MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VII, 3 — 1957

O IZOMORFIZME TOPOLOGICKÝCH GRUPOIDOV

ROBERT ŠULKA
Katedra deskriptívnej geometrie Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

V tomto článku sa budem odvolávať na niektoré vety a definície z článku [3], a preto zachovávam väčšinou aj označenia zo spomenutej práce.

Poznámka 1. Prvky topologického priestoru G budeme označovať $a, b, x, y, z, \ldots$, jeho úplný systém okolí Σ a okolia zo Σ budeme označovať $U, V, W, \ldots$; prvky rozkladu $[G]$ v G alebo na G budeme označovať $A, B, X, Y, Z, \ldots$, úplný systém okolí topologického priestoru $[G]$ budeme označovať Σ^* a okolia zo Σ^* budeme označovať $U^*, V^*, W^*, \ldots$; prvky topologického podpriestoru G' topologického priestoru G budeme označovať $a', b', x', y', z', \ldots$, jeho úplný systém okolí budeme značiť Σ' a okolia zo Σ' označíme $U', V', W', \ldots$ Nech ďalej $G' \sqsubset [G]$ znamená obal podgrupoidu G' v rozklade $[G]$ a $G' \sqcap [G]$ nech znamená prenik podgrupoidu G' s rozkladom $[G]$ (pozri [1]). Prvky z $G' \sqsubset [G]$ označme $A_1, B_1, X_1, Y_1, Z_1, \ldots$ a prvky z $G' \sqcap [G]$ označme $A_2, B_2, X_2, Y_2, Z_2, \ldots$

Nech G je topologický priestor. Nech $[G]$ je topologický rozklad v G (pozri [3]) a G' taká podmnožina v G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$. Nech $U^* \in \Sigma^*$ je také, že $\bigcup_{X \in U^*} X \cap G' \neq \emptyset$. Označme U_1 množinu všetkých tried $X_1 = X \in U^*$, pre ktoré $X \cap G' \neq \emptyset$. Systém všetkých takýchto množín U_1 budeme značiť Σ_1.

Nech G je topologický priestor. Nech $[G]$ je rozklad v G, G' taký topologický podpriestor priestoru G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$ a $G' \sqcap [G]$ nech je topologickým rozkladom v G'. Nech $U' \in \Sigma'$. Označme U_2 množinu všetkých tried $X_2 = X \cap G' \neq \emptyset$, pre ktoré $X \in [G]$ a $X \cap U' = X_2 \cap U' \neq \emptyset$. Systém všetkých takýchto množín U_2 budeme značiť Σ_2.

Nech G je topologický priestor. Nech $[G]$ je rozklad v G, G' taký topologický podpriestor priestoru G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$ a $G' \sqcap [G]$ nech je topologickým rozkladom v G'. Nech $U' \in \Sigma'$. Označme U_1^0 množinu všetkých tried $X_1 = X \in [G]$, pre ktoré $X \cap U' \neq \emptyset$. Systém všetkých takýchto množín U_1^0 budeme značiť Σ_1^0.

Nech G je topologický priestor. Nech $[G]$ je topologický rozklad v G a G' taká podmnožina v G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$. Nech $U^* \in \Sigma^*$, $\bigcup_{X \in U^*} X \cap G' \neq \emptyset$. Označme U_2^0

množinu všetkých tried X_2, pre ktoré $X_2 = X \cap G' \neq 0$ a $X \in U^*$. Systém všetkých takýchto množín U_2^0 budeme značiť Σ_2^0.

Veta 1. *Nech G je topologický priestor, $[G]$ rozklad v G a G' taký podpriestor topologického priestoru G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq 0$. Nech $G' \sqcap [G]$ je topologický rozklad v G'. Potom $G' \sqcap [G]$ je topologickým priestorom pri úplnom systéme okolí Σ_2.*

Dôkaz vyplýva priamo z [3] vety 3.

Veta 2. *Nech G je topologický grupoid, $[G]$ rozklad v G a G' taký topologický podgrupoid topologického grupoidu G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq 0$. Nech $G' \sqcap [G]$ je vytvárajúci topologický rozklad v G'. Potom $G' \sqcap [G]$ je topologickým grupoidom pri úplnom systéme okolí Σ_2. (Dokonca je topologickým faktoroidom.)*

Dôkaz vyplýva priamo z [3] vety 6.

Veta 3. *Nech G je topologický grupoid, $[G]$ rozklad v G a G' taký topologický podgrupoid topologického grupoidu G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq 0$. Nech $G' \sqsubset [G]$ je vytvárajúci rozklad v G a $G' \sqcap [G]$ nech je topologickým rozkladom v G'. Potom $G' \sqsubset [G]$ je topologickým grupoidom pri úplnom systéme okolí Σ_1^0.*

Dôkaz.

1. Je známe, že $G' \sqsubset [G]$ je grupoidom (pozri [1]). Pritom pre každú triedu $X_1 \in G' \sqsubset [G]$ existuje taká trieda $X_2 \in G' \sqcap [G]$, že platí $X_2 = X_1 \cap G' \neq 0$ a tiež naopak ku každej triede $X_2 \in G' \sqcap [G]$ existuje taká trieda $X_1 \in G' \sqsubset [G]$, že $X_2 = X_1 \cap G' \neq 0$.

2. Ďalej dokážeme, že Σ_1^0 je úplným systémom okolí v $G' \sqsubset [G]$ a teda, že $G' \sqsubset [G]$ je topologickým priestorom.

Nech A_1 a B_1 sú ľubovoľné dve triedy z $G' \sqsubset [G]$. Nech A_2 a B_2 sú tie triedy z $G' \sqcap [G]$, pre ktoré platí $A_2 = A_1 \cap G'$ a $B_2 = B_1 \cap G'$. Pretože $G' \sqcap [G]$ je topologický priestor pri úplnom systéme okolí Σ_2, existuje také okolie U_2 triedy A_2, že $A_2 \in U_2$, ale $B_2 \notin U_2$. Nech U' je to okolie zo Σ', že U_2 je práve množinou všetkých tried X_2, pre ktoré $X_2 \cap U' \neq 0$. Označme teraz U^0 množinu všetkých tých tried $X_1 \in G' \sqsubset [G]$, o ktorých platí $X_2 = X_1 \cap G'$, $X_2 \in U_2$. Potom pre $X_1 \in U_1^0$ je $X_1 \cap U' \neq 0$, pretože $X_1 \supset X_2$ a $X_2 \cap U' \neq 0$. Keď však $X_1 \notin U_1^0$, potom $X_1 \cap G' = X_2 \notin U_2$, a teda $X_2 \cap U' = 0$. Z toho však vyplýva, že aj $X_1 \cap U' = 0$, lebo $U' \subset G'$ a potom $0 = X_2 \cap U' = (X_1 \cap G') \cap U' = X_1 \cap (U' \cap G') = X_1 \cap U'$. To znamená, že $X_1 \cap U' \neq 0$ vtedy a len vtedy, ak $X_1 \in U_1^0$. U_1^0 je preto okolím zo Σ_1^0. Ďalej, pretože $A_2 \in U_2$, je $A_1 \in U_1^0$ a pretože $B_2 \notin U_2$, je $B_1 \notin U_1^0$.

Nech A_1 je ľubovoľná trieda z $G' \sqsubset [G]$ a U_1^0 a V_1^0 dve jej okolia. Označme A_2 tú triedu z $G' \sqcap [G]$, pre ktorú je $A_2 = A_1 \cap G'$. Ďalej, nech U', resp. V' sú také okolia zo Σ', že U_1^0, resp. V_1^0 je práve množina všetkých tried X_1, resp. Y_1, pre ktoré $X_1 \cap U' \neq 0$, resp. $Y_1 \cap V' \neq 0$. Nech konečne U_2, resp. V_2 je množina všetkých tých tried X_2, resp. Y_2 z $G' \sqcap [G]$, o ktorých platí $X_2 = X_1 \cap G'$, $X_1 \in U_1^0$, resp. $Y_2 = Y_1 \cap G'$, $Y_1 \in V_1^0$. Potom pre všetky $X_2 \in U_2$, resp. všetky

