Igor Kluvánek
O vektorovej miere

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 7 (1957), No. 3, 186--192

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126420

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VII, 3 — 1957

O VEKTOROVEJ MIERE

IGOR KLUVÁNEK
Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

Tento článok sa zaoberá mierou, ktorej hodnoty sú z Banachovho priestoru. Hlavne je vyšetrovaná otázka, kedy sa dá takáto miera definovaná na algebre rozšíriť na mieru definovanú na σ-algebre.

1. Nech X je ľubovoľný (reálny alebo komplexný) Banachov priestor. X^* je jeho združený priestor (množina všetkých lineárnych spojitých funkcií na X) a X^{**} je združený priestor priestoru X^*. Normu prvku $x \in X$ označíme $| x |$.

Nech S je ľubovoľná neprázdna množina.

Vektorovou mierou nazveme funkciu μ, ktorej obor definície $\boldsymbol{R}$ je algebra podmnožín množiny S, hodnoty sú z X a pre každú postupnosť $\{E_n\} \subset \boldsymbol{R}$ disjunktných množín je $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, ak $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{R}$.

Posledná rovnica znamená, že $\lim_i | \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \sum_{n=1}^{i} \mu(E_n) | = 0$.

Ak hodnoty vektorovej miery sú čísla (X je množina reálnych alebo komplexných čísiel), nazývame ju zovšeobecnenou mierou. Ak zovšeobecnená miera nadobúda iba reálne nezáporné hodnoty, voláme ju jednoducho mierou.

Nech μ je vektorová miera na algebre $\boldsymbol{R}$. Definujme funkciu $\|\mu\|$ na $\boldsymbol{R}$ vzorcom

$$\|\mu\|(E) = \sup | \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) |$$

pre každé $E \in \boldsymbol{R}$, pričom supremum sa berie pre všetky konečné systémy disjunktných množín $E_i \in \boldsymbol{R}$, $E_i \subset E$ a všetky voľby čísiel $| \alpha_i | \leq 1$. Funkciu $\|\mu\|$ voláme polovariáciou vektorovej miery μ.

Zrejme $|\mu(E)| \leq \|\mu\|(E)$ a $\|\mu\| E \leq \|\mu\|(F)$ pre $E \subset F$. Ďalej $\|\mu\|(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \geq$ $\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu\|(E_n)$ pre každú postupnosť $\{E_n\} \subset \boldsymbol{R}$, pre ktorú $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{R}$. Poznamenajme, že $\|\mu\|$ nemusí byť miera.

Budeme hovoriť, že vektorová miera μ splňuje podmienku (A), ak platí tvrdenie:

(A) Existuje konečná miera ν, definovaná na $\boldsymbol{R}$ s vlastnosťou: Ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že $\|\mu\|(E) < \varepsilon$ pre každú množinu $E \in \boldsymbol{R}$, pre ktorú $\nu(E) < \delta$.

2. Veta. *Nech μ je vektorová miera na algebre $\boldsymbol{R}$. Nech $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ je najmenšia σ-algebra nad algebrou $\boldsymbol{R}$. Na σ-algebre $\boldsymbol{S}$ existuje vektorová miera $\bar{\mu}$, pre ktorú $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ pre $E \in \boldsymbol{R}$, vtedy a len vtedy, keď μ splňuje podmienku* (A).

Dôkaz. I. Nech μ splňuje podmienku (A). Mieru ν z tejto podmienky môžeme považovať za definovanú na celej σ-algebre $\boldsymbol{S}$, pretože ju môžeme v prípade potreby z algebry $\boldsymbol{R}$ na σ-algebru $\boldsymbol{S}$ jednoznačne rozšíriť.

Nazvime dve množiny $E, F \in \boldsymbol{S}$ ekvivalentnými, ak $\nu(E \triangle F) = 0$ $(E \triangle F = (E - F) \cup (F - E))$. Táto dohoda splňuje všetky predpoklady ekvivalencie, a preto sa systém $\boldsymbol{S}$ rozpadne na disjunktné triedy navzájom ekvivalentných množín. Označme množinu týchto tried $[\boldsymbol{S}]$ a triedu, v ktorej leží množina E, označme $[E]$. V množine $[\boldsymbol{S}]$ zaveďme nasledovnú metriku ϱ: $\varrho([E], [F]) = \nu(E \triangle F)$.

