Michal Greguš

Aplikácia disperzií na okrajový problém druhého rádu

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 4 (1954), No. 1, 27--37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126452

применять уравнения Паули и Фирца. Нельзя исключать возможность, что этими уравнениями будут описываться μ-мезоны, как это предлагает Кусака (1). Все известные процессы распада можно именно объяснять с предположением, что спин μ-мезона равен $\frac{3}{2}$. Одно отличие μ-мезонов от электронов может быть следствием отличности их спинов.

APLIKÁCIA DISPERZIÍ NA OKRAJOVÝ PROBLÉM DRUHÉHO RÁDU

MICHAL GREGUŠ

Jadrom práce je dôkaz vety, kde sa hovorí o počte nulových bodov integrálu Sturmovej diferenciálnej rovnice

$$[\Theta(x, \lambda) y']' - Q(x, \lambda) y = 0, \tag{a}$$

ktorý spĺňa Sturmove homogénne okrajové podmienky (tzv. Sturmova oscilačná veta).

Dôkaz je vykonaný pomocou disperzií prvého druhu, pojmu zavedeného prof. O. Borůvkom pre diferenciálnu rovnicu

$$y'' - Q(x) y = 0.^{1} \tag{b}$$

Inými spôsobmi vykonali dôkaz už mnohí matematici.[2]

Práca je rozdelená na tri časti. V prvej časti je zavedený pojem disperzií pre diferenciálnu rovnicu (a) a odvodené niektoré ich vlastnosti analogické vlastnostiam disperzií diferenciálnej rovnice (b). V druhej časti sú odvodené vlastnosti disperzií vyplývajúce zo závislosti od parametra λ a aplikácia disperzií prvého druhu na dôkaz Sturmovej oscilačnej vety. V tretej časti je dokázaná zovšeobecnená oscilačná veta za špeciálnejších predpokladov.

I

Uvažujme Sturmovu diferenciálnu rovnicu (a). Nech funkcie $\Theta(x,\lambda)$, $Q(x,\lambda)$ sú spojité pre $x \in (-\infty, \infty)$ a pre $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$. Nech $\Theta(x, \lambda) > 0$ pre každé

[1] Borůvka O., *O kolebluščichsja integralach differencialnych linejnych uravnenij 2-ogo poriadka*, Čechoslovackij matematičeskij žurnal, *3* (78), 1953, 199—247.

[2] Napr. Sturm, Journal de Mathematiques, *1*, 1836;
Bôcher, Bul. Amer. Math. Soc., 1898;
Fort, Bul. Amer. Math. Soc., *24*, 1918;
Prüfer, Math. Ann. *95*, 1926;
Mammana, Math. Z. *25*, 1926;
Kamke, Math. Z. *44*, 1939 a iní.

x a $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$. Potom z existenčnej teorémy vyplýva, že existuje integrál diferenciálnej rovnice (a), ktorý je v ľubovoľnom čísle $\alpha \in (-\infty, \infty)$ rovný nule.

Nech $y(x, \lambda)$ je integrál diferenciálnej rovnice (a) taký, že je $y(\alpha, \lambda) = 0$ pre každé $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$.

Potom buď má $y(x, \lambda)$ v $(-\infty, \infty)$ ďalšie korene, alebo nie. V prvom prípade korene väčšie ako α nech sú: $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots$. Budeme ich nazývať číslami sprava konjugovanými k číslu α. Korene menšie ako α: $\alpha_1' > \alpha_2' > \alpha_3' \ldots$ budeme nazývať číslami zľava konjugovanými k číslu α. Spolu ich budeme nazývať konjugovanými číslami prvého druhu k číslu α.

Konjugované čísla nezávisia od voľby integrálu diferenciálnej rovnice (a), pretože každé dve riešenia diferenciálnej rovnice (a), ktoré majú koreň v čísle α, líšia sa len konštantným faktorom a teda všetky korene majú rovnaké.

Ďalej predpokladajme, že integrály diferenciálnej rovnice (a) sú oscilujúce v intervaloch pre $x \in (-\infty, \infty)$ a $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$. Ku každému $x \in (-\infty, \infty)$ priradíme najbližšie väčšie konjugované číslo prvého druhu, ktoré označíme znakom $\varphi_1(x, \lambda)$. Dostaneme funkciu φ_1 definovanú pre všetky x a $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$. Túto funkciu nazvime prvou disperziou prvého druhu diferenciálnej rovnice (a).

Z definície disperzie vyplýva, že pre každé x platí:

$$x < \varphi_1(x, \lambda).$$

Ak ku každému x priradíme druhé najbližšie väčšie konjugované číslo prvého druhu, dostaneme funkciu $\varphi_2(x, \lambda)$, ktorú nazvime druhou disperziou prvého druhu. Podobne sa definuje ν-ta disperzia prvého druhu.

Takto definované disperzie sú diferenciálnou rovnicou (a) jednoznačne určené.

Prof. B o r ů v k a uvažoval diferenciálnu rovnicu (b), v ktorej je $Q(x) < 0$ a $Q(x)$ je spojitá funkcia pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$. Za predpokladu oscilatorických riešení definoval disperzie $\varphi(x)$ a ukázal, že v každom čísle x majú kladné derivácie prvého rádu, pretože vyhovujú diferenciálnej rovnici prvého rádu:

$$\varphi'(x) = \frac{\varrho^2[\varphi(x)]}{\varrho^2(x)},$$

kde $\varrho = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ a z_1, z_2 sú dva lineárne nezávislé integrály diferenciálnej rovnice (b).

