Tomáš Klein
Styk variet v afinnom priestore

Matematický časopis, Vol. 21 (1971), No. 2, 131--140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126427

Matematický časopis 21 (1971), No. 2

STYK VARIET V AFINNOM PRIESTORE

TOMÁŠ KLEIN, Zvolen

V práci [2] je študovaný styk dvoch variet tej istej dimenzie ležiacich v lineárnom afinnom priestore A_n. V tejto práci zobecníme uvedený postup a budeme sa zaoberať štúdiom variet ľubovoľných dimenzií ležiacich v A_n.

Nech je A_n $(2 \leqq n)$ afinný priestor s afinnou sústavou súradníc

$$\{O, \underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots, \underset{n}{\mathbf{e}}\}\,,^{1}) \tag{1}$$

kde O je počiatok a $\underset{1}{\mathbf{e}}, \underset{2}{\mathbf{e}}, \dots, \underset{n}{\mathbf{e}}$ sú vektory vektorového priestoru V_n pridruženého k priestoru A_n. Kvôli stručnosti budeme užívať Einsteinovu sumačnú konvenciu. Nech h, m sú dve prirodzené čísla, pre ktoré platí

$$1 \leqq h \leqq m < n\,. \tag{2}$$

Budeme predpokladať, že indexy prebiehajú nasledujúce množiny týmto spôsobom: $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a, b \in \{1, 2, \dots, h\}$, $c \in \{1, 2, \dots, m\}$, $s \in \{m + 1, m + 2, \dots, n\}$. Súradnice ľubovoľného bodu $X \in A_n$ vzhľadom k báze (1) budeme označovať $x^1, x^2, \dots, x^n$, stručne x^α a budeme písať $X \equiv [x^\alpha]$. Pre vektor $\mathbf{v} = v^\alpha \underset{\alpha}{\mathbf{e}}$ z V_n budeme užívať stručné označenie (v^α). Ďalej budeme predpokladať, že Ω_h, resp. Ω_m, je h, resp. m-rozmerná oblasť ležiaca v príslušnom h, resp. m — rozmernom aritmetickom priestore súradníc.

V priestore A_n nech sú dané dve regulárne variety triedy C^k [kde k je ľubovoľné pevne zvolené prirodzené číslo]:

$$W_h \equiv \{X \in A_n / x^\alpha = x^\alpha(u^a),\ \{u^a\} \in \Omega_h\}\,, \tag{3}$$

$$W_m \equiv \{X \in A_n / x^\alpha = y^\alpha(z^c),\ \{z^c\} \in \Omega_m\}\,, \tag{4}$$

pri čom predpokladáme, že zobrazenie $\Omega_h \to W_h$, resp. $\Omega_m \to W_m$ definované pomocou (3), resp. (4) je prosté. Ďalej predpokladáme, že variety W_h, W_m majú spoločný bod $\underset{o}{X} \in A_n$, ktorého súradnice $\underset{o}{x}{}^\alpha$ odpovedajú hodnotám $\underset{o}{u}{}^a$ para-

[1] pozri [4] str. 15

metrov u^a variety W_h a hodnotám $\underset{o}{z^c}$ parametrov z^c variety W_m. Označme

$$(5)\qquad B^{\alpha}_{a_1\ldots a_j} = \frac{\partial^j x^{\alpha}}{\partial u^{a_1} \ldots \partial u^{a_j}},$$

$$(6)\qquad D^{\alpha}_{c_1\ldots c_j} = \frac{\partial^j y^{\alpha}}{\partial z^{c_1} \ldots \partial z^{c_j}},$$

kde j je nejaké prirodzené číslo ($1 \leqq j \leqq k$) a čísla $a_1, \ldots, a_j$, resp. $c_1, \ldots, c_j$ sú nejaké vhodné čísla z množiny $\{1, \ldots, h\}$, resp. $\{1, \ldots, m\}$.