Množinu tých tried, v ktorých leží aspoň po jednej množine z $\boldsymbol{R}$, označme $[\boldsymbol{R}]$. Z vety o aproximácii miery vyplýva, že $[\boldsymbol{R}]$ je hustá množina v $[\boldsymbol{S}]$ pri metrike ϱ.

Ak sú dve množiny $E, F \in \boldsymbol{R}$ ekvivalentné, zrejme $\|\mu\|(E \triangle F) = 0$, teda $\mu(E) = \mu(F)$. Môžeme preto na $[\boldsymbol{R}]$ definovať funkciu φ tak, že $\varphi([E]) = \mu(E)$, pričom E zvolíme z $\boldsymbol{R}$.

Funkcia φ je rovnomerne spojitá na $[\boldsymbol{R}]$. Aby sme to dokázali, zvoľme $\varepsilon > 0$. Nájdime $\delta > 0$ tak, aby pre $\nu(E) < \delta$ bolo $\|\mu\|(E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ak je $\varrho([E], [F]) = \nu(E \triangle F) < \delta$, je $|\varphi([E]) - \varphi([F])| = |\mu(E) - \mu(F)| = |\mu(E - F) - \mu(F - E)| \leq |\mu(E - F)| + |\mu(F - E)| \leq \|\mu\|(E - F) + \|\mu\|(F - E) \leq 2\|\mu\|(E \triangle F) < \varepsilon$.

Pretože hodnoty funkcie φ sú z úplného priestoru X, z toho, že $[\boldsymbol{R}]$ je hustá množina v $[\boldsymbol{S}]$, vyplýva, že existuje jediná rovnomerne spojitá funkcia $\bar{\varphi}$ definovaná na $[\boldsymbol{S}]$, ktorá sa zhoduje na $[\boldsymbol{R}]$ s φ.

Pre ľubovoľnú množinu $E \in \boldsymbol{S}$ položme $\bar{\mu}(E) = \bar{\varphi}([E])$. Zrejme pre $E \in \boldsymbol{R}$ je $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$. Ukážme, že $\bar{\mu}$ je vektorová miera.

Najskôr dokážeme, že pre $E, F \in \boldsymbol{S}$, $E \cap F = 0$ je $\bar{\mu}(E \cup F) = \bar{\mu}(E) + \bar{\mu}(F)$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. K tomuto ε nájdime $\delta > 0$ tak, aby pre $E, F \in \boldsymbol{S}$, $\nu(E \triangle F) < \delta$ bolo $|\bar{\mu}(E) - \bar{\mu}(F)| < \varepsilon$. Existencia čísla δ vyplýva z rovnomernej spojitosti funkcie $\bar{\varphi}$.

Pre $E, F \in \boldsymbol{S}$, $E \cap F = 0$ nájdeme množiny $E_\varepsilon, F_\varepsilon \in \boldsymbol{R}$ tak, aby $\nu(E \triangle E_\varepsilon) < \frac{\delta}{2}$, $\nu(F \triangle F_\varepsilon) < \frac{\delta}{2}$.

Je $|\bar{\mu}(E) - \mu(E_\varepsilon)| < \varepsilon$, $|\bar{\mu}(F) - \mu(F_\varepsilon)| < \varepsilon$. Ďalej $\nu((E \cup F) \triangle (E_\varepsilon \cup F_\varepsilon)) \leq \nu((E \triangle E_\varepsilon) \cup (F \triangle F_\varepsilon)) < \delta$ teda i $|\bar{\mu}(E \cup F) - \mu(E_\varepsilon \cup F_\varepsilon)| < \varepsilon$.

Ešte si všimnime, že $E_\varepsilon \cap F_\varepsilon \subset (E_\varepsilon - E) \cup (F_\varepsilon - F)$, lebo $E \cap F = \emptyset$, z toho $\nu(E_\varepsilon \cap F_\varepsilon) \leqq \nu(E_\varepsilon - E) + \nu(F_\varepsilon - F) \leqq \nu(E \triangle E_\varepsilon) + \nu(F \triangle F_\varepsilon) < \delta$, čiže $| \mu(E_\varepsilon) + \mu(F_\varepsilon) - \mu(E_\varepsilon \cup F_\varepsilon) | = | \mu(E_\varepsilon \cap F_\varepsilon) | < \varepsilon$.