$Y_2 \in V_2$ je $X_2 \cap U' \neq \emptyset$, resp. $Y_2 \cap V' \neq \emptyset$, pretože zo vzťahov $X_1 \cap U' \neq \emptyset$, $X_2 = X_1 \cap G'$, $U' \subset G'$, resp. $Y_1 \cap V' \neq \emptyset$, $Y_2 = Y_1 \cap G'$, $V' \subset G'$ vyplýva $\emptyset \neq X_1 \cap U' = (X_1 \cap U') \cap G' = (X_1 \cap G') \cap U' = X_2 \cap U'$, resp. $\emptyset \neq Y_1 \cap V' = (Y_1 \cap V') \cap G' = (Y_1 \cap G') \cap V' = Y_2 \cap V'$. Keď však $X_2 \notin U_2$, resp. $Y_2 \notin V_2$, potom $X_1 \cap G' = X_2$, $X_1 \notin U_1^0$, resp. $Y_1 \cap G' = Y_2$, $Y_1 \notin V_1^0$. Teda $X_1 \cap U' = \emptyset$, resp. $Y_1 \cap V' = \emptyset$, a pretože $X_2 \subset X_1$, resp. $Y_2 \subset Y_1$ tak tiež $X_2 \cap U' = \emptyset$, resp. $Y_2 \cap V' = \emptyset$. To znamená, že $X_2 \cap U' \neq \emptyset$, resp. $Y_2 \cap V' \neq \emptyset$ vtedy a len vtedy, ak $X_2 \in U_2$, resp. $Y_2 \in V_2$, čiže U_2 a V_2 sú okolia zo Σ_2. Pretože $A_1 \in U_1^0$, $A_1 \in V_1^0$ a $A_2 = A_1 \cap G'$, je $A_2 \in U_2$ a tiež $A_2 \in V_2$. Pretože však $G' \sqcap [G]$ je topologickým priestorom pri úplnom systéme okolí Σ_2, existuje také okolie $W_2 \in \Sigma_2$, že $A_2 \in W_2 \subset U_2 \cap V_2$. Nech W' je práve také okolie zo Σ', že W_2 je množinou všetkých tried $Z_2 \in G' \sqcap [G]$, pre ktoré $Z_2 \cap W' \neq \emptyset$. Označme W_1^0 množinu všetkých tých tried Z_1 z $G' \sqsubset [G]$, pre ktoré platí $Z_2 = Z_1 \cap G'$, $Z_2 \in W_2$. Pretože $Z_2 \cap W' \neq \emptyset$ a $Z_2 \subset Z_1$ je tiež $Z_1 \cap W' \neq \emptyset$ pre každé $Z_1 \in W_1^0$. Keď $Z_1 \notin W_1^0$, potom $Z_2 = Z_1 \cap G'$, ale $Z_2 \notin W_2$. Preto $Z_2 \cap W' = \emptyset$ a z toho ďalej vyplýva, že $Z_1 \cap W' = \emptyset$, pretože $W' \subset G'$, a teda $\emptyset = Z_2 \cap W' = (Z_1 \cap G') \cap W' = Z_1 \cap (G' \cap W') = Z_1 \cap W'$. Z toho vidíme, že $Z_1 \in W_1^0$ vtedy a len vtedy, keď $Z_1 \cap W' \neq \emptyset$ — preto W_1^0 je okolím zo Σ_1^0. Pretože $A_2 \in W_2$ a $A_2 = A_1 \cap G'$, je $A_1 \in W_1^0$. Treba ešte dokázať, že $W_1^0 \subset U_1^0$ a $W_1^0 \subset V_1^0$. Nech teda $Z_1 \in W_1^0$. Potom $Z_1 \cap G' = Z_2 \in W_2 \subset U_2 \cap V_2$. To znamená, že $Z_1 \cap G' = Z_2 \in U_2$ a tiež $Z_1 \cap G' = Z_2 \in V_2$. Z toho však vyplýva, že $Z_1 \in U_1^0$ a tiež $Z_1 \in V_1^0$ a z toho $W_1^0 \subset U_1^0 \cap V_1^0$.

3. Nakoniec máme dokázať, že ak W_1^0 je ľubovoľné okolie triedy $C_1 = A_1 \odot B_1$ (C_1 je súčinom tried A_1 a B_1), existuje také okolie U_1^0 triedy A_1 a také okolie V_1^0 triedy B_1, že $U_1^0 \odot V_1^0 \subset W_1^0$. Označme zase $A_2 = A_1 \cap G'$, $B_2 = B_1 \cap G'$, $C_2 = C_1 \cap G'$ a W' také okolie zo Σ', že W_1^0 je množinou všetkých tried $Z_1 \in G' \sqsubset [G]$, pre ktoré $Z_1 \cap W' \neq \emptyset$. Nech W_2 je množinou všetkých tried Z_2, pre ktoré platí $Z_2 = Z_1 \cap G'$, $Z_1 \cap W_1^0$. Pretože $Z_1 \cap W' \neq \emptyset$ a $W' \subset G'$, je tiež $Z_1 \cap W' \neq \emptyset$ pre všetky $Z_2 \in W_2$. To vyplýva zo spomenutých vzťahov takto: $\emptyset \neq Z_1 \cap W' = (Z_1 \cap W') \cap G' = (Z_1 \cap G') \cap W' = Z_2 \cap W'$. Keď $Z_2 \notin W_2$, potom $Z_2 = Z_1 \cap G'$, ale $Z_1 \notin W_1^0$. Potom $Z_1 \cap W' = \emptyset$, a pretože $Z_2 \subset Z_1$ je tiež $Z_2 \cap W' = \emptyset$. Je teda $Z_2 \cap W' \neq \emptyset$ vtedy a len vtedy, ak $Z_2 \in W_2$, čiže W_2 je okolím zo Σ_2. Pretože $C_1 \in W_1^0$ a $C_2 = C_1 \cap G'$, je $C_2 \in W_2$. Ďalej zo vzťahov $A_1 \odot B_1 = C_1$, $(A_1 B_1 \subset C_1)$, $A_1 \cap G' = A_2$, $B_1 \cap G' = B_2$, $C_1 \cap G' = C_2$, $G'G' \subset G'$ vyplýva, že $A_2 \odot B_2 = C_2$ (trieda C_2 je súčinom tried A_2 a B_2), pretože $A_2 B_2 = (A_1 \cap G')(B_1 \cap G') \subset A_1 B_1 \cap G' \subset C_1 \cap G' = C_2$ (pozri [1]). Teda W_2 je okolím súčinu tried $A_2 \odot B_2$, a pretože $G' \sqcap [G]$ je topologickým grupoidom pri úplnom systéme okolí Σ_2, existuje také okolie U_2 triedy A_2 a také okolie V_2 triedy B_2, že $U_2 \odot V_2 \subset W_2$. Nech U', resp. V' je také okolie zo Σ', že U_2, resp. V_2 je množinou všetkých tried X_2, resp. Y_2, pre ktoré platí $X_2 \cap U' \neq \emptyset$, resp. $Y_2 \cap V' \neq \emptyset$. Označme U_1^0, resp. V_1^0 množinu všetkých tried X_1, resp. Y_1, pre ktoré $X_2 = X_1 \cap G'$, $X_2 \in U_2$, resp. $Y_2 = Y_1 \cap G'$, $Y_2 \in V_2$, Potom pre každé

$X_1 \in U_1^0$, resp. $Y_1 \in V_1^0$ je $X_1 \cap U' \neq 0$, resp. $Y_1 \cap V' \neq 0$, pretože to vyplýva zo vzťahov $X_2 \cap U' \neq 0$, $X_2 \subset X_1$, resp. $Y_2 \cap V' \neq 0$, $Y_2 \subset Y_1$. Keď $X_1 \notin U_1^0$, resp. $Y_1 \notin V_1^0$, potom $X_2 = X_1 \cap G'$, $X_2 \notin U_2$, resp. $Y_2 = Y_1 \cap G'$, $Y_2 \notin V_2$, teda $X_2 \cap U' = 0$, resp. $X_2 \cap V' = 0$ a z toho ďalej, pretože $U' \subset G'$, resp. $V' \subset G'$ vyplýva $X_1 \cap U' = (X_1 \cap U') \cap G' = (X_1 \cap G') \cap U' = X_2 \cap U' = 0$, resp. $Y_1 \cap V' = (Y_1 \cap V') \cap G' = (Y_1 \cap G') \cap V' = Y_2 \cap V' = 0$. To znamená, že $X_1 \in U_1^0$, resp. $Y_1 \in V_1^0$ vtedy a len vtedy, ak $X_1 \cap U' \neq 0$, resp. $Y_1 \cap V' \neq 0$ — teda U_1^0 a V_1^0 sú okolia zo Σ_1^0. Pretože $A_2 \in U_2$, $A_2 = A_1 \cap G'$, resp. $B_2 \in V_2$, $B_2 = B_1 \cap G'$, je $A_1 \in U_1^0$, resp. $B_1 \in V_1^0$. Máme ešte dokázať, že $U_1^0 \circ V_1^0 \subset W_1^0$. Nech teda $X_1 \circ Y_1 \in U_1^0 \circ V_1^0$. Pretože $X_1 \in U_1^0$ a $Y_1 \in V_1^0$, je $X_1 \cap G' = X_2 \in U_2$ a $Y_1 \cap G' = Y_2 \in V_2$. Potom však $X_2 \circ Y_2 = Z_2 \in W_2$ a Z_1 pre ktoré platí $Z_2 = Z_1 \cap G'$, $Z_2 \in W_2$, je z W_1^0. Zo vzťahu $X_2 \circ Y_2 = Z_2$ vyplýva, že $X_2 Y_2 \subset Z_2$ a ďalej, pretože $Z_1 \supset Z_2$, vzťah $Z_1 \supset Z_2 \supset X_2 Y_2 \neq 0$, čiže $Z_1 \supset X_2 Y_2 \neq 0$. Zo vzťahov $X_2 \subset X_1$, $Y_2 \subset Y_1$ zase vyplýva $X_1 Y_1 \supset X_2 Y_2$. Relácia $Z_1 \supset X_2 Y_2 \neq 0$ a $X_1 Y_1 \supset X_2 Y_2$ dávajú $X_1 Y_1 \cap Z_1 \neq 0$, z čoho ďalej vyplýva $X_1 Y_1 \subset Z_1$ a z toho konečne $X_1 \circ Y_1 = Z_1 \in W_1^0$ (pozri [1]), čo sme mali dokázať.