Ukážme, že disperzie prvého druhu diferenciálnej rovnice (a) vyhovujú diferenciálnej rovnici prvého rádu:

$$\varphi'(x, \lambda) = \frac{y^2(\varphi, \lambda) \,.\, \Theta(\varphi, \lambda)}{y^2(x, \lambda) \,.\, \Theta(x, \lambda)} \quad \text{pre } y(x, \lambda) \neq 0. \tag{I}$$

S. Krohová vo svojej dizertácii uvažovala diferenciálny systém: $y' = Az$, $z' = By$, kde A, B sú spojité funkcie $x \in (-\infty, \infty)$ a $A \neq 0$ pre všetky x. Za predpokladu, že y-ová a z-ová zložka integrálu diferenciálneho systému sú oscilatorické, dokázala, že disperzie prvého druhu y-ovej zložky vyhovujú diferenciálnej rovnici:

$$\varphi'(x) = \frac{y^2(\varphi) \,.\, A(x)}{y^2(x) \,.\, A(\varphi)} \quad \text{pre } y(x) \neq 0 .$$

Naše tvrdenie je teraz zrejmé, keď diferenciálnu rovnicu (a) prepíšeme na systém:

$y' = \dfrac{1}{\Theta(x, \lambda)} z$, $z' = Q(x, \lambda) \,.\, y$ a použijeme práve uvedený vzorec.

Nech z_1, z_2 sú dva nezávislé integrály diferenciálnej rovnice (a). Ľahko sa ukáže, že potom každý integrál diferenciálnej rovnice (a) sa dá písať v tvare:

$$y = k\varrho \sin\left[\int_a^x \frac{\omega}{\varrho^2} \, dt - \gamma\right],$$

kde $\varrho = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $\omega = \begin{vmatrix} z_1, z_2 \\ z_1', z_2' \end{vmatrix}$, k a γ sú konštanty.

Nech $y(x, \lambda) = 0$, potom tiež $y(\varphi, \lambda) = 0$. Pretože $\varrho \neq 0$, pre každé x, resp. φ a λ musí platiť:

$$\sin\left[\int_a^x \frac{\omega}{\varrho^2} \, dt - \gamma\right] = 0, \qquad \sin\left[\int_a^\varphi \frac{\omega}{\varrho^2} \, dt - \gamma\right] = 0,$$

t. j.

$$\int_a^x \frac{\omega}{\varrho^2} \, dt - \gamma = k_1 \pi \quad \text{a} \quad \int_a^\varphi \frac{w}{\varrho^2} \, dt - \gamma = k_2 \pi .$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme:

$$\int_x^\varphi \frac{\omega}{\varrho^2} \, dt = (k_2 - k_1)\pi .$$

Vezmúc toto do úvahy a dosadiac $y(x, \lambda)$, resp. $y(\varphi, \lambda)$ do rovnice $(\bar{1})$, dostávame:

$$\varphi'(x, \lambda) = \frac{\varrho^2(\varphi, \lambda) \,.\, \Theta(\varphi, \lambda)}{\varrho^2(x, \lambda) \,.\, \Theta(x, \lambda)} .\ [3] \tag{1}$$

Rovnica (1) je splnená pre každé x a $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$.

[3] K tomu istému výsledku sa tiež dostaneme cestou, ktorou prof. Borůvka odvodil diferenciálnu rovnicu pre disperziu prvého druhu diferenciálnej rovnice (b).

Nakoniec pokladám za nevyhnutné spomenúť *klasickú Sturmovu oscilačnú teorému*, ktorá znie takto:

Nech funkcie $\Theta(x, \lambda)$ a $Q(x, \lambda)$ sú spojité pre $x \in [a, b]$ a pre $\lambda \in (\varDelta_1, \varDelta_2)$ a nech $\Theta(x, \lambda) > 0$ pre $x \in [a, b]$ a pre $\lambda \in (\varDelta_1, \varDelta_2)$. Nech $M(\lambda)$ a $m(\lambda)$ sú najväčšie hodnoty funkcií $\Theta(x, \lambda)$ a $Q(x, \lambda)$ v $[a, b]$ a nech naviac: $\lim\limits_{\lambda \to \varDelta_2} \dfrac{-m(\lambda)}{M(\lambda)} = \infty$, potom ku každému prirodzenému číslu $\nu (= 1, 2, \ldots)$ existuje číslo $\lambda_\nu \in (\varDelta_1, \varDelta_2)$ také, že pre každé $\lambda \in [\lambda_\nu, \varDelta_2)$ má riešenie diferenciálnej rovnice (a) v $[a, b]$ aspoň ν koreňov.