Môžeme teda napísať odhad $| \bar{\mu}(E) + \bar{\mu}(F) - \bar{\mu}(E \cup F) | \leqq | \bar{\mu}(E) - \mu(E_\varepsilon) | + | \bar{\mu}(F) - \mu(F_\varepsilon) | + | \mu(E_\varepsilon) + \mu(F_\varepsilon) - \mu(E_\varepsilon \cup F_\varepsilon) | + | \mu(E_\varepsilon \cup F_\varepsilon) - \bar{\mu}(E \cup F) | < 4\varepsilon$. Pretože $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, je $\bar{\mu}(E \cup F) = \bar{\mu}(E) + \bar{\mu}(F)$.

Teraz dokážeme: Ak $\{E_n\} \subset \mathbf{S}$ je rastúca postupnosť a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, platí rovnosť $\bar{\mu}(E) = \lim_n \bar{\mu}(E_n)$. Z toho, že $\lim_n \nu(E_n \triangle E) = \lim_n \nu(E - E_n) = 0$ vyplýva, že aj $\lim_n | \bar{\mu}(E_n) - \bar{\mu}(E) | = 0$.

Tým sme dokázali, že $\bar{\mu}$ je vektorová miera na $\mathbf{S}$, lebo pre ľubovoľnú postupnosť $\{E_n\} \subset \mathbf{S}$ disjunktných množín je $\lim_i | \bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \sum_{n=1}^{i} \bar{\mu}(E_n) | = \lim_i | \bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{i} E_n) | = 0$.

II. Nech existuje na $\mathbf{S}$ vektorová miera $\bar{\mu}$ tak, že pre $E \in \mathbf{R}$ je $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$. Máme ukázať, že μ splňuje podmienku (A). Podľa [1], str. 294, vektorová miera $\bar{\mu}$ splňuje podmienku (A), lebo je definovaná na σ-algebre. Zrejme je $\| \bar{\mu} \| (E) \geqq \| \mu \| (E)$ pre každú množinu $E \in \mathbf{R}$, teda μ splňuje podmienku (A) s tou istou mierou ν ako $\bar{\mu}$.

Tým je dôkaz úplný.

Poznamenajme ešte k tejto vete, že vektorová miera $\bar{\mu}$, ak existuje, je určená vektorovou mierou μ jednoznačne. To sa dokáže úplne podobne ako pre mieru, ktorej hodnoty sú čísla.

3. Podľa [1] každá vektorová miera definovaná na σ-algebre splňuje podmienku (A). Vzniká teda otázka, či nesplňuje podmienku (A) každá vektorová miera, ktorá je definovaná iba na algebre. Odpoveď na túto otázku je zá- porná, ako ukazuje nasledujúci príklad.

Nech X je množina reálnych čísiel s absolútnou hodnotou ako normou. S nech je ľubovoľná nespočítateľná množina. Algebra $\mathbf{R}$ nech pozostáva z prázdnej množiny, z konečných množín, z komplementov konečných množín a z množiny S.

Ak $E \in \mathbf{R}$ je konečná množina, kladieme $\mu(E)$ rovné počtu prvkov množiny E. Ak $E \in \mathbf{R}$ je nekonečná množina, t. j. $E = S - F$, kde F je konečná, kladieme $\mu(E) = -\mu(F)$. $\mu(0) = \mu(S) = 0$.

σ-algebra $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ pozostáva z najviac spočítateľných množín a ich komplementov. Zrejme sa nedá μ rozšíriť na σ-algebru $\mathbf{S}(\mathbf{R})$, teda ani nesplňuje podmienku (A).

4. Budeme sa zaoberať otázkou, kedy vektorová miera splňuje podmienku (A).

Nech μ je vektorová miera na algebre $\boldsymbol{R}$. Definujme funkciu $|\mu|$ na $\boldsymbol{R}$ vzorcom

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)|$$

pre každú množinu $E \in \boldsymbol{R}$, kde supremum sa berie pre všetky postupnosti $\{E_n\} \subset \boldsymbol{R}$ disjunktných množín takých, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E$.

$|\mu|$ je miera na algebre $\boldsymbol{R}$ a voláme ju variáciou vektorovej miery μ.