Z predpokladu regulárnosti variet W_h, W_m a označenia (5), (6) plynie, že matica $\|B^{\alpha}_a\|$, resp. $\|D^{\alpha}_c\|$, má v každom bode variety W_h resp. W_m maximálnu hodnosť rovnú číslu h, resp. m. V ďalšom budeme používať stručný zápis

$$\underset{o}{B^{\alpha}_a} = B^{\alpha}_a(\underset{o}{u^a}), \quad \underset{o}{D^{\alpha}_c} = D^{\alpha}_c(\underset{o}{z^c}).$$

Nech $(\overset{s}{v^{\alpha}})$ je $n - m$ lineárne nezávislých konštantných vektorov z V_n, pre ktoré matica

$$(7)\qquad \|\underset{o}{B^{\alpha}_a}, \overset{s}{v^{\alpha}}\|,$$

resp.

$$(8)\qquad \|\underset{o}{D^{\alpha}_c}, \overset{s}{v^{\alpha}}\|$$

má maximálnu hodnosť $h + n - m$, resp. n. Nech $\Theta_h \subset \Omega_h$ je okolie $\{\underset{o}{u^a}\}$ v Ω_h. Označme

$$U_h = \{[x^{\alpha}(u^a)]/\{u^a\} \in \Theta_h\}.$$

Je zrejmé, že U_h je okolie bodu $\underset{o}{X}$ na variete W_h. Predpokladajme, že existujú funkcie triedy C^k

$$(9)\qquad z^c = z^c(u^a),\ \{u^a\} \in \Theta_h,$$

$$(10)\qquad \underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}(u^a),\ \{u^a\} \in \Theta_h,$$

pre ktoré platí

$$(11)\qquad y^{\alpha}(z^c(u^a)) = x^{\alpha}(u^a) + \underset{s}{\lambda}(u^a)\overset{s}{v^{\alpha}} \quad \text{pre} \quad \forall\{u^a\} \in \Theta_h$$

a že

(12) $$\pi_h \equiv \{[y^\alpha(z^c(u^a))]/\{u^a\} \in \Theta_h\}$$

je regulárna h-rozmerná varieta triedy C^k. Zobrazenie $W_h \to \pi_h$ popísané rovnicami (11) nech je vzájomne jednoznačné.

Definícia 1. *Nech sú splnené predpoklady (7)—(12). Potom varietu π_h nazveme lokálnym priemetom v okolí bodu $\underset{o}{X}$ variety W_h do variety W_m v danom $n - m$ smere $(\overset{s}{v}{}^\alpha)$.*

Veta 1. *Nech W_h, W_m sú variety v A_n s vlastnosťami vyššie uvedenými. Nech $(\overset{s}{v}{}^\alpha)$ sú vektory z V_n pre ktoré matice (7) a (8) majú maximálne možné hodnosti. Potom existuje taká varieta $\pi_h \subset W_m$, že π_h je lokálny priemet v okolí bodu $\underset{o}{X} \in W_m$ variety W_h do variety W_m v danom $n - m$ smere $(\overset{s}{v}{}^\alpha)$.*

Dôkaz. Položme

$$F^\alpha(u^a, z^c, \underset{s}{\lambda}) = y^\alpha(z^c) - x^\alpha(u^a) - \underset{s}{\lambda}\, \overset{s}{v}{}^\alpha .$$

Hľadané funkcie (9) a (10) zrejme vyhovujú sústave implicitných rovníc

(13) $$F^\alpha(u^a, z^c, \underset{s}{\lambda}) = 0 .$$

Ďalej platí

$$F^\alpha(\underset{o}{u}{}^a, \underset{o}{z}{}^c, \underset{s}{\lambda} = 0) = 0 .$$

Z predpokladov (3), (4), (11) plynie, že funkcie $F^\alpha(u^a, z^c, \underset{s}{\lambda})$ majú v dostatočne malom okolí bodu $[\underset{o}{u}{}^a, \underset{o}{z}{}^c, \underset{s}{\lambda} = 0]$ (príslušného aritmetického priestoru R_{h+n}) spojité parciálne derivácie podľa premenných u^a, z^c, $\underset{s}{\lambda}$ až do k-tého rádu včetne. Použitím (11) a (8) zistíme, že vo všetkých bodoch tohoto okolia platí