II

Majme diferenciálnu rovnicu:

$$[\Theta(x, \lambda) y']' - Q(x, \lambda) y = 0. \tag{a}$$

V ďalšom budeme o funkciách $\Theta(x, \lambda)$ a $Q(x, \lambda)$ predpokladať toto:

1. *Nech funkcie $\Theta(x, \lambda)$ a $Q(x, \lambda)$ sú spojitými funkciami pre $x \in [a, b]$ a pre $\lambda \in (\varDelta_1 . \varDelta_2)$. Okrem toho nech pre každé $x \in [a, b]$ a $\lambda \in (\varDelta_1, \varDelta_2)$ je $\Theta(x, \lambda) > 0$.*

2. *Nech pre každé $x \in [a, b]$ je $Q(x, \lambda)$ klesajúcou funkciou parametra $\lambda \in (\varDelta_1, \varDelta_2)$, t. j. $Q(x, \lambda_1) > Q(x, \lambda_2)$ pre ľubovoľné $\lambda_1, < \lambda_2 \in (\varDelta_1, \varDelta_2)$ a nech $\lim\limits_{\lambda \to \varDelta_2} Q(x, \lambda) = -\infty$ pre každé $x \in [a, b]$. Nech naviac $\Theta(x, \lambda)$ je nerastúcou funkciou parametra $\lambda \in (\varDelta_1, \varDelta_2)$ pre $x \in [a, b]$.*

V ďalších úvahách bude veľmi výhodné, keď si interval $[a, b]$ rozšírime na interval $(-\infty, \infty)$, a to tak, že pre $x > b$ položíme $\Theta(x, \lambda) = \Theta(b, \lambda)$, $Q(x, \lambda) = Q(b, \lambda)$ a pre $x < a$ položíme $\Theta(x, \lambda) = \Theta(a, \lambda)$, $Q(x, \lambda) = Q(a, \lambda)$.

Takto definované funkcie $\Theta(x, \lambda)$ a $Q(x, \lambda)$ majú pre $x \in (-\infty, \infty)$ a pre $\lambda \in (\varDelta_1, \varDelta_2)$ predchádzajúce vlastnosti a integrál $y(x, \lambda)$ diferenciálnej rovnice (a) má v $[a, b]$ ten istý priebeh.

Diferenciálna rovnica (a) je oscilatorická v intervale $(-\infty, \infty)$ buď pre všetky $\lambda \in (\varDelta_1, \varDelta_2)$ alebo počínajúc len od určitého $\lambda = \varDelta_0 \in (\varDelta_1, \varDelta_2)$. Potom však disperzia prvého druhu $\varphi(x, \lambda)$ diferenciálnej rovnice (a) je definovaná pre $x \in (-\infty, \infty)$ a pre $\lambda \in (\varDelta_0, \varDelta_2)$.

Veta 1. *Disperzia prvého druhu diferenciálnej rovnice* (a) $\varphi(x, \lambda)$ *je spojitou funkciou parametra λ v intervale $(\varDelta_0, \varDelta_2)$, a to pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.*[4]

D ô k a z. Disperzia prvého druhu $\varphi(x, \lambda)$ vyhovuje tejto diferenciálnej rovnici prvého rádu:

$$\varphi'(x, \lambda) = \frac{\varrho^2(\varphi, \lambda) . \Theta(\varphi, \lambda)}{\varrho^2(x, \lambda) . \Theta(x, \lambda)}, \tag{1}$$

kde $\varrho^2(x, \lambda)$ a $\Theta(x, \lambda)$ sú spojitými funkciami premenných $x \in (-\infty, \infty)$

[4] Pod znakom $\varphi(x, \lambda)$ (bez indexu) budeme v ďalšom rozumieť $\varphi_\nu(x, \lambda)$ pre ľubovoľné $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

a $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_2)$. Teda tiež $\varrho^2(\varphi, \lambda)$, $\Theta(\varphi, \lambda)$ sú spojitými funkciami $\varphi \in (-\infty, \infty)$ a $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_2)$.

(1) je diferenciálna rovnica so separovanými premennými, kde $\varrho^2(\varphi, \lambda) . \Theta(\varphi, \lambda) \neq 0$ pre každé φ a $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_2)$. Existuje preto jednoznačné riešenie diferenciálnej rovnice (1) $\varphi = \varphi(x, \lambda)$ (prechádzajúce daným bodom x_0, φ_0), ktoré je spojitou funkciou parametra $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_2)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$, č. b. t. d.

Veta 2. *Existuje nekonečne mnoho hodnôt parametra* $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_2)$:

$$\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+p}, \ldots,$$

pre ktoré integrál $y(x, \lambda)$ *diferenciálnej rovnice* (a) *za predpokladov 1, 2 spĺňa okrajové podmienky* $y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0$ *a má pre* $\lambda = \lambda_{n+p}$ *v* (a, b) *práve* $n + p$ *nulových bodov.*

Dôkaz. Uvažujme integrál $y(x, \lambda)$ diferenciálnej rovnice (a) taký, že $y(a, \lambda) = 0$.

Z klasickej Sturmovej oscilačnej teorémy vyplýva, že k ľubovoľnému prirodzenému číslu ν existuje λ_ν také, že $y(x, \lambda_\nu)$ má v $(a, b]$ aspoň ν koreňov.

Nech ich je $\mu \geqq \nu$ a nech sú to:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_\mu,$$

potom platí: $x_\mu = \varphi_\mu(a, \lambda_\nu)$, teda

$$\varphi_\mu(a, \lambda_\nu) \leqq b < \varphi_{\mu+1}(a, \lambda_\nu).$$

Nech $\varphi_\mu(a, \lambda_\nu) < b$. Z oscilačnej teorémy však vyplýva, že k prirodzenému číslu $\mu + 1 > \nu$ existuje také $\lambda_{\mu+1} \in (\lambda_\nu, \Delta_2)$, že $y(x, \lambda_{\mu+1})$ má v (a, b) aspoň $\mu + 1$ nulových bodov. Platí teda: $\varphi_{\mu+1}(a, \lambda_{\mu+1}) \leqq b < \varphi_{\mu+1}(a, \lambda_\nu)$.