Poznámka 2. Vo vete 2. môžeme podmienku, aby $G' \sqcap [G]$ bol vytvárajúcim rozkladom v G' nahradiť „silnejšou" podmienkou, aby $G' \sqsubset [G]$, a ebo $[G]$ bol vytvárajúcim rozkladom v G.

Poznámka 3. Vo vete 3. môžeme podmienku, aby $G' \sqsubset [G]$ bol vytvárajúcim rozkladom, nahradiť „silnejšou" podmienkou, aby $[G]$ bol vytvárajúcim rozkladom.

Keď využijeme tieto poznámky, dostaneme takéto obmeny vety 2 a 3:

Veta 2a. *Nech G je topologický grupoid, $[G]$ vytvárajúci rozklad v G a G' taký topologický podgrupoid topologického grupoidu G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq 0$. Nech $G' \sqcap [G]$ je topologický rozklad v G'. Potom $G' \sqcap [G]$ je topologickým grupoidom pri úplnom systéme okolí Σ_2.*

Veta 3a. *Nech G je topologický grupoid, $[G]$ vytvárajúci rozklad v G a G' taký topologický podgrupoid topologického grupoidu G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq 0$. Nech $G' \sqcap [G]$ je topologickým rozkladom v G'. Potom $G' \sqsubset [G]$ je topologickým grupoidom pri úplnom systéme okolí Σ_1^0.*

Definícia 1. *Nech G je topologický grupoid a $[G]$ topologický faktoroid v G. G' nech je taký podgrupoid, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq 0$. Topologický grupoid, ktorého prvky sú triedy z $G' \sqsubset [G]$ a ktorého úplný systém okolí je Σ_1, označme $\mathfrak{G}_1$.*

Definícia 2. *Nech $[G]$ je vytvárajúci rozklad v topologickom grupoide G a G' nech je taký topologický podgrupoid topologického grupoidu G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq 0$. Nech $G' \sqcap [G]$ je topologický rozklad v G'. Topologický grupoid, ktorého prvky sú triedy z $G' \sqcap [G]$ a ktorého úplný systém okolí je Σ_2, označme $\mathfrak{G}_2$.*

Definícia 3. *Nech $[G]$ je vytvárajúci rozklad v topologickom grupoide G*

a G' nech je taký topologický podgrupoid topologického grupoidu G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq 0$. Nech $G' \sqcap [G]$ je topologickým rozkladom v G'. Topologický grupoid, ktorého prvky sú triedy z $G' \sqsubset [G]$ a ktorého úplný systém okolí je Σ_1^0, označme $\mathfrak{G}_1^0$.

Definícia 4. *Nech G je topologický grupoid a $[G]$ topologický faktoroid v G. G' nech je taký podgrupoid, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq 0$. Topologický grupoid, ktorého prvky sú triedy z $G' \sqcap [G]$ a ktorého úplný systém okolí je Σ_2^0, označme $\mathfrak{G}_2^0$.*

Poznámka 4. Existencia topologických grupoidov z definície 1 a 4 bola dokázaná v článku [3].

Skôr ako uvediem niekoľko príkladov, ukážem, že kartézsky súčin $G = G_{(1)} \times G_{(2)}$ dvoch topologických grupoidov $G_{(1)}$ a $G_{(2)}$ je tiež topologickým grupoidom.

Definícia 5. *Nech množina G je kartézskym súčinom topologických grupoidov $G_{(1)}$ a $G_{(2)}$. Označme $U = U_{(1)} \times U_{(2)}$, kde $U_{(1)}$ je z úplného systému okolí $\Sigma_{(1)}$ topologického priestoru $G_{(1)}$ a $U_{(2)}$ je z úplného systému okolí $\Sigma_{(2)}$ topologického priestoru $G_{(2)}$. Systém všetkých takýchto množín U označme Σ.*

Pomocná veta. *Nech G je kartézsky súčin topologických grupoidov $G_{(1)}$ a $G_{(2)}$. Potom G je tiež topologickým grupoidom pri úplnom systéme okolí Σ.*

Dôkaz tejto vety je skoro úplne zhodný s dôkazom pre topologické grupy. Násobenie v G definujme ako pri topologických grupách: súčin dvoch prvkov $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ a $b = (\beta_1, \beta_2)$, kde α_1 a β_1 sú z $G_{(1)}$ a α_2 a β_2 sú z $G_{(2)}$, nech je rovný prvku $c = ab = (\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$. Je známe, že G je topologickým priestorom pri úplnom systéme okolí Σ (pozri [2]). Zostáva dokázať, že ak $c = ab$ je súčinom ľubovoľných dvoch prvkov a a b z G a W je jeho ľubovoľné okolie, existuje také okolie U prvku a a také okolie V prvku b, že $UV \subset W$. Predovšetkým $W = W_{(1)} \times W_{(2)}$, $W_{(1)} \in \Sigma_{(1)}$, $W_{(2)} \in \Sigma_{(2)}$. Pritom $W_{(1)}$ je okolím prvku $\alpha_1\beta_1 \in G_{(1)}$ a $W_{(2)}$ je okolím prvku $\alpha_2\beta_2 \in G_{(2)}$. Pretože $G_{(1)}$ a $G_{(2)}$ sú topologické grupoidy, existujú také okolia $U_{(1)}$ prvku α_1, $V_{(1)}$ prvku β_1, $U_{(2)}$ prvku α_2 a $V_{(2)}$ prvku β_2, že $U_{(1)}V_{(1)} \subset W_{(1)}$ a $U_{(2)}V_{(2)} \subset W_{(2)}$. No $U_{(1)} \times U_{(2)} = U$ je okolím prvku $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ a $V_{(1)} \times V_{(2)} = V$ je okolím prvku $b = (\beta_1, \beta_2)$ a platí $UV = (U_{(1)} \times U_{(2)})(V_{(1)} \times V_{(2)}) = (U_{(1)}V_{(1)}) \times (U_{(2)}V_{(2)}) \subset W_{(1)} \times W_{(2)} = W$.

Príklad 1. Nech $G_{(1)}$ je množina všetkých reálnych čísel $\xi_1 > 0$ a $G_{(2)}$ množina všetkých reálnych čísel $\xi_2 \geqq 0$. $G_{(1)}$ je topologickým grupoidom, ak za operáciu násobenia vezmeme obyčajné sčítanie reálnych čísel a za úplný systém okolí $\Sigma_{(1)}$ v $G_{(1)}$ systém všetkých množín $U_{(1)}$, kde $\xi_1 \in U_{(1)}$ vtedy a len vtedy, ak $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$. $G_{(2)}$ je tiež topologickým grupoidom, ak za operáciu násobenia vezmeme obyčajné sčítanie reálnych čísel a za úplný systém okolí $\Sigma_{(2)}$ v $G_{(2)}$ systém všetkých množín U_2, kde $\xi_2 \in U_{(2)}$ vtedy a len vtedy, ak $0 \leqq \alpha_2 < \xi_2 < \beta_2$ a všetkých množín $U_{(2)}$, kde $\xi_2 \in U_{(2)}$ vtedy a len vtedy, ak $0 \leqq \xi_2 < \beta_2$. Potom podľa dokázaného je aj $G = G_{(1)} \times G_{(2)}$ topologickým grupoidom. Označme G' množinu všetkých prvkov $a = (\alpha_1, 0)$ z G. Pretože v G $ab = (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$, je pre a' a b' z G' $a'b' = (\alpha_1, 0)$ $(\beta_1, 0) = (\alpha_1 + \beta_1, 0)$, a teda G' je podgrupoidom grupoidu G. Preto G' je tiež topologickým grupoidom (pozri [3]). Definujme teraz na G rozklad $[G]$ takto: nech množina $X(\xi_1)$ všetkých prvkov (ξ_1, ξ_2), $(\xi_1 + 1, \xi_2)$, $(\xi_1 + 2, \xi_2)$, ..., kde ξ_1 je pevne zvolené číslo z intervalu $(0, 1\rangle$ a ξ_2 prebieha všetky hodnoty väčšie alebo rovné nule, je prvkom rozkladu $[G]$. A a B nech sú dve triedy rozkladu $[G]$, $(\alpha_1 + k, \alpha_2) \in A$ a $(\beta_1 + l, \beta_2) \in B$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ Potom $(\alpha_1 + k, \alpha_2)(\beta_1 + l, \beta_2) = ((\alpha_1 + \beta_1) + (k + l), \alpha_2 + \beta_2) = (\gamma_1 + n, \gamma_2)$, kde $\gamma_1 \in (0, 1\rangle$, $\gamma_2 \geqq 0$ a $n = k + l$, keď $\alpha_1 + \beta_1 \leqq 1$, resp. $n = k + l + 1$, keď $\alpha_1 + \beta_1 > 1$. Z toho vidieť, že súčin ľubovoľných dvoch prvkov z A a B je vždy prvkom istej triedy C. Rozklad $[G]$ je teda vytvárajúcim rozkladom. Okrem toho ľahko vidieť, že rozklad $[G]$ je topologickým rozkladom v G a že rozklad $G' \sqcap [G]$ je topologickým rozkladom v G' (pozri [3]). Okoliami z úplného systému okolí Σ' topologického priestoru G' sú množiny prvkov $(\xi_1, 0) \in G$, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$. Podľa vety 2a je $\mathfrak{G}_2$ tiež topologickým grupoidom. Prvkami tohto topologického grupoidu sú množiny $X_2(\xi_1)$ prvkov $(\xi_1, 0)$, $(\xi_1 + 1, 0)$, $(\xi_1 + 2, 0)$, ..., kde $\xi_1 \in (0, 1\rangle$. Keď $\beta_1 - \alpha_1 \leqq 1$, okolie $U_2 \in \Sigma_2$ je buď množinou všetkých takých tried $X_2(\xi_1) = \{(\xi_1, 0), (\xi_1 + 1, 0), \ldots\} \in \mathfrak{G}_2$, kde $0 \leqq \varrho_1 < \xi_1 < \sigma_1 \leqq 1$, $\varrho_1 = \alpha_1 - k$, $\sigma_1 = \beta_1 - k$ a k je nezáporné celé číslo, alebo je okolie $U_2 \in \Sigma_2$ množinou všetkých takých tried $X_2(\xi_1) \in \mathfrak{G}_2$, kde pre ξ_1 platí niektorý zo vzťahov $0 < \xi_1 < \sigma_1 \leqq \varrho_1 < 1$, $\varrho_1 < \xi_1 \leqq 1$, pričom $\varrho_1 = \alpha_1 - k$, $\sigma_1 = \alpha_1 - k - 1$ a k je nezáporné celé číslo. Keď $\beta_1 - \alpha_1 > 1$, potom $U_2 = \mathfrak{G}_2$.