Ak ide o zovšeobecnenú mieru ($\mu(E)$ sú čísla), vtedy pojmy polovariácie a variácie splynú. To je zrejmé z toho, že pre každé $\varepsilon > 0$ existujú disjunktné množiny $E_i \in \boldsymbol{R}$, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \subset E$ tak, že $|\mu|(E) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| = |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)|$ pričom táto rovnosť platí, ak zvolíme α_i tak, že $\alpha_i \mu(E_i) = |\mu(E_i)|$.

Zrejme platí, že $\|\mu\|(E) \leqq |\mu|(E)$ pre každú množinu $E \in \boldsymbol{R}$. Z toho vyplýva:

Ak variácia vektorovej miery μ je konečná, μ splňuje podmienku (A).

5. V [1], str. 293, je dokázané, že polovariácia každej vektorovej miery, definovanej na σ-algebre, je konečná. Z toho vyplýva, že polovariácia každej vektorovej miery μ definovanej i na algebre $\boldsymbol{R}$ je konečná, ak μ splňuje podmienku (A). Takáto miera sa totiž dá rozšíriť na vektorovú mieru $\bar{\mu}$ na σ-algebre $\boldsymbol{S}$ a $\|\mu\|(E) \leqq \|\bar{\mu}\|(E)$ pre $E \in \boldsymbol{R}$.

Čiastočným obrátením tohto tvrdenia je nasledujúca

Veta. *Nech μ je vektorová miera na algebre $\boldsymbol{R}$. Ak priestor X, z ktorého sú hodnoty μ, je reflexívny, t. j. $X = X^{**}$ a polovariácia vektorovej miery μ je konečná, vektorová miera μ splňuje podmienku* (A) *a dá sa rozšíriť na σ-algebru $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$.*

Dôkaz. Dokážeme, že za predpokladov uvedených vo vete sa μ dá rozšíriť na σ-algebru $\boldsymbol{S}$.

Nech $x^* \in X^*$. Funkcia $x^*\mu$ definovaná na $\boldsymbol{R}$ rovnicou $x^*\mu(E) = x^*(\mu(E))$ je zovšeobecnená miera na $\boldsymbol{R}$. Jej variácia $|x^*\mu|$ je konečná, pretože

$$|x^*\mu|(E) = \sup |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x^*\mu(E_i)| \leqq \sup |x^*| \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mu(E_i)\| = |x^*| \|\mu\|(E).$$

Teda pre každé $x^* \in X^*$ existuje zovšeobecnená miera ν_{x^*} na $\boldsymbol{S}$ s konečnou variáciou, pre ktorú platí: Pre $E \in \boldsymbol{R}$ je $\nu_{x^*}(E) = x^*(\mu(E))$.

Nech $E \in \boldsymbol{S}$. Ak definujeme x_E^{**} rovnicou $x_E^{**}(x^*) = \nu_{x^*}(E)$, potom $x_E^{**} \in X^{**}$, t. j. x_E^{**} je lineárna spojitá funkcia na X^*. Pre $E \in \boldsymbol{R}$ je to zrejmé. I to je zrejmé, že x_E^{**} je lineárna pre ľubovoľnú množinu $E \in \boldsymbol{S}$. Stačí teda dokázať: Ak $\lim_n |x_n^*| = 0$, tak $\lim_n x_E^{**}(x_n^*) = 0$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ existuje množina $F_n \in \boldsymbol{R}$ taká, že $|\nu_{x_n^*}(E) - \nu_{x_n^*}(F_n)| < \varepsilon$. Ale $|\nu_{x_n^*}(F_n)| = |x_n^*\mu(F_n)| \leqq |x_n^*| \|\mu(F_n)\| \leqq |x_n^*| \|\mu\|(F_n) \leqq |x_n^*| \|\mu\|(S)$. Ak teraz

$\lim\limits_{n} \| x_n^* \| = 0$, tak aj $\lim\limits_{n} | \nu_{x_n^*}(F_n) | = 0$ a $\limsup\limits_{n} | \nu_{x_n^*}(E) | \leq \varepsilon$. To platí pre každé $\varepsilon > 0$, čím je dokázané, že $x_E^{**} \in X^{**}$. Ale priestor X je reflexívny, preto existuje $x_E \in X$ také, že $x_E^{**}(x^*) = x^*(x_E)$ pre všetky $x^* \in X^*$.