Pretože však $\varphi_{\mu+1}(a, \lambda)$ je spojitou funkciou parametra λ, existuje v intervale $(\lambda_\nu \lambda_{\mu+1}]$ také λ_n, že $\varphi_{\mu+1}(a, \lambda_n) = b$; integrál $y(x, \lambda_n)$ spĺňa okrajové podmienky $y(a, \lambda_n) = y(b, \lambda_n) = 0$ a má v (a, b) práve $n = \mu$ nulových bodov.

Hľadajme teraz λ_{n+1}. Vieme, že $\varphi_n(a, \lambda_n) = b < \varphi_{n+1}(a, \lambda_n)$. Zo Sturmovej oscilačnej teorémy vyplýva, že k číslu $k > n + 1$ existuje také $\lambda_k \in (\lambda_n, \Delta_2)$, že $y(x, \lambda_k)$ má v (a, b) aspoň $k > n + 1$ koreňov. Teda pre $\lambda = \lambda_k$ je $\varphi_{n+1}(a, \lambda_k) < b < \varphi_{n+1}(a, \lambda_n)$. Pretože $\varphi_{n+1}(a, \lambda)$ je spojitou funkciou parametra λ, existuje v intervale (λ_n, λ_k) také λ_{n+1}, že $y(x, \lambda_{n+1})$ má v (a, b) práve $n + 1$ koreňov a jeden koreň v b.

Takto postupujúc ďalej nájdeme postupnosť hodnôt parametra λ: $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+p}, \ldots$, ku ktorej existuje postupnosť riešení: $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}, \ldots$ taká, že $y_{n+p} = y(x, \lambda_{n+p})$ má v (a, b) $n + p$ nulových bodov a spĺňa okrajové podmienky $y(a, \lambda_{n+p}) = y(b, \lambda_{n+p}) = 0$.

Ak $\varphi_\mu(a, \lambda_\nu) = b$, stačí položiť $\mu - 1 = n$ a označiť $\lambda_\nu = \lambda_n$.

P o z n á m k a. Predchádzajúca veta platí aj vtedy, keď z podmienky 2 vynecháme požiadavku monotónnosti funkcií $\Theta(x, \lambda)$ a $Q(x, \lambda)$ podľa parametra λ.

Veta 3. *Ak sú splnené podmienky 1, 2, potom disperzia prvého druhu $\varphi(x, \lambda)$ je klesajúcou funkciou parametra $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_2)$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$.*

D ô k a z. Napíšme diferenciálnu rovnicu (a) pre hodnoty $\lambda_1 < \lambda_2 \in \in (\Delta_0, \Delta_2)$:

$$\begin{aligned} &[\Theta(x, \lambda_1) y']' - Q(x, \lambda_1) y = 0, \\ &[\Theta(x, \lambda_2) z']' - Q(x, \lambda_2) z = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Pre funkcie $\Theta(x, \lambda)$ a $Q(x, \lambda)$ podľa predpokladu platí: $\Theta(x, \lambda_1) \geqq \geqq \Theta(x, \lambda_2)$, $Q(x, \lambda_1) > Q(x, \lambda_2)$.

Nech y a z sú ľubovoľné integrály diferenciálnych rovníc (2). Potom podľa známej Sturmovej *porovnávacej teorémy* medzi každými dvoma nulovými bodmi riešenia y existuje aspoň jeden nulový bod riešenia z. Voľme integrály y a z tak, aby $y(a, \lambda) = z(a, \lambda) = 0$. Potom však platí $\varphi(a, \lambda_1) > > \varphi(a, \lambda_2)$. Všeobecne ak $y(x, \lambda) = z(x, \lambda) = 0$, potom tiež $\varphi(x, \lambda_1) > > \varphi(x, \lambda_2)$. Tým je veta dokázaná.

Veta 4. *Nech sú splnené predpoklady 1, 2, nech ďalej α, α_1, β, β_1 sú buď konštanty, o ktorých platí $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta| + |\beta_1| \neq 0$, alebo spojité funkcie parametra $\lambda \in (\Delta_1, \Delta_2)$ s podmienkou, že buď a) $\alpha(\lambda) \equiv 0$ identicky a $\alpha_1(\lambda) \neq 0$, alebo b) $\alpha(\lambda) \neq 0$ v celom intervale (Δ_1, Δ_2) a $\dfrac{\Theta(a, \lambda) \cdot \alpha_1(\lambda)}{\alpha(\lambda)}$ je nerastúca funkcia parametra λ.*

Analogicky nech platí buď a) $\beta(\lambda) \equiv 0$ pre každé λ a $\beta_1(\lambda) \neq 0$, alebo b) $\beta(\lambda) \neq 0$ v celom intervale (Δ_1, Δ_2) a $\dfrac{\Theta(b, \lambda) \beta_1(\lambda)}{\beta(\lambda)}$ je nerastúca funkcia parametra λ.