Príklad 2. Podľa vety 3a je $\mathfrak{G}_1^0$ topologickým grupoidom. Prvkami tohto topologického grupoidu sú v našom prípade (keď G, G' a $[G]$ sú topologické grupoidy a rozklad z príkladu 1) všetky triedy $X_1 = X \in [G]$. Keď $\beta_1 - \alpha_1 \leqq 1$, okolie $U_1^0 \in \Sigma_1^0$ je buď množinou všetkých takých tried $X_1(\xi_1) = \{(\xi_1, \xi_2), (\xi_1 + 1, \xi_2), \ldots\} \in \mathfrak{G}_1^0$, kde $0 \leqq \varrho_1 < \xi_1 < \sigma_1 \leqq 1$, $\varrho_1 = \alpha_1 - k$, $\sigma_1 = \beta_1 - k$ a k je nezáporné celé číslo, alebo je okolie $U_1^0 \in \Sigma_1^0$ množinou všetkých takých tried $X_1(\xi_1) \in \mathfrak{G}_1^0$, kde pre ξ_1 platí niektorý zo vzťahov $0 < \xi_1 < \sigma_1 \leqq \varrho_1 < 1$, $\varrho_1 < \xi_1 \leqq 1$, pričom $\varrho_1 = \alpha_1 - k$, $\sigma_1 = \alpha_1 - k - 1$ a k je nezáporné celé číslo. Keď $\beta_1 - \alpha_1 > 1$, potom $U_1^0 = \mathfrak{G}_1^0$.

Príklad 3. Nech $G_{(1)}$ je topologický grupoid z príkladu 1. Nech $G_{(2)}$ je množina všetkých reálnych čísel $\xi_2 \geqq 0$. Definujme si v množine $G_{(2)}$ násobenie takto: súčinom dvoch prvkov α_2 a β_2 nech je prvok $\alpha_2 \cdot \beta_2 = \mathrm{Max}\,(\alpha_2, \beta_2)$. $G_{(2)}$ je pri tomto násobení grupoidom. Nech ďalej $U_{(2)}$ značí množinu všetkých prvkov $\xi_2 \in G_{(2)}$, pre ktoré platí $\alpha_2 < \xi_2 < \beta_2$, $\alpha_2, \beta_2 \in G_{(2)}$, alebo nech $U_{(2)}$ značí množinu všetkých prvkov ξ_2, pre ktoré $0 \leqq \xi_2 < \beta_2$, $\beta_2 \in G_{(2)}$. Potom systém $\Sigma_{(2)}$ všetkých takýchto množín $U_{(2)}$ je úplným systémom okolí a $G_{(2)}$ je pri ňom topologickým priestorom. Dokážeme ešte, že $G_{(2)}$ je topologickým grupoidom. Nech α_2 a β_2 sú dva rôzne prvky z $G_{(2)}$, $\alpha_2 < \beta_2$. Nech $W_{(2)}$ je množina všetkých prvkov ζ_2, pre ktoré platí $0 \leqq \alpha_2 \cdot \beta_2 -$

$- \varepsilon_1 < \zeta_2 < \alpha_2 . \beta_2 + \varepsilon_2$, kde ε_1 a ε_2 sú nejaké kladné reálne čísla ($W_{(2)}$ je teda okolie prvku $\alpha_2 . \beta_2$). Pretože však $\alpha_2 < \beta_2$ je $\alpha_2 . \beta_2 = \beta_2$, a teda $W_{(2)}$ je množinou všetkých prvkov ζ_2, pre ktoré platí $0 \leqq \beta_2 - \varepsilon_1 < \zeta < \beta_2 + \varepsilon_2$. Položme $\varepsilon_3 = \min\left(\frac{\beta_2 - \alpha_2}{2}, \varepsilon_1\right)$, za ε_4 zvoľme také kladné reálne číslo, aby $\alpha_2 - \varepsilon_1 \in G_{(2)}$, ak je $\alpha_2 > 0$ a ak $\alpha_2 = 0$, položme $\varepsilon_4 = 0$. Nech ďalej $U_{(2)}$ je množina všetkých prvkov $\xi_2 \in G_{(2)}$, pre ktoré platí $\alpha_2 - \varepsilon_4 \leqq \xi_2 < \alpha_2 + \varepsilon_3$ (znamienko rovnosti berieme, iba ak $\alpha_2 = 0$), a $V_{(2)}$ nech je množina všetkých takých prvkov $\eta_2 \in G_{(2)}$, že $\beta_2 - \varepsilon_3 < \eta_2 < \beta_2 + \varepsilon_2$. Pri tejto voľbe platí $\alpha_2 - \varepsilon_1 < \xi_2 < \alpha_2 + \varepsilon_3 \leqq \beta_2 - \varepsilon_3 < \eta_2 < \beta_2 + \varepsilon_2$ pre všetky $\xi_2 \in U_{(2)}$ a $\eta_2 \in V_{(2)}$, a preto $U_{(2)}V_{(2)} = V_{(2)}$. No $\beta_2 - \varepsilon_3 \geqq \beta_2 - \varepsilon_1$, a preto $W_{(2)} \supset V_{(2)} = U_{(2)}V_{(2)}$. Zostáva ešte dokázať tento vzťah pre prípad, že $\alpha_2 = \beta_2 = \alpha_2 . \beta_2$. Nech $W_{(2)}$ je množinou všetkých prvkov $\zeta_2 \in G_{(2)}$, pre ktoré platí $0 \leqq \alpha_2 . \beta_2 - \varepsilon_1 \leqq \zeta_2 < \alpha_2 . \beta_2 + \varepsilon_2$, pričom ε_1 a ε_2 sú kladné reálne čísla, $\varepsilon_1 = 0$ vtedy a len vtedy, keď $\alpha_2 . \beta_2 = 0$ a druhé znamienko rovnosti platí tiež iba vtedy, keď $\alpha_2 . \beta_2 = 0$. Teraz stačí, keď položíme $U_{(2)} = V_{(2)} = W_{(2)}$ a z toho okamžite vyplýva vzťah $U_{(2)}V_{(2)} \subset W_{(2)}$, čo sme chceli dokázať.