(14) $$\left\| \frac{\partial F^\alpha}{\partial z^c}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial \underset{s}{\lambda}} \right\| = \|D^\alpha_c, \; -\overset{s}{v}{}^\alpha\| .$$

Z tohoto a z (8) preto plynie, že matica (14) má vo všetkých uvažovaných bodoch maximálnu hodnosť rovnú číslu n. Z tohoto a z existenčnej vety z teórie implicitných funkcií[2] plynie, že existuje dostatočne malé okolie $\Theta_h \subset \Omega_h$

[2] pozri [1] str. 434

bodu $[\underset{o}{u}^a]$, na ktorom sú definované funkcie (9) a (10), ktoré majú tieto vlastnosti:

a) $\underset{o}{z}^c = z^c(\underset{o}{u}^a)$, $(\underset{s}{\lambda})_o = \underset{s}{\lambda}(\underset{o}{u}^a) = 0$,

(15) b) funkcie (9) a (10) sú triedy C^k,

c) pre $\forall \{u^a\} \in \Theta_h$ platí (11),

d) zobrazenie $W_h \to \pi_h$ [π_k je definovaná rovnicami (12)] definované funkciami (9) a (10) je prosté.

Ostáva ukázať, že π_h je regulárna varieta, t. j. že pre $\forall \{u^a\} \in \Theta_h$ matica $\|\partial y^\alpha/\partial u^a\|$ má maximálnu hodnosť. Pomocou rovníc (11) sa však o tom môžeme ľahko presvedčiť. Q. E. D.

Poznámka 1. Pre totálne diferenciály funkcií (10) j-tého rádu ($0 \leqq j \leqq k$), ktoré sú jednoznačne definované za predpokladov predchádzajúcej vety v dostatočne malom okolí bodu $\{\underset{o}{u}^a\} \in \Omega_h$, zavedieme označenie $\mathrm{d}^j\underset{s}{\lambda}$ resp. $(\mathrm{d}^j\underset{s}{\lambda})_o$, pokiaľ budeme uvažovať totálne diferenciály priamo v bode $[\underset{o}{u}^a]$.

Definícia 2. *Nech sú splnené predpoklady vety 1 a nech naviac platí*

$$(\mathrm{d}^j\underset{s}{\lambda})_o = 0 \tag{16}$$

pre $\forall j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. *Potom hovoríme, že variety* W_h, W_m *majú v spoločnom bode* $\underset{o}{X}$ *styk aspoň k-tého rádu. Ak súčasne je* $(\mathrm{d}^{k+1}\lambda)_o \neq 0$, *potom hovoríme, že uvažované variety majú v bode* $\underset{o}{X}$ *styk práve k-tého rádu.*

Veta 2. *Nech variety* W_h, W_m *majú za predpokladov vyššie uvažovaných v spočnom bode* $\underset{o}{X}$ *styk aspoň k-tého rádu* ($k \geqq 1$). *Potom je tento fakt nezávislý:*

(I) *na voľbe konštantných vektorov* $(\overset{s}{v}{}^\alpha)$ *v rovniciach (11),*

(II) *na voľbe parametrov variet* W_h, W_m,

(III) *na voľbe systému súradného v* A_n.

Prv ako pristúpime k dôkazu tejto vety, urobme túto prípravnú úvahu. Nech vektory $(\overset{s}{v}{}^\alpha)$ vyhovujú podmienke, že matice (7) a (8) majú maximálne možné hodnosti. Nech sú ďalej dané $n - m$ konštantné vektory $(\overset{s}{w}{}^\alpha)$ z V_n také, že analogické matice k (7) a (8)

$$\|\underset{o}{B}{}^\alpha_a, \overset{s}{w}{}^\alpha\|, \quad \|\underset{o}{D}{}^\alpha_c, \overset{s}{w}{}^\alpha\|$$