Potom existuje nekonečná postupnosť hodnôt parametra λ (tzv. vlastné hodnoty):

$$\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+p}, \ldots,$$

konvergujúca k Δ_2 tej vlastnosti, že ku každej hodnote λ_{n+p} existuje integrál diferenciálnej rovnice (a) $y_{n+p} = y(x, \lambda_{n+p})$ *(tzv. vlastná funkcia) taký, že spĺňa okrajové podmienky:*

$$\alpha_1(\lambda) y(a, \lambda) - \alpha(\lambda) \cdot y'(a, \lambda) = 0 \tag{3}$$

$$\beta_1(\lambda) y(b, \lambda) + \beta(\lambda) \cdot y'(b, \lambda) = 0 \tag{3'}$$

a má v intervale (a, b) $n + p$ nulových bodov.

D ô k a z. Uvažujme integrál diferenciálnej rovnice (a) $y(x, \lambda)$, ktorý spĺňa tieto počiatočné podmienky:

$$y(a, \lambda) = \alpha(\lambda), \quad y'(a, \lambda) = \alpha_1(\lambda).$$

Tento integrál spĺňa podmienku (3).

Nech $\alpha(\lambda) \neq 0$. Z oscilačnej teorémy vyplýva, že k ľubovoľnému prirodzenému číslu μ existuje také $\lambda_\mu \in (\Delta_0, \Delta_2)$, že pre $\lambda = \lambda_\mu$ má $y(x, \lambda)$ v (a, b) aspoň μ koreňov. Nech ich je práve $\nu \geqq \mu$: $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$.

$x_0(\lambda)$ je klesajúcou funkciou parametra λ. Dôkaz tvrdenia vyplýva z prvej Sturmovej porovnávacej teorémy (pozri B ô c h e r, *Leçons sur les méthodes de Sturm*, 59).

$x_0(\lambda)$ je tiež spojitou funkciou parametra λ. Dokážeme to touto úvahou: Zvoľme si ľubovoľné $\lambda_1 \in (\Delta_0, \Delta_2)$. Potom $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_1 -} x_0(\lambda) = \overline{x}_2$ a $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_1 +} x_0(\lambda) = \overline{x}_1$, kde $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in (a, c)$, c je dosť veľké číslo. Ukážeme, že $\overline{x}_1 = x_0 = \overline{x}_2$.[5] Riešenie diferenciálnej rovnice (a) $y(x, \lambda)$ je rovnomerne spojitá funkcia parametra λ. Teda k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pre každú dvojicu, pre ktorú je $|\lambda' - \lambda''| < \delta$ je $|y(x, \lambda') - y(x, \lambda'')| < \varepsilon$, pre každé $x \in (a, c)$. Nech $\Delta_0 < \lambda'' < \lambda_1 < \lambda'$ a $|\lambda'' - \lambda'| < \delta$. Potom $|y[x_0(\lambda''), \lambda'] - y[x_0(\lambda''), \lambda'']| < \varepsilon$. Pretože $y[x_0(\lambda''), \lambda''] = 0$, je $|y[x_0(\lambda''), \lambda']| < \varepsilon$. Nechajme λ'' i λ' blížiť sa k λ_1. V limite dostaneme $y(\overline{x}_2, \lambda_1) = 0$, lebo $\lim\limits_{\lambda'' \to \lambda_1 -} x_0(\lambda'') = \overline{x}_2$.

Podobným spôsobom dokážeme, že $y(\overline{x}_1, \lambda_1) = 0$, pretože $\lim\limits_{\lambda' \to \lambda_1 +} x_0(\lambda') = \overline{x}_1$. Z toho však nevyhnutne vyplýva, že $\overline{x}_1 = x_0 = \overline{x}_2$.

$\varphi_\nu(x_0(\lambda), \lambda]$ je klesajúcou funkciou parametra λ, pretože pre $\lambda_1 < \lambda_2$ platí:

$$x_0(\lambda_1) > x_0(\lambda_2), \quad \varphi_\nu[x_0(\lambda_1), \lambda_1] > \varphi_\nu[x_0(\lambda_1), \lambda_2] > \varphi_\nu[x_0(\lambda_1), \lambda_2].$$

Pre $\lambda = \lambda_\mu$ platí:

$$\varphi_{\nu-1}[x_0(\lambda_\mu), \lambda_\mu] < b \leqq \varphi_\nu[x_0(\lambda_\mu), \lambda_\mu].$$

Z klesania a spojitosti funkcie $\varphi_\nu[x_0(\lambda), \lambda]$ vyplýva, že existuje také $\lambda_\nu \geqq \lambda_\mu$, že $y(x, \lambda_\nu)$ má v (a, b) ν koreňov a jeden koreň v b.
Platí teda: $\varphi_\nu[x_0(\lambda_\nu), \lambda_\nu] = b < \varphi_{\nu+1}[x_0(\lambda_\nu), \lambda_\nu]$.

Takto postupujúc ďalej nájdeme postupnosť hodnôt parametra λ: $\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots$, ktorá má tieto vlastnosti:

1. Integrál $y(x, \lambda_{\nu+p})$ diferenciálnej rovnice (a), ktorý spĺňa podmienku (3), má v (a, b) práve $\nu + p$ koreňov a jeden koreň v b.