Pretože $G_{(1)}$ a $G_{(2)}$ sú topologické grupoidy, je topologickým grupoidom aj $G = G_{(1)} \times G_{(2)}$. Násobenie v množine G je teraz definované takto: nech $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ a $b = (\beta_1, \beta_2)$ sú dva ľubovoľné prvky z G; potom $a . b = (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \gamma_2)$, kde $\gamma_2 = \mathrm{Max}(\alpha_2, \beta_2)$. Okolie $U \in \Sigma$ je buď množina prvkov $x = (\xi_1, \xi_2)$, ktoré splňujú nerovnosti $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$, $0 \leqq \alpha_2 < \xi_2 < \beta_2$, alebo je okolie $U \in \Sigma$ množina prvkov $x = (\xi_1, \xi_2)$, ktoré splňujú nerovnosti $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$, $0 \leqq \xi_2 < \beta_2$. Označme G' množinu všetkých prvkov $x = (\xi_1, \xi_2) \in G$, kde $\xi_2 = 0$, alebo $\xi_1 = 1$, pričom ak $\xi_2 = 0$, ξ_1 je racionálne číslo, a ak $\xi_2 = 1$, potom $\xi_1 = r_1 + r_2 \sqrt{2}$, kde r_1 a r_2 sú racionálne čísla, $r_1 \geqq 0$, $r_2 > 0$. Ľahko sa presvedčíme, že G' je podgrupoidom grupoidu G, pretože súčet dvoch racionálnych čísel je racionálne číslo, súčet dvoch čísel tvaru $r_1 + r_2 \sqrt{2}$, kde $r_2 > 0$ je číslo toho istého tvaru a súčet racionálneho čísla s číslom tvaru $r_1 + r_2 \sqrt{2}$, $r_2 > 0$ je číslo tvaru $r_1 + r_2 \sqrt{2}$, $r_2 > 0$. G' je teda tiež topologickým grupoidom pri úplnom systéme okolí Σ'. Pozrime sa bližšie, ako vyzerá úplný systém okolí Σ'. Okolie $U' \in \Sigma'$ je buď množina prvkov $x = (\xi_1, 0) \in G$, kde ξ_1 je racionálne číslo, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$, alebo je $U' \in \Sigma'$ množina prvkov $x = (\xi_1, 1)$, kde $\xi_1 = r_1 + r_2 \sqrt{2}$, r_1, r_2 racionálne čísla $r_1 \geqq 0$, $r_2 > 0$, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$, alebo je $U' \in \Sigma'$ množina prvkov $x = (\xi_1, 0)$, ξ_1 racionálne číslo, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$ a všetkých prvkov $x = (\xi_1, 1)$, kde $\xi_1 = r_1 + r_2 \sqrt{2}$, r_1, r_2 racionálne čísla, $r_1 \geqq 0$, $r_2 > 0$, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$.

Ďalej definujeme rozklad $[G]$ na G. Označme $X(\xi_1)$ množinu všetkých prvkov $(\xi_1, \xi_2) \in G$, pre ktoré ξ_1 je konštantné a ξ_2 prebieha všetky hodnoty z $G_{(2)}$. Všetky takéto množiny $X(\xi_1)$ nech sú triedami rozkladu $[G]$. Je zrejmé, že tento rozklad je topologickým rozkladom a ľahko sa dá zistiť, že je tiež vytvárajúcim rozkladom. Preto je $[G]$ topologickým faktoroidom na G, pri úplnom systéme okolí Σ^*. $G' \sqcap [G]$ je teraz systém všetkých jednobodových množín $\{x\}$, kde $x \in G'$. Ľahko vidieť, že $G' \sqcap [G]$ je tiež topologickým rozkladom, a preto $\mathfrak{G}_2$ je topologickým grupoidom. Prvkami z $\mathfrak{G}_2$ sú jednobodové množiny $\{x\}$, kde $x \in G'$ a okolie $U_2 \in \Sigma_2$ je množina prvkov $\{x\}$, kde $x \in U' \in \Sigma'$. Podľa vety 3a je $\mathfrak{G}_1^0$ topologickým grupoidom. Prvkami topologického grupoidu $\mathfrak{G}_1^0$ sú triedy $X_1(\xi_1) = X(\xi_1)$ topologického faktoroidu $[G]$, keď ξ_1 je racionálne číslo, alebo $\xi_1 = r_1 + r_2\sqrt{2}$, r_1, r_2 racionálne čísla $r_1 \geq 0$, $r_2 > 0$. Okoliami zo Σ_1^0 sú množiny tried $X_1(\xi_1)$, kde ξ_1 je racionálne číslo, $0 \leq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$, ďalej sú okoliami zo Σ_1^0 množiny tried $X_1(\xi_1)$, kde $\xi_1 = r_1 + r_2\sqrt{2}$, r_1, r_2 racionálne čísla, $r_1 \geq 0$, $r_2 > 0$, $0 \leq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$ a konečne sú okoliami zo Σ_1^0 tiež množiny tried $X_1(\xi_1)$, kde ξ_1 je racionálne číslo, $0 \leq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$, alebo $\xi_1 = r_1 + r_2\sqrt{2}$, r_1, r_2, racionálne čísla, $r_1 \geq 0$, $r_2 > 0$, $0 \leq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$.

Veta 4. *Topologické grupoidy $\mathfrak{G}_1^0$ a $\mathfrak{G}_2$ sú izomorfné (ako topologické grupoidy).*

Dôkaz. Je známe, že $G' \sqsubset [G]$ a $G' \sqcap [G]$ sú izomorfné ako grupoidy (pozri [1]). Pri tomto izomorfizme f sa každá trieda $X_1 \in G' \sqsubset [G]$ proste zobrazí do tej triedy $f(X_1) = X_2 \in G' \sqcap [G]$, pre ktorú platí $X_2 = X_1 \cap G'$. Stačí teda dokázať spojitosť zobrazenia f a k nemu inverzného zobrazenia f^{-1}.

Nech $A_2 = A_1 \cap G' = f(A_1)$ a U_2 je ľubovoľné okolie triedy A_2. Nech U_1^0 je množina všetkých tried X_1, pre ktoré platí $X_2 = X_1 \cap G'$, $X_2 \in U_2$. Potom je zrejmé, že U_1^0 je okolím zo Σ_1^0 a $A_1 \in U_1^0$. Z toho vyplýva, že $f(U_1^0) \subset U_2$. Skutočne, keď $X_1 \in U_1^0$, vtedy $f(X_1) = X_1 \cap G' = X_2 \in U_2$.

Nech teraz $f^{-1}(A_2) = A_1$, teda A_1 je tá trieda, pre ktorú platí $A_2 = A_1 \cap G'$ a U_1^0 nech je ľubovoľné okolie triedy A_1. Nech U_2 je množinou všetkých tried, pre ktoré platí $X_2 = X_1 \cap G'$, $X_1 \in U_1^0$. Je zrejmé, že U_2 je okolím zo Σ_2 a $A_2 \in U_2$. Odtiaľ vyplýva, že $f^{-1}(U_2) \subset U_1^0$. Vskutku, keď $X_2 \in U_2$, potom $f^{-1}(X_2)$ je tá trieda X_1, pre ktorú platí $X_2 = X_1 \cap G'$, $X_1 \in U_1^0$. Teda $f^{-1}(X_2) = X_1 \in U_1^0$, a to sme mali dokázať.

Príklad 4. Nech $G, G', [G]$, $\mathfrak{G}_2$ a $\mathfrak{G}_1^0$ sú topologické grupoidy z príkladu 1 a 2. Podľa vety 4 $\mathfrak{G}_2$ a $\mathfrak{G}_1^0$ sú izomorfné ako topologické grupoidy.

Príklad 5. Nech $G, G', [G]$, $\mathfrak{G}_2$ a $\mathfrak{G}_1^0$ sú topologické grupoidy z príkladu 3. $\mathfrak{G}_2$ a $\mathfrak{G}_1^0$ sú podľa vety 4 izomorfné ako topologické grupoidy.

Príklad 6. Nech G, G', $\mathfrak{G}_2$ a $\mathfrak{G}_1^0$ sú topologické grupoidy z príkladu 1 a 2. Okoliami $U \in \Sigma$ sú množiny prvkov $(\xi_1, \xi_2) \in G$, splňujúce nerovnosti $0 \leq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$, $0 \leq \alpha_2 < \xi_2 < \beta_2$ a ďalej sú okoliami $U \in \Sigma$ tiež množiny prvkov $(\xi_1, \xi_2) \in G$, splňujúce nerovnosti $0 \leq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$, $0 \leq \xi_2 < \beta_2$. Prvkami priestoru $\mathfrak{G}_1$ sú tie isté triedy X_1, ktoré sú prvkami priestoru $\mathfrak{G}_1^0$ a ľahko možno zistiť, že aj okolia $U_1 \in \Sigma_1$ sú tie isté ako okolia zo Σ_1^0.

Prvkami priestoru $\mathfrak{G}_2^0$ sú tie isté triedy X_2, ktoré sú prvkami priestoru $\mathfrak{G}_2$ a tak isto ľahko zistíme, že aj okolia $U_2^0 \in \Sigma_2^0$ sú tie isté ako okolia zo Σ_2. Z toho vyplýva, že topologické grupoidy $\mathfrak{G}_1$ a $\mathfrak{G}_2^0$ z tohto príkladu sú izomorfné. To vyplýva konečne i z článku [3] vety 11.

Príklad 7. Nech G, G' a $[G]$ sú topologické grupoidy z príkladu 3. Prvkami topologického grupoidu $\mathfrak{G}_1$ sú triedy $X_1(\xi_1) = X(\xi_1) \in [G]$, kde ξ_1 je buď racionálne číslo, $\xi_1 > 0$, alebo $\xi_1 = r_1 + r_2\sqrt{2}$, r_1, r_2 racionálne čísla, $r_1 \geqq 0$, $r_2 > 0$. Okolím zo Σ_1 je množina tried $X_1(\xi_1)$, kde ξ_1 je racionálne číslo, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$, alebo $\xi_1 = r_1 + r_2\sqrt{2}$, r_1, r_2 racionálne čísla, $r_1 \geqq 0$, $r_2 > 0$, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$.