Položme $\bar{\mu}(E) = x_E$. Pre $E \in \boldsymbol{R}$ je $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$. Okrem toho Pettis dokázal [4, str. 283], že funkcia $\bar{\mu}$ na S, s hodnotami v X s tou vlastnosťou, že pre každé $x^* \in X^*$ je $x^*\bar{\mu}$ zovšeobecnená miera, je vektorovou mierou. Ale z toho dôkaz našej vety už okamžite vyplýva.

6. Vo vete z predošlého odseku nemôžeme vypustiť požiadavku, aby bol priestor X reflexívny ako ukazuje nasledujúci príklad.

Nech množina S i algebra $\boldsymbol{R}$ je tá istá ako v **3.** Nech X je množina všetkých reálnych ohraničených funkcií x definovaných na množine S, pričom normu $\| x \|$ kladieme rovnú $\sup\limits_{t \in S} | x(t) |$.

Ak $E \in \boldsymbol{R}$ je konečná množina, položíme $\mu(E) = x_E$, pričom $x_E(t) = 1$, ak $t \in E$, a $x_E(t) = 0$, ak $t \notin E$. Ak $E \in \boldsymbol{R}$ je nekonečná množina, tak $S - E = F$ je konečná a položíme $\mu(E) = -\mu(F)$.

μ je vektorová miera na $\boldsymbol{R}$. Polovariácia $\| \mu \|$ tejto miery vyzerá takto: $\| \mu \| (0) = 0$, $\| \mu \|(E) = 1$, ak $E \neq 0$ je konečná množina, a $\| \mu \| (E) = 2$ pre nekonečné množiny $E \in \boldsymbol{R}$. Polovariácia $\| \mu \|$ je teda konečná. Pritom vektorová miera μ nesplňuje podmienku (A), pretože keby ju splňovala, musela by miera ν z tejto podmienky byť jednak konečná na algebre $\boldsymbol{R}$ a okrem toho by muselo platiť, že $\inf\limits_{0 \neq E \in R} \nu(E) > 0$, čo nie je možné. Priestor X však nie je reflexívny.

7. Podobne ako pri miere definujeme úplnosť vektorovej miery.

Vektorovú mieru μ definovanú na σ-algebre $\boldsymbol{S}$ nazveme úplnou, ak platí: Ak $E \in \boldsymbol{S}$, $\| \mu \| (E) = 0$ a $F \subset E$, tak i $F \in \boldsymbol{S}$, a teda $\| \mu \| (F) = 0$.

Veta. *Nech vektorová miera μ definovaná na algebre $\boldsymbol{R}$ splňuje podmienku* (A). *Existuje σ-algebra $\boldsymbol{S}_1$ a úplná vektorová miera μ_1 na $\boldsymbol{S}_1$ tak, že $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{S}_1$ a $\mu_1(E) = \mu(E)$ pre $E \in \boldsymbol{R}$.*

Dôkaz. Podľa **2** rozšírime mieru μ na σ-algebru $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ a dostaneme mieru $\bar{\mu}$, ktorá sa na $\boldsymbol{R}$ zhoduje s μ. Označme $\boldsymbol{N}$ systém tých množín G, pre ktoré existujú množiny $E \in \boldsymbol{S}$, pričom $G \subset E$ a $\| \bar{\mu} \| (E) = 0$. $\boldsymbol{N}$ je σ-okruh, a ak $G \in \boldsymbol{N}$ a $H \subset G$, tak i $H \in \boldsymbol{N}$.

Označme $\boldsymbol{S}_1$ systém množín tvaru $E \triangle G$, pre $E \in \boldsymbol{S}$ a $G \in \boldsymbol{N}$. $\boldsymbol{S}_1$ je σ-algebra. Ak definujeme $\mu_1(E \triangle G) = \bar{\mu}(E)$, μ_1 je úplná vektorová miera na $\boldsymbol{S}_1$ a $\mu_1(E) = \mu(E)$ pre $E \in \boldsymbol{R}$.

Rozšírenie vektorovej miery μ na úplnú vektorovú mieru μ_1 opísané v tejto vete je najmenšie v tomto zmysle. Ak μ_2 na $\boldsymbol{S}_2$ je iné také rozšírenie, ktoré vyhovuje vete, potom $\boldsymbol{S}_1 \subset \boldsymbol{S}_2$ a $\mu_2(E) = \mu_1(E)$ pre $E \in \boldsymbol{S}_1$.