majú maximálne možné hodnosti rovné číslam $h + n - m$ a n. Podľa vety 1 existuje varieta $\bar{\pi}_h$, ktorá je lokálnym priemetom variety W_h do variety W_m v danom $n - m$ smere $(\overset{s}{w}{}^{\alpha})$. Funkcie, ktoré popisujú zobrazenie $W_h \to \bar{\pi}_h$ v zmysle vyššie uvedenom a ktoré majú analogické vlastnosti k (15), zapíšeme v tvare

$$\bar{z}^c = \bar{z}^c(u^a)\,, \quad \{u^a\} \in \bar{\Theta}_h\,, \tag{17}$$

$$\underset{s}{\bar{\lambda}} = \underset{s}{\bar{\lambda}}(u^a)\,, \quad \{u^a\} \in \bar{\Theta}_h\,. \tag{18}$$

Zrejme platí

$$y^\alpha(\bar{z}^c(u^a)) = x^\alpha(u^a) + \underset{s}{\bar{\lambda}}(u^a)\overset{s}{w}{}^\alpha \quad \text{pre } \forall\, \{u^a\} \in \bar{\Theta}_h\,. \tag{19}$$

Z vety 1 plynie, že funkcie (9), (10) a (17), (18) sú triedy C^k. Má teda zmysel zaviesť nasledujúce označenie:

$$\varphi^c_{a_1\ldots a_j} = \frac{\partial^j z^c}{\partial u^{a_1} \ldots \partial u^{a_j}}\,, \quad \bar{\varphi}^c_{a_1\ldots a_j} = \frac{\partial^j \bar{z}^c}{\partial u^{a_1} \ldots \partial u^{a_j}}\,, \tag{20}$$

$$\underset{s}{\lambda}{}_{a_1\ldots a_j} = \frac{\partial^j \underset{s}{\lambda}}{\partial u^{a_1} \ldots \partial u^{a_j}}\,, \quad \underset{s}{\bar{\lambda}}{}_{a_1\ldots a_j} = \frac{\partial^j \underset{s}{\bar{\lambda}}}{\partial u^{a_1} \ldots \partial u^{a_j}}\,;$$

pre $\forall\, j \in \{1, \ldots, k\}$, pri čom $a_1, \ldots, a_j$ sú čísla z množiny $\{1, \ldots, h\}$.

Dôkaz vety 2. Dôkaz tvrdenia (I) prevedieme úplnou indukciou.

1. Nech variety W_h, W_m majú v spoločnom bode $\underset{o}{X}$ styk prvého rádu definovaný pomocou zobrazenia (11). To však podľa (16) znamená, že

$$(\underset{s}{\lambda})_o = (\mathrm{d}\underset{s}{\lambda})_o = 0$$

resp. [ak použijeme symboliku (20)], že

$$(\underset{s}{\lambda})_o = (\underset{s}{\lambda}{}_a)_o = 0\,. \tag{21}$$

Derivovaním (11) a (19) s použitím (20) dostaneme pre $\{u^a\} \in \Theta_h \cap \bar{\Theta}_h$:

$$D^\alpha_c \varphi^c_a = B^\alpha_a + \underset{s}{\lambda}{}_a \overset{s}{v}{}^\alpha\,,$$

$$D^\alpha_{\bar{c}} \bar{\varphi}^c_a = B^\alpha_a + \underset{s}{\bar{\lambda}}{}_a \overset{s}{w}{}^\alpha\,,$$

kde $D^\alpha_{\bar{c}} = \partial y^\alpha / \partial \bar{z}^c$. Pravda, v spoločnom bode $\underset{o}{X}$ variet W_h, W_m je $\underset{o}{\bar{z}}{}^c = \underset{o}{z}{}^c$

a teda aj $\underset{o}{D}{}^{\alpha}_{\bar{c}} = \underset{o}{D}{}^{\alpha}_{c}$. Potom derivácie vzťahov (11) a (19) s použitím (21) v spoločnom bode $\underset{o}{X}$ budú

$$\underset{o}{D}{}^{\alpha}_{c}\underset{o}{\varphi}{}^{c}_{a} = \underset{o}{B}{}^{\alpha}_{a}\,,$$

$$\underset{o}{D}{}^{\alpha}_{c}\underset{o}{\bar{\varphi}}{}^{c}_{a} = \underset{o}{B}{}^{\alpha}_{a} + (\underset{s}{\bar{\lambda}}_{a})_{o}\overset{s}{\underset{o}{w}}{}^{\alpha}\,.$$