Prvkami topologického grupoidu $\mathfrak{G}_2^0$ sú všetky jednobodové množiny $\{x\}$, $x \in G'$. Okoliami z úplného systému okolí Σ_2^0 sú množiny prvkov $\{x\} = \{(\xi_1, \xi_2)\}$, kde buď $\xi_2 = 0$, ξ_1 racionálne číslo, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$, alebo $\xi_2 = 1$, $\xi_1 = r_1 + r_2\sqrt{2}$, r_1, r_2 racionálne čísla, $r_1 \geqq 0$, $r_2 > 0$, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$.

Podľa vety 11 z článku [3] sú $\mathfrak{G}_1$ a $\mathfrak{G}_2^0$ izomorfné ako topologické grupoidy.

V nasledujúcom príklade ukážem, že keď $[G]$ je topologickým rozkladom v G, nemusí byť ešte $G' \sqcap [G]$ topologickým rozkladom v G'.

Príklad 8. Nech G je topologický grupoid z príkladu 1 a $[G]$ topologický rozklad na G z toho istého príkladu. Nech G' je množina všetkých takých prvkov $x = (\xi_1, 0) \in G$, že ξ_1 je buď racionálne číslo, $0 < \xi_1 \leqq 1$, alebo ξ_1 je reálne číslo $\xi_1 > 1$. Je zrejmé, že G' je podgrupoidom grupoidu G, a teda tiež topologickým grupoidom pri úplnom systéme okolí Σ'. Okolie zo Σ' je buď množinou prvkov $x = (\xi_1, 0)$, kde ξ_1 je reálne číslo, $1 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1$, alebo je okolie zo Σ' množinou prvkov $x = (\xi_1, 0)$, kde ξ_1 je racionálne číslo, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1 \leqq 1$, alebo je okolie zo Σ' množinou prvkov $x = (\xi_1, 0)$, kde ξ_1 je buď racionálne číslo, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 \leqq 1$, alebo ξ_1 je reálne číslo, $1 \leqq \xi_1 < \beta_1$. Nech U' je množinou všetkých prvkov $x = (\xi_1, 0)$, kde ξ_1 je racionálne číslo, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1 \leqq 1$. Ľahko vidieť, že $\bigcup\limits_{X_2 \sqcap U' \neq \emptyset} X_2$ nie je otvorená množina v G', pretože $\bigcup\limits_{X_2 \sqcap U' \neq \emptyset} X_2$ obsahuje práve všetky prvky $x = (\xi_1 + n, 0)$, kde ξ_1 je racionálne číslo, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1 \leqq 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ale $\bigcup\limits_{X_2 \sqcap U' \neq \emptyset} X_2$ neobsahuje žiaden prvok $x = (\xi_1 + n, 0)$, kde ξ_1 je iracionálne číslo, $0 \leqq \alpha_1 < \xi_1 < \beta_1 \leqq 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Nie je teda $G' \sqcap [G]$ topologickým rozkladom na G', napriek tomu, že $[G]$ je topologickým rozkladom na G.

Práve sme videli, že ak $[G]$ je topologickým rozkladom v G, nemusí $G' \sqcap [G]$ byť ešte topologickým rozkladom v G'. Nasledujúca veta dáva odpoveď na otázku, kedy sa tak stane.

Veta 5. *Nech $[G]$ je topologickým rozkladom v topologickom priestore G a G' nech je taký podpriestor topologického priestoru G, že $\bigcup\limits_{X \in [G]} X \sqcap G' \neq 0$. Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby $G' \sqcap [G]$ bol topologickým rozkladom v G' je, aby $\bigcup\limits_{X_2 \sqcap U' \neq \emptyset} X_2$ bola otvorená množina v G' pre každé $U' \in \Sigma'$.*

Dôkaz. Z definície topologického rozkladu priamo vidieť, že táto podmienka je nevyhnutná. Máme ešte dokázať, že táto podmienka je postačujúca. Za tým účelom stačí dokázať, že pre každú triedu $X_2 \in G' \sqcap [G]$ je množina X_2 uzavretá v G'. Skutočne, každá množina $X_2 \in G' \sqcap [G]$ sa dá napísať $X_2 = X \cap G' \neq \emptyset$, $X \in [G]$. No pretože $X \in [G]$ je uzavretá množina v G, je $X_2 = X \cap G'$ uzavretá množina v G', a tým je veta dokázaná.

Príklad 9. Rozklady $[G]$ a $G' \sqcap [G]$ z príkladu 1, 2 a 3 (ich prvky sú prvkami topologických grupoidov $\mathfrak{G}_2$ a $\mathfrak{G}_1^0$ zo spomenutých príkladov) splňujú podmienku vety 5, a preto sú obidva topologickými rozkladmi.

Veta 6. *Nech G je topologický priestor, $[G]$ topologický rozklad v G a G' taký podpriestor topologického priestoru G, že $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq 0$. Nech $G' \sqcap [G]$ je topologický rozklad v G'. Potom identické zobrazenie topologického priestoru $G' \sqcap [G]$ pri úplnom systéme okolí Σ_2 na topologický priestor $G' \sqcap [G]$ pri úplnom systéme okolí Σ_2^0 je spojité.*

Dôkaz. Identické zobrazenie, ktoré každý prvok X_2 z topologického priestoru $G' \sqcap [G]$ pri úplnom systéme okolí Σ_2 zobrazí na ten istý prvok X_2 z topologického priestoru $G' \sqcap [G]$ pri úplnom systéme okolí Σ_2^0, označme f. Nech V_2^0 je ľubovoľné okolie triedy $A_2 = f(A_2) = A \cap G'$ z topologického priestoru $G' \sqcap [G]$, pri úplnom systéme okolí Σ_2^0 a $A \in [G]$. Potom existuje také okolie $V^* \in \Sigma^*$, že V_2^0 je množinou práve všetkých tých tried X_2, pre ktoré $X_2 = X \cap G' \neq \emptyset$ a $X \in V^*$. K okoliu V^* existuje také okolie $V \in \Sigma$, že V^* tvoria práve všetky tie triedy $X \in [G]$, pre ktoré $X \cap V \neq 0$. V_2^0 je teda množinou všetkých tried X_2, pre ktoré $X_2 = X \cap G' \neq 0$, $X \in [G]$ a $X \cap V \neq 0$. Pretože $\bigcup_{X \cap V \neq 0} X$ je otvorená množina v G, je $(\bigcup_{X \cap V \neq 0} X) \cap G'$ otvorená množina v G'. No $(\bigcup_{X \cap V \neq 0} X) \cap G' = \bigcup_{X \cap V \neq 0} (X \cap G') = \bigcup_{X_2 \in V_2^0} X_2$. Pretože $A_2 \in V_2^0$, je $A_2 \subset (\bigcup_{X \cap V \neq 0} X) \cap G'$. Nech $a' \in A_2 \subset (\bigcup_{X \cap V \neq 0} X) \cap G'$, kde $(\bigcup_{X \cap V \neq 0} X) \cap G'$ je otvorená v G'. Potom existuje také okolie $U' \in \Sigma'$ prvku a', že $a' \in U' \subset (\bigcup_{X \cap V \neq 0} X) \cap G' = \bigcup_{X_2 \in V_2^0} X_2$. Potom však $U' \cap X_2 \neq 0$ len pre triedy $X_2 \in V_2^0$. No všetky tie triedy X_2, pre ktoré $U' \cap X_2 \neq 0$ tvoria nejaké okolie $U_2 \in \Sigma_2$ (je to okolie triedy A_2 z topologického priestoru $G' \sqcap [G]$ pri úplnom systéme okolí Σ_2, pretože $0 \neq \{a'\} \subset A_2 \cap U'$). Z predchádzajúceho vyplýva ďalej $U_2 \subset V_2^0$, a pretože $U_2 = f(U_2)$, dostávame $f(U_2) \subset V_2^0$, čo sme mali dokázať.

Poznámka 5. Príklad 3 a 7 ukazuje, že topologické priestory z vety 6 sú skutočne dva rôzne topologické priestory.