2. Pre $\lambda \in (\lambda_{\nu+p}, \lambda_{\nu+p+1})$ integrál diferenciálnej rovnice (a) $y(x, \lambda)$, spĺňajúci podmienku (3), má v (a, b) práve $\nu + p + 1$ koreňov.

Ak $\alpha(\lambda) \equiv 0$, $\alpha_1(\lambda) \neq 0$, postupnosť $\lambda_{\nu+p}$ nájdeme ako vo vete 2.

Ak $\beta(\lambda) \equiv 0$ $(\beta_1(\lambda) \neq 0)$, veta je dokázaná.

Predpokladajme $\beta(\lambda) \neq 0$ v (Δ_1, Δ_2).

Z druhej Sturmovej porovnávacej teorémy (pozri B ô c h e r, *Leçons sur les méthodes de Sturm*, 60) vyplýva, že pre $\lambda \in (\lambda_{\nu+p}, \lambda_{\nu+p+1})$ je $\dfrac{\Theta(b, \lambda) \,.\, y'(b, \lambda)}{y'(b, \lambda)}$

[5] Existencia jednostranných limít vyplýva z monotónnosti funkcie $x_0(\lambda)$.

klesajúcou funkciou parametra λ, a to od $+\infty$ do $-\infty$, pretože $y(b, \lambda_{\nu+p}) = y(b, \lambda_{\nu+p+1}) = 0$. Funkcia $-\frac{\Theta(b, \lambda) \cdot \beta_1(\lambda)}{\beta(\lambda)}$ je podľa predpokladu neklesajúcou funkciou parametra λ. Existuje preto jedna a len jedna hodnota parametra $\lambda = \lambda_{n+p} \in (\lambda_{\nu+p}, \lambda_{\nu+p+1})$ taká, že platí:

$$\frac{\Theta(b, \lambda_{n+p})\, y'(b, \lambda_{n+p})}{y(b, \lambda_{n+p})} = -\frac{\Theta(b, \lambda_{n+p}) \cdot \beta_1(\lambda_{n+p})}{\beta(\lambda_{n+p})}$$

a $y(x, \lambda_{n+p})$ má v (a, b) práve $n + p = \nu + p + 1$ nulových bodov. Po úprave poslednej rovnosti dostávame:

$$\beta_1(\lambda_{n+p}) \cdot y(b, \lambda_{n+p}) + \beta(\lambda_{n+p}) \cdot y'(b, \lambda_{n+p}) = 0$$

a to je okrajová podmienka (3').

Úhrnom sme dostali tento výsledok: K postupnosti

$$\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+p}, \ldots$$

existuje postupnosť vlastných funkcií:

$$y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+p}, \ldots,$$

z ktorých každá spĺňa (3) a (3') a integrál $y_{n+p} = y(x, \lambda_{n+p})$ má v (a, b) práve $n + p$ nulových bodov.

Že postupnosť hodnôt parametra λ konverguje k Δ_2, dokážeme touto úvahou: Z konštrukcie postupnosti vyplýva, že je rastúca a $\lambda_{n+p} < \Delta_2$ pre každé p. Teda musí platiť: $\lim\limits_{p \to \infty} \lambda_{n+p} = d \leqq \Delta_2$. Dajme tomu, že $d < \Delta_2$. Potom by však všetky λ_{n+p} boli menšie ako $d < \Delta_2$, teda v intervale (d, Δ_2) by neexistovala vlastná hodnota parametra λ. To však nie je možné, pretože v tom istom intervale sú splnené všetky predpoklady vety 4, existuje tam preto nekonečne mnoho vlastných hodnôt parametra λ, čo je spor s predpokladom, že $d < \Delta_2$.

III

Doplňme pre ďalšie úvahy predpoklady 1, 2 o diferenciálnej rovnici (a) takto:

3. *Interval* (Δ_1, Δ_2) *nech je teraz interval* $(-\infty, \infty)$ *a o funkcii* $Q(x, \lambda)$ *predpokladajme naviac* $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} Q(x, \lambda) = +\infty$.

Našou najbližšou úlohou je vyšetriť, čo sa deje s disperziou $\varphi(x, \lambda)$ za týchto predpokladov.

Nech $\xi \in [a, \infty)$. Nech $\Delta_0(\xi)$ je infimum tých hodnôt λ, pre ktoré príslušný integrál $y(x, \xi, \lambda)$ diferenciálnej rovnice (a) (o ktorom platí $y(\xi, \xi, \lambda) = 0$) má v $[a, \infty)$ aspoň jeden nulový bod rôzny od ξ. Potom disperzia $\varphi(\xi, \lambda)$ je definovaná pre $\lambda \in (\Delta_0, \infty)$. Ukážeme, že také Δ_0 existuje.

Predovšetkým pre dosť veľké λ je $Q(x, \lambda) < -A^2$, teda existuje λ^{**} také, že pre všetky $\lambda \geqq \lambda^{**}$ je diferenciálna rovnica (a) oscilatorická v (a, ∞). Pre dosť malé λ je $Q(x, \lambda) > A^2$, teda existuje λ^* také, že pre všetky $\lambda \leqq \lambda^*$ $y(x, \xi, \lambda)$ nemá v $[a, \infty)$ nulový bod rôzny od ξ. Pretože množina hodnôt parametra λ, pre ktoré $y(x, \xi, \lambda)$ má aspoň jeden nulový bod rôzny od ξ, je zdola ohraničená, existuje jej infimum $\Delta_0 = \Delta_0(\xi)$.