Odčítaním posledných dvoch rovníc je

$$\underset{o}{D}{}^{\alpha}_{c}(\underset{o}{\bar{\varphi}}{}^{c}_{a} - \underset{o}{\varphi}{}^{c}_{a}) = (\underset{s}{\bar{\lambda}}_{a})_{o}\overset{s}{\underset{o}{w}}{}^{\alpha}\,.$$

Vzhľadom k lineárnej nezávislosti vektorov $(\underset{o}{D}{}^{\alpha}_{c})$, $(\overset{s}{\underset{o}{w}}{}^{\alpha})$ je

$$\underset{o}{\bar{\varphi}}{}^{c}_{a} = \underset{o}{\varphi}{}^{c}_{a},\ (\underset{s}{\bar{\lambda}}_{a})_{o} = 0 \quad \text{a teda aj} \quad (\mathrm{d}\underset{s}{\bar{\lambda}})_{o} = 0\,.$$

Dokázali sme teda, že platí

$$(\underset{s}{\lambda})_{o} = (\mathrm{d}\underset{s}{\lambda})_{o} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underset{o}{\varphi}{}^{c}_{a} = \underset{o}{\bar{\varphi}}{}^{c}_{a} \\ (\underset{s}{\bar{\lambda}})_{o} = (\mathrm{d}\underset{s}{\bar{\lambda}})_{o} = 0\,, \end{cases} \tag{22}$$

t. j. variety W_h, W_m majú v spoločnom bode $\underset{o}{X}$ styk prvého rádu aj pri zobrazení (19). Tým je tvrdenie (I) vety 2 dokázané pre $k = 1$.

2. Nech pre styk $(k - 1)$-vého rádu vzhľadom k (22) platí

$$(\mathrm{d}^{j}\underset{s}{\lambda})_{o} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underset{o}{\varphi}{}^{c}_{a_1\ldots a_j} = \underset{o}{\bar{\varphi}}{}^{c}_{a_1\ldots a_j} \\ (\mathrm{d}^{j}\underset{s}{\bar{\lambda}})_{o} = 0\,, \end{cases} \tag{23}$$

pre $\forall j \in \{0, 1, \ldots, k - 1\}$. Parciálnym k-krát iterovaným derivovaním vzťahov (11) a (19) podľa u^a v blízkom okolí spoločného bodu $\underset{o}{X}$ variet W_h, W_m dostaneme

$$D^{\alpha}_{c}\varphi^{c}_{a_1\ldots a_k} + \sum_{1<i\leq k} D^{\alpha}_{c_1\ldots c_i}\,\Phi^{c_1\ldots c_i}_{a_1\ldots a_k} = B^{\alpha}_{a_1\ldots a_k} + \underset{s}{\lambda}_{a_1\ldots a_k}\overset{s}{v}{}^{\alpha}\,, \tag{24}$$

$$D^{\alpha}_{\bar{c}}\bar{\varphi}^{c}_{a_1\ldots a_k} + \sum_{1<i\leq k} D^{\alpha}_{\bar{c}_1\ldots\bar{c}_i}\,\bar{\Phi}^{c_1\ldots c_i}_{a_1\ldots a_k} = B^{\alpha}_{a_1\ldots a_k} + \underset{s}{\bar{\lambda}}_{a_1\ldots a_k}\overset{s}{w}{}^{\alpha}\,,$$