Príklad 10. Podľa vety 6 je identické zobrazenie topologického grupoidu $\mathfrak{G}_2$ na topologický grupoid $\mathfrak{G}_2^0$ spojité zobrazenie. Skutočne, keď $\mathfrak{G}_2$ je topologický grupoid z príkladu 3 a $\mathfrak{G}_2^0$ topologický grupoid z príkladu 7, môžeme ku každému okoliu V_2^0 triedy $\{a\} = \{(x_1, x_2)\} \in \mathfrak{G}_2^0$ zvoliť také okolie U_2 triedy $\{a\} = \{(x_1, x_2)\} \in \mathfrak{G}_2$, že $U_2 \subset V_2^0$. Keď totiž $\{a\} = \{(x_1, 0)\}$,

α_1 racionálne číslo a okolie V_2^0 triedy $\{a\}$ je množina všetkých tried $\{x\} = \{(\xi_1, 0)\}$, ξ_1 racionálne číslo, $0 \leqq \gamma_1 < \xi_1 < \delta_1$, $\gamma_1 < \alpha_1 < \delta_1$ a všetkých tried $\{x\} = \{(\xi_1, 1)\}$, $\xi_1 = r_1 + r_2 \sqrt{2}$, r_1, r_2 racionálne čísla, $r_1 \geqq 0$, $r_2 > 0$, $0 \leqq \gamma_1 < \xi_1 < \delta_1$, $\gamma_1 < \alpha_1 < \delta_1$, za okolie U_2 triedy $\{a\}$ stačí zvoliť množinu všetkých tried $\{x\} = \{(\xi_1, 0)\}$, ξ_1 racionálne, $0 \leqq \gamma_1 < \xi_1 < \delta_1$, $\gamma_1 < \alpha_1 < \delta_1$. Keď zase $\{a\} = \{(\alpha_1, 1)\}$, $\alpha_1 = r_1' + r_2' \sqrt{2}$, r_1', r_2' racionálne čísla, $r_1' \geqq 0$, $r_2' > 0$ a V_2^0 je okolie triedy $\{a\}$, definované tak ako v prvom prípade, za okolie U_2 triedy $\{a\}$ stačí zvoliť množinu všetkých tried $\{x\} = \{(\xi_1, 1)\}$, $\xi_1 = r_1 + r_2 \sqrt{2}$, $r_1 . r_2$ racionálne čísla, $r_1 \geqq 0$, $r_2 > 0$, $0 \leqq \gamma_1 < \xi_1 < \delta_1$, $\gamma_1 < \alpha_1 < \delta_1$.

Príklad 11. Ukážeme teraz, že identické zobrazenie topologického grupoidu $\mathfrak{G}_2^0$ na topologický grupoid $\mathfrak{G}_2$ (teda inverzné zobrazenie ku zobrazeniu z predchádzajúceho príkladu), keď $\mathfrak{G}_2^0$ a $\mathfrak{G}_2$ sú topologické grupoidy z príkladu 10, nie je spojité. Nech $\{a\} = \{(\alpha_1, 0)\}$, α_1 racionálne číslo a okolím V_2 triedy $\{a\}$ nech je množina všetkých tried $\{x\} = \{(\xi_1, 0)\}$, ξ_1 racionálne číslo, $0 \leqq \gamma_1 < \xi_1 < \delta_1$, $\gamma_1 < \alpha_1 < \delta_1$. Nech potom akokoľvek zvolíme okolie U_2^0 triedy $\{a\} = \{(\alpha_1, 0)\}$, obsahuje toto okolie vždy nejaké triedy $\{x\} = \{(\xi_1, 1)\}$, $\xi_1 = r_1 + r_2 \sqrt{2}$, r_1, r_2 racionálne čísla, $r_1 \geqq 0$, $r_2 > 0$, $0 \leqq \gamma_1 < \xi_1 < \delta_1$, $\gamma_1 < \alpha_1 < \delta_1$ (ktoré nepatria do V_2) a teda $U_2^0 \not\subset V_2$, čiže naše zobrazenie nie je spojité. Podobne sa to dá dokázať aj v prípade, že $\{a\} = \{(\alpha_1, 1)\}$, $\alpha_1 = r_1' + r_2' \sqrt{2}$, r_1', r_2' racionálne čísla, $r_1' \geqq 0$, $r_2' > 0$.

Z vety 5 a z definície topologického faktoroidu $[G]$ v G (pozri [3]) vyplýva okamžite:

Veta 7. *Nech $\mathfrak{G}_1$ je topologický grupoid z definície 1, alebo nech $\mathfrak{G}_2^0$ je topologický grupoid z definície 4. Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby existoval aj topologický grupoid $\mathfrak{G}_2$ z definície 2 a topologický grupoid $\mathfrak{G}_1^0$ z definície 3, je splnenie podmienky, aby $\bigcup_{X_2 \cap U' \neq \emptyset} X_2$ bola otvorená množina v G', pre každé $U' \in \Sigma'$.*

Veta 8. *Nech $\mathfrak{G}_2$ je topologický grupoid z definície 2 a $\mathfrak{G}_2^0$ topologický grupoid z definície 4. Nevyhnutnou a postačujúcou podmienkou, aby identické zobrazenie topologického grupoidu $\mathfrak{G}_2$ na topologický grupoid $\mathfrak{G}_2^0$ bolo izomorfizmom týchto topologických grupoidov, je spojitosť inverzného zobrazenia k tomuto zobrazeniu.*

Dôkaz vyplýva z vety 6 a definície izomorfizmu dvoch topologických grupoidov.

Veta 9. *Nech $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_1^0$ a $\mathfrak{G}_2^0$ sú topologické grupoidy z definície 1, 2, 3 a 4. Nech identické zobrazenie topologického grupoidu $\mathfrak{G}_2^0$ na $\mathfrak{G}_2$ je spojité. Potom všetky štyri topologické grupoidy $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_1^0$ a $\mathfrak{G}_2^0$ sú izomorfné.*

Dôkaz vyplýva z vety 4, 8 a z článku [3] vety 11.

LITERATÚRA

1. Borůvka O., Úvod do theorie grup, Praha 1952. 2. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы. Москва 1954. 3. Šulka R., Topologické grupoidy, Matematicko-fyzikálny časopis 1955, 10—21.

Došlo 18. 1. 1957.

О ИЗОМОРФИЗМЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППОИДОВ

РОБЕРТ ШУЛКА

Выводы

Пусть G непустое множество с установленной операцией, ставящей в соответствие каждой паре элементов a, $b \in G$ некоторый элемент $c \in G$. Элемент c мы обозначаем ab. Множество G с этой операцией называется группоидом.

Пусть G заданное множество. Пусть Σ система его подмножеств, для которых выполнены следующие условия:

a) Для всяких двух различных точек a и b из G можно найти такое множество U системы Σ, что $a \in U$, $b \notin U$.

b) Для всяких двух множеств U и V системы Σ, содержающих точку $a \in G$, найдется такое множество W системы Σ, что $a \in W \subset U \cap V$.

Такое множество G называется топологическим пространством, и Σ его полной системой окрестностей.

Множество G называется топологическим группоидом если:

a) G есть группоид.

b) G есть топологическое пространство.

c) Если a и b два элемента множества G, то для всякой окрестности W элемента ab найдутся такие окрестности U и V элементов a и b, что $UV \subset W$.

Пусть G топологическое пространство и $[G]$ разбияние в G удовлетворяющее следующим условиям:

a) Если класс $X \in [G]$ то множество $X \subset G$ замкнутое множество в G.

b) $\bigcup\limits_{X \cap U \neq \emptyset} X$ есть открытое множество в G для всякой окрестности $U \in \Sigma$.

Это разбияние будем называть топологическим разбиянием.

Пусть $U \in \Sigma$ и $[G]$ топологическое разбияние в G. Через U^* обозначим множество всех классов $X \in [G]$ для которых выполнено соотношение $X \cap U \neq 0$. Систему всех множеств U^* обозначим через Σ^*.

Пусть разбияние $[G]$ обладает следующим свойством: для всяких двух классов A, $B \in [G]$ найдется такой класс $C \in [G]$, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $ab \in C$.

Тогда $[G]$ является тоже группоидом при операции ставящей в соответствие каждой паре классов A, B класс C. Группоид $[G]$ называется фактороидом и это разбияние производящим разбиянием.

Если G топологический группоид и $[G]$ производящие топологическое разбияние в G, то фактороид $[G]$ является топологическим группоидом и Σ^* его полной системой окрестностей. Топологический группоид $[G]$ мы называем топологическим фактороидом.

Пусть f отображение топологического группоида G на топологический группоид G^* для которого выполнены следующие условия:

a) Отображение f является изоморфным отображением группоида G на группоид G^*.

b) Отображение f является гомеоморфным отображением топологического пространства G на топологическое пространство G^*.

Это отображение называется изоморфным отображением топологического группоида G на топологический группоид G^* и мы говорим, что топологические группоиды G и G^* изоморфны.

Пусть G топологическое пространство и $G' \subset G$. Тогда G' является тоже топологическим пространством, если мы за полную систему окрестностей Σ' поставим систему множеств $U \cap G' \neq 0$, $U \in \Sigma$. Если G является топологическим группоидом, то и G' является ним при полной системе окрестностей Σ' и операции согласной с операцией в G.

Через $G' \sqcap |G|$ обозначим множество всех классов $X_2 = X \cap G' \neq 0$, $X \in |G|$ и через $G' \sqsubset |G|$ обозначим множество всех классов $X \in [G]$, для которых выполнено $X \cap \cap G' \neq 0$.

Пусть G топологическое пространство, $|G|$ разбиянние в G, и G' топологическое подпространство топологического пространства G удовлетворяющее условию $\bigcup\limits_{X \in [G]} X \cap G' \neq 0$.

1. Пусть $|G|$ топологическое разбияние и $U^* \in \Sigma^*$ окрестность, для которой выполнено $\bigcup\limits_{X \in U^*} X \cap G' \neq 0$. Пусть U_1 множество всех классов $X_1 = X \in U^*$ удовлетворяющих условию $X \cap G' \neq 0$. Систему всех множеств U_1 обозначим через Σ_1.