Z definície Δ_0 vyplýva, že pre $\lambda < \Delta_0$ nemá $y(x, \xi, \lambda)$ ďalší nulový bod väčší ako ξ. Pre $\lambda > \Delta_0$ má $y(x, \xi, \lambda)$ v $[a, \infty)$ aspoň jeden nulový bod rôzny od ξ, pretože z definície Δ_0 vyplýva, že existuje λ_1 ľubovoľne málo väčšie ako Δ_0, a to také, že $y(x, \xi, \lambda_1)$ má nulový bod väčší ako ξ, a keďže pre $\lambda > \lambda_1 > \Delta_0$ platí $Q(x, \lambda_1) > Q(x, \lambda)$, podľa prvej Sturmovej porovnávacej teorémy $\varphi(\xi, \lambda)$ existuje a je dokonca $\varphi(\xi, \lambda) < \varphi(\xi, \lambda_1)$.

Veta 5. *Za predpokladov 1, 2, 3 platí:* $\lim\limits_{\lambda \to \Delta_0+} \varphi(a, \lambda) = +\infty$.

D ô k a z. Uvažujme integrál diferenciálnej rovnice (a) taký, že $y(a, \lambda) = 0$ pre každé λ. $\varphi(a, \lambda)$ je klesajúcou funkciou parametra $\lambda \in (\Delta_0(a), \infty)$. Našou úlohou je dokázať, že klesá od $+\infty$.

$y(x, \lambda)$ je spojitou funkciou parametra $\lambda \in (-\infty, \infty)$, preto platí $\lim\limits_{\lambda \to \Delta_0 \pm} y(x, \lambda) = y(x, \Delta_0)$. Pre $\lambda < \Delta_0$ nemá $y(x, \lambda)$ nulový bod rôzny od a. Ukážeme, že tiež $y(x, \Delta_0)$ nemá nulový bod rôzny od a.

Dajme tomu totiž, že $y(c, \Delta_0) = 0$, kde $a < c < \infty$. Pri prechode bodom c mení $y(x, \Delta_0)$ svoje znamienko. Nech $y(x, \Delta_0) > 0$ pre $x \in (a, c)$, potom pre $x \in (c, c + \omega)$, kde $\omega > 0$ je dosť malé, je $y(x, \Delta_0) < 0$ a nemá v $(c, c + \omega)$ nulový bod.

$y(x, \lambda)$ je rovnomerne spojitou funkciou parametra λ v okolí Δ_0, t. j. k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre $\Delta_0 - \lambda > \delta$ je $|y(x, \lambda) - y(x, \Delta_0)| < \varepsilon$, t. j. $y(x, \Delta_0) - \varepsilon < y(x, \lambda) < y(x, \Delta_0) + \varepsilon$. Položme $0 < \varepsilon < |y(x', \Delta_0)|$, kde $x' \in (c, c + \omega)$. Potom je:

$$y(x', \lambda) < y(x', \Delta_0) + \varepsilon < 0 .$$

Nech $x'' \in (a, c)$ a nech $\varepsilon < y(x'', \Delta_0)$. K takto zvolenému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre $\Delta_0 - \lambda < \delta$ je $0 < y(x'', \Delta_0) - \varepsilon < y(x'', \lambda)$.

Keď si teraz volíme $0 < \varepsilon < \min(|y(x', \Delta_0)|, y(x'' \Delta_0))$, existuje k nemu také $\delta > 0$, že pre $\Delta_0 - \lambda < \delta$ je $y(x', \lambda) < 0$ a $y(x'', \lambda) > 0$. Teda $y(x, \lambda)$ pre $\lambda < \Delta_0$ má nulový bod rôzny od a, a to je spor. Teda $y(x, \Delta_0)$ nemá v $[a, \infty)$ nulový bod rôzny od a.

Predpokladajme, že $\lim\limits_{\lambda \to \Delta_0+} \varphi(a, \lambda) = c' < \infty$. To by však znamenalo, že $\varphi(a, \lambda) < c'$ pre $\lambda > \Delta_0$ ľubovoľne málo blízke k Δ_0. Z rovnomernej spojitosti $y(x, \lambda)$ vzhľadom na parameter λ v okolí Δ_0 vyplýva, že to nie je možné, pretože $y(x, \Delta_0)$ nemá nulový bod rôzny od a, teda $\lim\limits_{\lambda \to \Delta_0} \varphi(a, \lambda) = +\infty$.