kde $D^{\alpha}_{\bar{c}_1\ldots\bar{c}_i} = \dfrac{\partial^{i} y^{\alpha}}{\partial\bar{z}^{c_1}\ldots\partial\bar{z}^{c_i}}$ a veličiny $\Phi^{c_1\ldots c_i}_{a_1\ldots a_k}$, resp. $\bar{\Phi}^{c_1\ldots c_i}_{a_1\ldots a_k}$, sú súčty súčinov elementov $\varphi^c_{a_1\ldots a_j}$, resp. $\bar{\varphi}^c_{a_1\ldots a_j}$, pre $\forall j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Odtiaľ a z indukčného predpokladu (23) plynie, že v spoločnom bode $\underset{o}{X}$ variet W_h, W_m je

$$\underset{o}{D}{}^\alpha_{c_1\ldots c_i} = \underset{o}{D}{}^\alpha_{\bar{c}_1\ldots\bar{c}_i}, \quad \underset{o}{\Phi}{}^{c_1\ldots c_i}_{a_1\ldots a_k} = \underset{o}{\bar{\Phi}}{}^{c_1\ldots c_i}_{a_1\ldots a_k} \tag{25}$$

pre $1 < i \leqq k$. Ak variety W_h, W_m majú v bode $\underset{o}{X}$ styk k-tého rádu potom musí byť $(\mathrm{d}^j \underset{s}{\lambda})_o = 0$ pre $\forall j \in \{0, 1, \ldots, k\}$, čo je ekvivalentné s predpokladom

$$(\underset{s}{\lambda}_{c_1\ldots c_j})_o = 0 \qquad \text{pre} \quad \forall j \in \{0, 1, \ldots, k\}\,. \tag{26}$$

Potom rovnice (24) vzhľadom k (25) môžeme zapísať v tvare

$$\underset{o}{D}{}^\alpha_c \underset{o}{\varphi}{}^c_{a_1\ldots a_k} + \sum_{1<i\leqq k} \underset{o}{D}{}^\alpha_{c_1\ldots c_i} \underset{o}{\Phi}{}^{c_1\ldots c_i}_{a_1\ldots a_k} = \underset{o}{B}{}^\alpha_{a_1\ldots a_k}\,,$$

$$\underset{o}{D}{}^\alpha_c \underset{o}{\bar{\varphi}}{}^c_{a_1\ldots a_k} + \sum_{1<i\leqq k} \underset{o}{D}{}^\alpha_{c_1\ldots c_i} \underset{o}{\Phi}{}^{c_1\ldots c_i}_{a_1\ldots a_k} = \underset{o}{B}{}^\alpha_{a_1\ldots a_k} + (\underset{o}{\bar{\lambda}}_{a_1\ldots a_k})_o \underset{o}{\overset{s}{w}}{}^\alpha\,.$$

Odčítaním posledných dvoch rovníc je

$$\underset{o}{D}{}^\alpha_c (\underset{o}{\bar{\varphi}}{}^c_{a_1\ldots a_k} - \underset{o}{\varphi}{}^c_{a_1\ldots a_k}) = (\underset{s}{\bar{\lambda}}_{a_1\ldots a_k})_o \underset{s}{\overset{s}{w}}{}^\alpha\,.$$

Vzhľadom k lineárnej nezávislosti vektorov $(\underset{o}{D}{}^\alpha_c)$, $(\underset{o}{\overset{s}{w}}{}^\alpha)$ je

$$\underset{o}{\bar{\varphi}}{}^c_{a_1\ldots a_k} = \underset{o}{\varphi}{}^c_{a_1\ldots a_k}, \quad (\underset{s}{\bar{\lambda}}_{a_1\ldots a_k})_o = 0$$

a teda aj

$$(\mathrm{d}^j \underset{s}{\bar{\lambda}})_o = 0 \quad \text{pre} \quad \forall j \in \{0, 1, \ldots, k\}\,.$$

Tým je tvrdenie (I) vety 2 dokázané.

