline{P}_3$ je iný k-priestor prechádzajúci priamkou P_1 a pretínajúci rovinu P_2 v priamke $\overline{Q}_1$. Potom priamky Q_1 a $\overline{Q}_1$ majú spoločný bod A a priestory P_3, $\overline{P}_3$ by mali okrem priamky P_1 spoločnú ešte priamku AA', čo nie je možné.

Poznámka. Priamku Q_1 môžeme dostať priamo ako priesečnicu priestoru P_4, určeného priamkou P_1 a rovinou P_2', s rovinou P_2.

Pomocná veta. *Reťazec je reprezentovaný k-priamkami kvadriky Q_2^2 v k-pries-*

tore P_3; potom k ľubovoľnej k-priamke P_1 je združená polára Q_1 taktiež k-priamkou.

Dôkaz. Priestor P_3 nech má rovnice $x_5 = x_6 = 0$. Kvadriku Q_2^2 určíme priamkou $p = (O_1 \times O_3)$, kde $O_1(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $O_3(0, 0, 1, 0, 0, 0)$. Kvadriku Q_2^2 tvoria všetky k-priamky pretínajúce priamku p. Rovnica kvadriky Q_2^2 je potom $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$. k-priamka P_1 nech je určená bodmi $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $A'(-a_2, a_1, -a_4, a_3)$. Polárna rovina $\varkappa$ bodu A vzhľadom na kvadriku Q_2^2 má rovnicu $a_4x_1 - a_3x_2 - a_2x_3 + a_1x_4 = 0$. Polárna rovina $\varkappa'$ bodu A' vzhľadom na kvadriku Q_2^2 má rovnicu $a_3x_1 + a_4x_2 - a_1x_3 - a_2x_4 = 0$. Ak nejaký bod B leží na priesečnici Q_1 rovín $\varkappa$, $\varkappa'$, ľahko sa presvedčíme, že na nej leží aj bod B' a teda priamka Q_1 je k-priamkou.

Nech $\mathfrak{R}$ je ľubovoľný 2-reťazec reprezentovaný r-rovinou P_2. k-priamka P_1 nech neprislúcha 2-reťazcu $\mathfrak{R}$. Potom podľa vety 10 existuje jediný k-priestor P_3 prechádzajúci priamkou P_1, ktorý má s 2-reťazcom $\mathfrak{R}$ spoločný reťazec. V priestore P_3 zostrojme k priamke P_1 združenú poláru Q_1 vzhľadom na tento reťazec. Potom k-priamky P_1, Q_1 nazývame združenými vzhľadom na 2-reťazec $\mathfrak{R}$ a príslušné body P, Q v rovine $P_2(i)$ taktiež združenými vzhľadom na 2-reťazec $\mathfrak{R}$.

4. V tomto odseku sa budeme zaoberať vzájomnou polohou reťazcov a 2-reťazcov.

Veta 11. *Dva rôzne reťazce v rovine $P_2(i)$ môžu mať spoločné žiaden, jeden alebo dva body.*

Dôkaz. Nech reťazec $^1\mathfrak{P}$ je určený v priestore P_5 priamkou ^1p a reťazec $^2\mathfrak{P}$ priamkou ^2p. Kvadriky $^1Q_2^2$ a $^2Q_2^2$, ktoré reprezentujú tie dva reťazce môžu ležať vo dvoch rôznych k-priestoroch $^1P_3$, $^2P_3$, alebo v jednom P_3. Ak ležia v rôznych k-priestoroch, potom tieto priestory majú jedinú k-priamku spoločnú. Táto priamka môže alebo nemusí prislúchať obom reťazcom.

Nech teraz obidve kvadriky $^1Q_2^2$, $^2Q_2^2$ ležia v jednom k-priestore P_3. Potom každá priamka môže mať s kvadrikou $^2Q_2^2$ spoločný žiaden, jeden alebo dva body. Treba ukázať, že všetky tieto tri prípady môžu nastať aj pre priamku ^1p, ktorá nie je k-priamkou. Ukážem to na troch konkrétnych príkladoch pre priestor P_3 o rovniciach $x_5 = x_6 = 0$ a kvadriku $^2Q_2^2$ o rovnici $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$. Priamka $^1p = [(1, 0, 0, 1) \times (1, 1, -2, 1)]$ nemá s kvadrikou $^2Q_2^2$ žiaden bod spoločný; priamka $^1p = [(1, 0, -2, 1) \times (-1, 2, 0, -1)]$ má jeden a priamka $^1p = [(1, 0, 0, 0) \times (0, 0, 0, 1)]$ dva body spoločné s kvadrikou $^2Q_2^2$.

Veta 12. *2-reťazec môže alebo obsahovať reťazec, alebo s ním môže mať spoločné žiaden, jeden alebo dva body.*

Dôkaz. 2-reťazec nech je reprezentovaný r-rovinou P_2 a reťazec priamkou p v k-priestore P_3. Priestor P_3 môže mať s rovinou P_2 spoločnú alebo priamku q, alebo bod Q. V prvom prípade ide o tvrdenie vety 11 a v druhom prípade môže k-priamka Q_1 alebo prislúchať reťazcu alebo nie, čiže 2-reťazec má s reťazcom alebo jeden alebo žiaden bod spoločný.

Veta 13. *Priamka roviny P_2(i) môže mať s 2-reťazcom spoločný alebo celý reťazec alebo jeden bod.*

Dôkaz. k-priestor P_3 reprezentujúci priamku a r-rovinu P_2 reprezentujúca 2-reťazec môžu mať spoločnú alebo priamku alebo bod.