2. Пусть $G' \sqcap |G|$ топологическое разбияние в G' и $U' \in \Sigma'$. Пусть U_2 множество всех классов $X_2 = X \cap G' \neq 0$, для которых $X \in |G|$ и $X \cap U' = X_2 \cap U' \neq 0$. Систему всех множеств U_2 обозначим Σ_2.

3. Пусть $G' \sqcap |G|$ топологическое разбияние в G' и $U' \in \Sigma'$. Пусть U_1^0 множество всех классов $X_1 = X \in [G]$, для которых $X \cap U' \neq 0$. Систему всех множеств U_1^0 обозначим Σ_1^0.

4. Пусть $|G|$ топологическое разбияние и $U^* \in \Sigma^*$ окрестность, для которой выполнено $\bigcup\limits_{X \in U^*} X \cap G' \neq 0$. Пусть U_2^0 множество всех классов X_2 удовлетворяющих условиям $X_2 = X \cap G' \neq 0$ и $X \in U^*$. Систему всех множеств U_2^0 обозначим Σ_2^0.

Если G топологический группоид, $|G|$ производящие топологическое разбияние и G' топологический подгруппоид топологического группоида G, то

1. $|G|$ являетсч топологическим фактороидом и $G' \sqsubset [G]$ топологическим группоидом при полной системе окрестностей Σ_1. Обозначим его $\mathfrak{G}_1$.

2. $G' \sqcap [G]$ является топологическим группоидом и Σ_2 его полной системой окрестностей. Обозначим его $\mathfrak{G}_2$.

3. $G' \sqsubset |G|$ является топологическим группоидом и Σ_1^0 его полной системой окрестностей. Обозначим его $\mathfrak{G}_1^0$.

4. $G' \sqcap |G|$ является топологическим группоидом и Σ_2^0 его полной системой окрестностей. Обозначим его $\mathfrak{G}_2^0$.

Топологические группоиды $\mathfrak{G}_1^0$ и $\mathfrak{G}_2$ **изоморфны** (как топологические группоиды) *и топологические группоиды $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2^0$* ***тоже изоморфны.***

Если существует топологический группоид $\mathfrak{G}_1$ $(\mathfrak{G}_1^0)$, то необходимым и достаточным условием для существования топологического группоида $\mathfrak{G}_2(\mathfrak{G}_1^0)$ является выполнение условия, чтобы $\bigcup\limits_{X_2 \cap U' \neq 0} X_2$ было открытым множеством в G', для всякого $U' \in \Sigma'$.

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы тождественное отображение топологического группоида $\mathfrak{G}_2$ на топологический группоид $\mathfrak{G}_2^0$ было изоморфизмом, является непрерывность обратного отображения. В этом случае все четыре топологические группоиды $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_1^0$, $\mathfrak{G}_2^0$ изоморфны (как топологические группоиды).

ON THE ISOMORPHISM OF TOPOLOGICAL GRUPOIDS

ROBERT ŠULKA

Summary

Let G be a non-empty set with an operation which associates with each pair of elements $a, b \in G$ a third element $c \in G$. The element c we shall denote ab. The set G with this operation we shall call a grupoid.

Let be done a set G . Σ let be a system of subsets of G which satisfies the following conditions:

a) For any two distinct elements $a, b \in G$ there exists a set U of the system Σ which is such that $a \in U$, $b \notin U$.

b) For any two sets U and V of the system Σ which contain the element $a \in G$ there exists a set W of the system Σ which is such thet $a \in W \subset U \cap V$.

Then the set G we call a topological space and the system Σ a complete system of neighborhoods of the space G.

A set G we call a topological grupoid if for G the following conditions are satisfied:

a) G is a grupoid.

b) G is a topological space.

c) If a and b are two elements of the set G, then for every neighborhood W of the element ab there exists a neighborhood U of the element a and a neighborhood V of the element b which are such that $UV \subset W$.

Let be done a topological space G and a decomposition $[G]$ in G which has the following properties:

a) If the class $X \in [G]$ then $X \subset G$ is a closed set in G.

b) Let U be a neighborhood of Σ. Then $\bigcup\limits_{X \cap U \neq \varnothing} X$ is an open set in G.

In this case the decomposition $[G]$ we call a topological decomposition.

Let be $U \in \Sigma$ and $[G]$ a topological decomposition in G. Let U^* denote the set of all classes $X \in [G]$ for which $X \cap U \neq 0$. The system of all sets U^* we shall derote Σ^*.

Let the decomposition $[G]$ have the following property: for any two classes A, $B \in [G]$ there exists a class $C \in [G]$ which is such that $ab \in C$ for each $a \in A$, $b \in B$. Then $[G]$ is also a grupoid with the operation which associates with each pair of classes A, B just the class C. We say that the grupoid $[G]$ is a factoroid in G and the decomposition $[G]$ is a determining decomposition. If G is a topological grupoid and $[G]$ a determining topological decomposition in G then the factoroid $[G]$ is a topological grupoid and Σ^* is its complete system of neighborhoods. We say that the topological grupoid $[G]$ is a topological factoroid.

Let f be a mapping of a topological grupoid G on a topological grupoid G^* which satisfies the following conditions:

a) f is an isomorphic mapping of the grupoid G on the grupoid G^*.

b) f is a homomorphic mapping of the topological space G on the topological space G^*.

Then the mapping f we call an isomorphic mapping of the topological grupoid G on the topological grupoid G^* and say that the topological grupoid G^* is isomorphic with the topological grupoid G.

Let G be a topological space and $G' \subset G$. Then G' is also a topological space, if we take for the complete system of neighborhoods Σ' of G' the system of all sets $U \cap G' \neq 0$, $U \in \Sigma$. If G is a topological grupoid, G' is it too, with the complete system of neighborhoods Σ' and with the same operation like in G.

Let $G' \sqcap [G]$ denote the set of all classes $X_2 = X \cap G' \neq \emptyset$, $X \in [G]$ and $G' \sqsubset [G]$ the set of all classes $X \in [G]$ which are such that $X \cap G' \neq \emptyset$.

Let G be a topological space, $[G]$ a decomposition in G and G' a topological subspace of the space G which is such that $\bigcup_{X \in [G]} X \cap G' \neq \emptyset$.

1. Let $[G]$ be a topological decomposition and $U^* \in \Sigma^*$ such that $\bigcup_{X \in U^*} X \cap G' \neq \emptyset$. Let U_1 be the set of all classes $X_1 = X \in U^*$ which are such that $X \cap G' \neq \emptyset$. The system of all sets U_1 we shall denote Σ_1.

2. Let $G' \sqcap [G]$ be a topological decomposition in G' and $U' \in \Sigma'$. Let U_2 be the set of all classes $X_2 = X \cap G' \neq \emptyset$ which are such that $X \in [G]$ and $X \cap U' = X_2 \cap U' \neq \emptyset$. The system of all these classes U_2 we shall denote Σ_2.

3. Let $G' \sqcap [G]$ be a topological decomposition in G' and $U' \in \Sigma'$. Let U_1^0 be the set of all classes $X_1 = X \in [G]$ which are such that $X \cap U' \neq \emptyset$. The system of all these classes U_1^0 we shall denote Σ_1^0.

4. Let $[G]$ be a topological decomposition and $U^* \in \Sigma^*$ such that $\bigcup_{X \in U^*} X \cap G' \neq \emptyset$. Let U_2^0 be a set of all classes X_2 which are such that $X_2 = X \cap G' \neq \emptyset$ and $X \in U^*$. The system of all these classes we shall denote Σ_2^0.

If G is a topological grupoid, $[G]$ a determining topological decomposition and G' a topological subgrupoid of the topological grupoid G, then

1. $[G]$ is a topological faktoroid and $G' \sqsubset [G]$ is a topological grupoid with the complete system of neighborhoods Σ_1. We denote this topological grupoid $\mathfrak{G}_1$.

2. $G' \sqcap [G]$ is a topological grupoid with the complete system of neighborhoods Σ_2. We denote it $\mathfrak{G}_2$.

3. $G' \sqsubset [G]$ is a topological grupoid with the complete system of neighborhoods Σ_1^0. We denote it $\mathfrak{G}_1^0$.

4. $G' \sqcap [G]$ is a topological grupoid with the complete system of neighborhoods Σ_2^0. We denote it $\mathfrak{G}_2^0$.

Topological grupoids $\mathfrak{G}_1^0$ and $\mathfrak{G}_2$ are isomorphic (as topological grupoids) and topological grupoids $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2^0$ are also isomorphic.

If the topological grupoid $\mathfrak{G}_1(\mathfrak{G}_1^0)$ exists, then the necessary and sufficient condition for the existence of the topological grupoid $\mathfrak{G}_2(\mathfrak{G}_2^0)$ is the fulfilment of the condition, that $\bigcup_{X_2 \cap U' \neq \emptyset} X_2$ be an open set in G' for each $U' \in \Sigma'$.

The necessary and sufficient condition for that the identic mapping of the topological grupoid $\mathfrak{G}_2$ on the topological grupoid $\mathfrak{G}_2^0$ be an isomorphic mapping, is the continuity of the inverse mapping to this mapping. Then all four topological grupoids $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_1^0$, $\mathfrak{G}_2^0$ are isomorphic (as topological grupoids).