Dokážeme tvrdenie (II) vety 2. Nech variety W_h, W_m splňajú predpoklady vety 2, nech funkcie (10) majú vlastnosti (15) a nech

$$^*u^a = {}^*u^a(u^b) \quad \text{pre} \quad \forall\, \{u^b\} \in \Theta_h$$

je ľubovoľná regulárna transformácia parametrov variety W_h v okolí bodu $\underset{o}{X}$. Predpokladajme, že v uvažovanom okolí U_h variety W_h existujú spojité parciálne derivácie

$$^*A^a_{b_1\ldots b_j} = \frac{\partial^j {}^*u^a}{\partial u^{b_1} \ldots \partial u^{b_j}} \quad \text{pre}\ \forall j \in \{1, \ldots, k\}\,.$$

Ako vyplýva z dôkazu vety 1 funkcie $\underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}(u^a)$, predstavujú určité skaláry variety W_h nezávisle na transformácii parametrov variety W_m. Definujme

$$\text{(27)} \qquad \underset{s}{{}^*\lambda} = \underset{s}{{}^*\lambda}({}^*u^a) \equiv \underset{s}{\lambda}(u^a({}^*u^b))$$

$$\underset{s}{{}^*\lambda}_{b_1 \ldots b_j} = \frac{\partial^j \underset{s}{{}^*\lambda}}{\partial {}^*u^{b_1} \ldots \partial {}^*u^{b_j}} \quad \text{pre } \forall j \in \{1, \ldots, k\},$$

$$\text{(28)} \qquad C^a_{b_1 \ldots b_j} = \frac{\partial^j u^a}{\partial {}^*u^{b_1} \ldots \partial {}^*u^{b_j}} \quad \text{pre } \forall j \in \{1, \ldots, k\},$$

pričom $b_1, \ldots, b_j$ sú čísla z množiny $\{1, \ldots, h\}$. Z (27) plynie s prihliadnutím k (28) a (26)

$$\text{(29)} \qquad \underset{s}{{}^*\lambda}_{b_1 \ldots b_j} = \underset{s}{\lambda}_{a_1} E^{a_1}_{b_1 \ldots b_j} + \ldots + \underset{s}{\lambda}_{a_1 \ldots a_j} E^{a_1 \ldots a_j}_{b_1 \ldots b_j},$$

kde veličiny $E^{a_1}_{b_1 \ldots b_j}, \ldots, E^{a_1 \ldots a_j}_{b_1 \ldots b_j}$ závisia iba na parciálnych deriváciach $C^a_{b_1}, \ldots, C^a_{b_1 \ldots b_j}$, čo sa dá ľahko overiť metódou úplnej indukcie. Z (26), (27), (29) vyplýva, že ak

$$(\underset{s}{\lambda})_o = (\underset{s}{\lambda}_{a_1})_o = \ldots = (\underset{s}{\lambda}_{a_1 \ldots a_j})_o = 0 \Rightarrow (\underset{s}{{}^*\lambda})_o = (\underset{s}{{}^*\lambda}_{a_1})_o = \ldots = (\underset{s}{{}^*\lambda}_{a_1 \ldots a_j})_o = 0$$

a teda aj

$$(\mathrm{d}^j \underset{s}{\lambda})_o = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{d}^j \underset{s}{{}^*\lambda})_o = 0 \quad \text{pre } \forall j \in \{0, 1, \ldots, k\}.$$

Tým je dokázané tvrdenie (II) vety 2.

Tvrdenie (III) vety 2 je zrejmé. Skaláry $\underset{s}{\lambda}(u^a)$ a ich parciálne derivácie $\underset{s}{\lambda}_{a_1 \ldots a_j}$ sú vnútorné geometrické objekty variety W_h a sú teda nezávislé na voľbe systému súradného v A_n, v ktorom sú variety W_h, W_m. Q. E. D.

Poznámka 2. V prípade $h = m$ variety W_h, W_m majú rovnakú dimenziu. Pri definícii styku v tomto prípade môžeme funkcie $\underset{s}{\lambda}$ definovať pomocou lokálneho priemetu variety W_m do W_h, alebo W_h do W_m. Dá sa ukázať, že v tomto prípade nezáleží na smere premietania. Dôkaz tohoto tvrdenia je v práci [2], veta 1, na str. 173 a je v podstate dôsledkom našej vety 3, ktorú teraz uvedieme.