Veta 14. *Dva rôzne 2-reťazce môžu mať spoločné alebo tri lineárne nezávislé body, alebo jeden bod alebo bod a reťazec ním neprechádzajúci, alebo reťazec.*

Dôkaz. Nech 2-reťazec $\mathfrak{R}$ je určený r-rovinou $^oP_2$ a 2-reťazec $\bar{\mathfrak{R}}$ r-rovinou $^o\bar{P}_2$. Potom existuje celý k-systém r-rovín $^x\bar{P}_2$, ktoré tiež určujú 2-reťazec $\bar{\mathfrak{R}}$. Ukážeme si najprv, že iba konečný počet rovín $^x\bar{P}_2$ môže mať spoločné body s rovinou $^oP_2$. Predpokladajme, že 2-reťazce $\mathfrak{R}$, $\bar{\mathfrak{R}}$ majú nekonečne mnoho spoločných bodov. Potom k-priamky — obrazy týchto bodov — pretínajú rovinu $^oP_2$ v nejakej množine bodov. Všetky tieto body (s výnimkou konečného počtu) musia ležať na jednej priamke. Keby to nebolo tak, dali by sa nájsť štyri také body, že žiadne tri z nich by neležali na jednej priamke a 2-reťazce $\mathfrak{R}$, $\bar{\mathfrak{R}}$, podľa vety 9, by museli splynúť. Nech teda všetky tie body (s výnimkou konečného počtu) ležia na priamke p. Priamky p a p' určujú k-priestor P_3. Nech $^1P_2$ je r-rovina, ktorá prechádza bodom R, jedným zo spoločných bodov priamky p. Rovina $^1P_2$ musí pretínať aj všetky ostatné k-priamky spoločné obom 2-reťazcom. Pretože však tieto priamky (s výnimkou konečného počtu) ležia v priestore P_3, musí rovina $^1P_2$ pretínať P_3 v priamke. Bodom R prechádza ale jediná priamka, ktorá pretína ostatné k-priamky reťazca, t. j. priamka p, musí teda rovina $^1\bar{P}_2$ obsahovať priamku p. Každá iná z rovín $^x\bar{P}_2$ môže pretínať rovinu $^oP_2$ v bodoch, ktoré neležia na priamke p a takých môže byť iba konečný počet. Existuje teda iba konečný počet rovín $^x\bar{P}_2$, ktoré pretínajú rovinu $^oP_2$. Každú z rovín $^x\bar{P}_2$ môžeme považovať za rovinu $^yP'_2$ a celú úvahu môžeme zopakovať pre roviny $^y\bar{P}'_2$ a rovinu $^oP'_2$; existuje teda iba konečný počet rovín $^xP_2$, ktoré pretínajú rovinu $^oP'_2$. Dohromady existuje teda iba konečný počet rovín k-systému $^x\bar{P}_2$, ktoré pretínajú alebo rovinu $^oP_2$ alebo rovinu $^oP'_2$.

Nech r-rovina $^2P_2$ nepretína ani rovinu $^oP_2$ ani rovinu $^oP'_2$. Nech ^1X je ľubovoľný bod roviny $^oP_2$. Bodom ^1X a rovinou $^2\bar{P}_2$ je určený trojrozmerný priestor $^xP_3$. Priestor $^xP_3$ pretína rovinu $^oP'_2$ v bode $^2X'$ (keby ju pretínal v priamke, mala by táto priamka spoločný bod s rovinou $^2\bar{P}_2$ a teda roviny $^oP'_2$, $^2P_2$ by sa pretínali). Bodu $^2X'$ odpovedá involúciou I v rovine $^oP_2$ bod ^2X. Príbuznosť $^1X \to {}^2X$ je kolineáciou, pretože bodom a priamkam odpovedajú jednoznačne body a priamky a incidencia sa zachováva. Samodružné body tejto kolineácie určujú spoločné body reťazcov $\mathfrak{R}$, $\bar{\mathfrak{R}}$. Z klasifikácie kolineácií vyplýva potom tvrdenie vety priamo.

LITERATÚRA

[1] Розенфельд Б. А., *Неевклидовы геометрии*, Москва 1955, 578.

[2] Норден А. П. Пространство линейной конгруенции, Матем. сб. 24 (66), 1949.

[3] Busemann—Kelly, *Projective Geometry and Projective Metrics*, New York 1953.

[4] Young J. W., Two-dimensional Chains and the associated Collineations in a Complex Plane, Trans. amer. math. Soc. 11 (1910) 280—283.

[5] Juel C., Über einige Grundbegriffe der projektiven Geometrie, Acta mathematica 14 (1890—1891).

Došlo dňa 6. 1. 1959.

Katedra deskriptívnej geometrie
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ОБ ОДНОМ ОТОБРАЖЕНИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

ВАЦЛАВ МЕДЕК

Выводы

В статьи рассматривается отображение точек комплексной проективной плоскости $P_2(i)$ на прямые вещественного пятиразмерного проективного пространства P_5. Выведедены основные свойства этого отображения и показано как отображаются коллинеации, антиколлинеации, цепы и 2-цепы. Рассмотрены тоже соотношения между цепями и 2-цепями.

ÜBER EINE ABBILDUNG DER KOMPLEXEN PROJEKTIVEN EBENE

V. MEDEK

Zusammenfassung

In dieser Abhandlung ist die Abbildung der Punkte der komplexen projektiven Ebene $P_2(i)$ auf die Geraden eines reellen fünfdimensionalen projektiven Raumes P_5 untersucht. Es sind die Grundeigenschaften dieser Abbildung ausgeführt und es ist gezeigt, wie sich Kollineationen, Antikollineationen, Ketten und 2-Ketten abbilden. Zuletzt sind die Zusammenhänge zwischen Ketten und 2-Ketten untersucht.