Veta 6. *Za predpokladov 1, 2, 3 existuje nekonečne mnoho vlastných hodnôt parametra λ : $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ takých, že ku každému λ_n existuje vlastná funkcia $y_n = y(x, \lambda_n)$, ktorá má v (a, b) práve n nulových bodov a spĺňa okrajové podmienky:*

$$y(a, \lambda_n) = y(b, \lambda_n) = 0 .$$

D ô k a z. Uvažujme integrál diferenciálnej rovnice (a) taký, že $y(a, \lambda) = 0$. Zo Sturmovej oscilačnej teorémy vyplýva, že existuje $\bar{\lambda} \in (\varDelta_0, \infty)$, pre ktoré $y(x, \bar{\lambda})$ má v $(a, b]$ aspoň jeden koreň, teda $\varphi_1(a, \bar{\lambda}) \leqq b$. Podľa predchádzajúcej vety je $\varphi_1(a, \lambda)$ klesajúcou funkciou parametra λ od $+\infty$. Podľa vety 1 je tiež spojitou funkciou parametra λ. Existuje preto práve jedna hodnota parametra $\lambda = \lambda_0$ taká, že $\varphi_1(a, \lambda_0) = b$ a integrál $y(x, \lambda_0)$ nemá v (a, b) nulový bod, ale platí $y(a, \lambda_0) = y(b, \lambda_0) = 0$. Postupujúc ďalej ľahko nájdeme postupnosť hodnôt parametra λ:

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

ku ktorej existuje postupnosť vlastných funkcií: $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ taká, že $y_n = y(x, \lambda_n)$ má v (a, b) práve n nulových bodov a jeden v bode b. Tým je veta dokázaná.

Veta 7. *Za predpokladov uvedených vo vete 4 doplnených predpokladom 3 a za predpokladu $\beta_1(\lambda) . \beta(\lambda) \geqq 0$ existuje nekonečne mnoho vlastných hodnôt parametra λ:*

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

takých, že k ľubovoľnému λ_n existuje vlastná funkcia $y(x, \lambda_n) = y_n$, ktorá má v (a, b) práve n nulových bodov a spĺňa okrajové podmienky (3) *a* (3') *z vety 4.*

D ô k a z. Uvažujme integrál $y(x, \lambda)$, ktorý spĺňa podmienku (3) diferenciálnej rovnice (a). Zo Sturmovej oscilačnej teorémy vyplýva, že existuje $\bar{\lambda} \in (\varDelta_0, \infty)$, pre ktoré $y(x, \bar{\lambda})$ má v $(a, b]$ aspoň jeden koreň, ktorý označíme $x_0(\bar{\lambda})$. Teda platí: $x_0(\bar{\lambda}) \leqq b$.

$x_0(\lambda)$ je spojitou funkciou parametra λ a tiež je klesajúcou funkciou parametra λ od $+\infty$. Dôkaz tohto tvrdenia by sme vykonali celkom podobne ako dôkaz vety 5, stačí nahradiť $\varphi(a, \lambda)$ pomocou $x_0(\lambda)$.

Existuje preto práve jedna hodnota parametra $\lambda = \bar{\lambda}_0 \geqq \bar{\lambda}$, pre ktorú $x_0(\bar{\lambda}_0) = b$. Podobným spôsobom ukážeme, že existuje také $\bar{\lambda}_1$, pre ktoré $\varphi_1[x_0(\bar{\lambda}_1), \bar{\lambda}_1] = b$.

Opakovaním tohto postupu nájdeme postupnosť hodnôt parametra λ: $\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$, ktorá má tieto vlastnosti:

1. Integrál diferenciálnej rovnice (a) $y(x, \bar{\lambda}_n)$, splňujúci podmienku (3), má v (a, b) práve n koreňov a jeden v bode b.

2. Pre všetky $\lambda \in (\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_{n+1})$ má $y(x, \lambda)$ v (a, b) práve $n + 1$ koreňov.

Ak $\beta(\lambda) \equiv 0$, potom je veta dokázaná. Nech $\beta(\lambda) \neq 0$. Uvažujme funkciu $\frac{\Theta(b, \lambda) \cdot y'(b, \lambda)}{y(b, \lambda)}$, ktorá je pre dosť malé λ kladná a s rastúcim λ klesajúca až do $-\infty$, pretože $y(b, \overline{\lambda}_n) = 0$. Podobne $-\frac{\Theta(b, \lambda) \cdot \beta_1(\lambda)}{\beta(\lambda)}$ je podľa predpokladu neklesajúca a pre všetky λ záporná alebo rovná nule. Existuje preto práve jedna hodnota parametra $\lambda = \lambda_0 < \overline{\lambda}_0$, pre ktorú sú si tieto dve funkcie rovné. Tým je však splnená podmienka (3') pre integrál $y(x, \lambda_0) = y_0$, ktorý nemá v (a, b) nulový bod.

Podobne ako vo vete 4 nájdeme postupnosť hodnôt parametra λ: λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$, ku ktorej existuje postupnosť vlastných funkcií:

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots,$$

ktorá má žiadané vlastnosti.

Poznámka 3. Ak predpoklady vety 7 doplníme predpokladom $\Theta(x, \lambda) > M > 0$ pre $x \in [a, b]$ a $\lambda \in (-\infty, \infty)$, môžeme potom vynechať predpoklad $\beta_1(\lambda)\,\beta(\lambda) \geqq 0$, pretože sa dá dokázať, že $\lim_{\lambda \to -\infty} \frac{\Theta(b, \lambda) \cdot y'(b, \lambda)}{y(b, \lambda)} = +\infty$. (Pozri Bôcher, *Méthodes de Sturm*, 65.)

Vypracované v seminári prof. Borůvku.

Došlo do redakcie 11. mája 1953.

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСПЕРЗИЙ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА

МИХАЛ ГРЕГУШ

Выводы

В работе дано доказательство некоторых теорем в области так называемой осцилляционной теоремы Штурма; для доказательства применяется понятие дисперзии, которое недавно ввел в науку проф. Борувка