Veta 3. *Nech W_h, W_m sú variety s vlastnosťami vyššie uvedenými so spoločným bodom $\underset{o}{X}$. Nech varieta π_h z* (12) *je lokálny priemet variety W_h do variety W_m v $n - m$ smere vektorov $(\underset{s}{v}^\alpha)$, ktoré majú vlastnosti* (7) *a* (8). *Potom môžeme* *varietu W_h a varietu π_h vyjadriť pomocou toho istého systému parametrov u^a v tvare*

$$W_h \equiv \{X \in A_n / x^\alpha = x^\alpha(u^a),\ \{u^a\} \in \Omega_h\},$$

$$\pi_h \equiv \{X \in A_n / x^\alpha = \bar{x}^\alpha(u^a),\ \{u^a\} \in \Omega_h\}.$$

Za týchto predpokladov majú variety W_h, W_m v bode $\underset{o}{X}$ styk aspoň -ktého rádu, práve vtedy, ak platí

$$\left(\frac{\partial^j x^\alpha}{\partial u^{a_1} \dots \partial u^{a_j}}\right)_o = \left(\frac{\partial^j \bar{x}^\alpha}{\partial u^{a_1} \dots \partial u^{a_j}}\right)_o \tag{30}$$

pre $\forall\, j \in \{1, \dots, k\}$.

Dôkaz. Nech $(\overset{s}{v}{}^\alpha)$ je ľubovoľný systém $n - m$ konštantných vektorov z V_n s vlastnosťami (7) a (8). Zrejme

$$x^\alpha = x^\alpha(u^a),\ \{u^a\} \in \Omega_h,$$

$$x^\alpha = \bar{x}^\alpha(u^a) \equiv y^\alpha(z^c(u^a)),\ \{u^a\} \in \Omega_h$$

sú rovnice variet W_h, π_h. Identita (11) bude teraz v tvare

$$\bar{x}^\alpha(u^a) = x^\alpha(u^a) + \underset{s}{\lambda}(u^a)\overset{s}{v}{}^\alpha. \tag{31}$$

Nech variety W_h, W_m majú v spoločnom bode $\underset{o}{X}$ styk k-tého rádu ($k > 1$), t. j. platí (16) resp. (26). Parciálnym k-krát iterovaným derivovaním identity (31) s použitím (26) dostaneme vzťahy (30). Dá sa ľahko ukázať, že i obrátene z predpokladov (30) plynie, že variety W_h, W_m majú styk aspoň k-tého rádu. Q. E. D.

Poznámka 3. V odvodzovaní viet by sme mohli pokračovať. Uveďme ako príklad dve vety bez dôkazu:

Ak variety W_h, W_m majú v spoločnom bode styk práve k-tého rádu, potom tiež variety W_h, π_h majú styk práve k-tého rádu.

Alebo:

Nech $1 \leqq g \leqq h \leqq m < n$. Nech W_g, W_h, W_m sú regulárne variety triedy C^k so spoločným bodom $\underset{o}{X}$. Ak W_g, W_h majú v tomto bode styk aspoň k-tého rádu a W_h, W_m majú v tom istom bode styk aspoň k-tého rádu, potom tiež variety W_g, W_m majú v tomto bode tiež styk aspoň k-tého rádu.

LITERATÚRA

[1] Jarník V., *Diferenciální počet II*, NČSAV, Praha 1953.

[2] Nožička F., *O styku variet v afinním lineárním prostoru*, Časop. pěstov. mat., 83 (1958), 171—201.

[3] Рашевский П. К., *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Москва 1967.

[4] Широков П. А. и Широков А. П., *Аффинная дифференциальная геометрия*, Москва 1959.

Došlo 12. 8. 1969.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vysokej školy lesníckej a drevárskej
Zvolen

CONTACT BETWEEN TWO MANIFOLDS IN AFFINE SPACE

Tomáš Klein

Summary

In the paper the contact of at least the order k between the manifolds W_h and W_m $(1 \leqq h \leqq m < n)$ at the common point $\overset{}{\underset{o}{X}}$ in affine space A_n is studied.