8. Nech $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}_1$, μ a μ_1 majú taký význam ako v **7.** Označme $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{R})$ (resp. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$) systém všetkých množín E tvaru $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ (resp. $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$), pričom $E_n \in \boldsymbol{R}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$

Veta. *Ku každej množine* $E \in \mathbf{S}_1$ *a každému číslu* $\varepsilon > 0$ *existuje*

1. *množina* $C \in \boldsymbol{R}$,
2. *množiny* $G \in \mathbf{G}$, $F \in \boldsymbol{F}$,

pričom platí:

1. $\| \mu_1 \| (E \triangle C) < \varepsilon$,
2. $F \subset E \subset G$ a $\| \mu_1 \| (G - E) < \varepsilon$, $\| \mu_1 \| (E - F) < \varepsilon$.

Dôkaz. Pretože μ_1 je definovaná na σ-algebre, $\mathbf{S}_1$ splňuje podmienku (A). Existuje teda taká miera ν, že pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\| \mu_1 \| (E) < \varepsilon$, ak $\nu(E) < \delta$.

1. Nájdime množinu $C \in \boldsymbol{R}$ tak, aby $\nu(E \triangle C) < \delta$. Pre množinu C bude $\| \mu_1 \| (E \triangle C) < \varepsilon$.

2. Podobne nájdime množiny $F \in \boldsymbol{F}$ a $G \in \mathbf{G}$, $F \subset E \subset G$, aby $\nu(G - E) < \delta$ a $\nu(E - F) < \delta$, z čoho ihneď dostávame tvrdenie vety.

LITERATÚRA

1. Bartle R. G., Dunford N., Schwartz J., Weak compactness and vector measures, Canadian J. Math. 7 (1955), 289—305. 2. Halmos P. R., Measure theory, New York 1950. 3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, Москва 1954. 4. Pettis B. J., On integration in vector spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938) 277—304.

Došlo 4. 4. 1957 (v inej forme 20. 11. 1956).

О ВЕКТОРНОЙ МЕРЕ

ИГОР КЛУВАНЕК

Выводы

В этой статье доказаны некоторые теоремы о расширении векторной меры.

Векторная мера — это счетноаддитивная функция μ определенная на алгебре $\boldsymbol{R}$ подмножеств некоторого множества S; принимающая значения из некоторого пространства Банаха X, т. е. если $\{E_n\}$ последовательность непересекающихся множеств из $\boldsymbol{R}$ такая, что $\bigcup E_n \in \boldsymbol{R}$, то $\lim | \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \sum_{n=1}^{i} \mu(E_n) | = 0$

Пусть $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\boldsymbol{R})$ наименьшая σ-алгебра содержащая $\boldsymbol{R}$. Справедливы следующие теоремы:

На $\mathbf{S}$ существует векторная мера $\bar{\mu}$, являющаяся продолжением μ (т. е. $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ для $E \in \boldsymbol{R}$) тогда и только тогда, если существует неотрицательная конечная мера ν на $\boldsymbol{R}$ такая, что $\lim_{\nu(E)\to 0} \| \mu \| (E) = 0$ ($\| \mu \|$ обозначает полувариацию μ, см. [1]).

Если пространство X рефлективно и полувариация $\| \mu \|$ векторной меры μ конечна на $\boldsymbol{R}$, то существует конечная неотрицательная мера ν такая, что $\lim_{\nu(E)\to 0} \| \mu \| (E) = 0$.

Построен пример векторной меры показающий, что условие рефлективности пространства X в последней теореме нельзя отбросить.

ON VECTOR MEASURE

IGOR KLUVÁNEK

Summary

In this paper some theorems concerning extension of vector measure are proved.

A vector measure is a σ-additive function μ defined on algebra $\boldsymbol{R}$ of subsets of an abstract set S, with values in a (real or complex) Banach space X, i. e., if $\{E_i\}$ is any sequence of disjoint sets $\in \boldsymbol{R}$ and $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{R}$, then $\lim_i | \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \sum_{n=1}^{i} \mu(E_n) | = 0$.

Let $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\boldsymbol{R})$ be the minimal σ-algebra over $\boldsymbol{R}$.

The following theorems hold.

There exists a vector measure $\bar{\mu}$ on $\mathbf{S}$, which is extension of (i. e., $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ for $E \in \boldsymbol{R}$) if and only if there exists a finite non-negative measure ν on $\boldsymbol{R}$ such that $\lim_{\nu(E)\to 0} || \mu || (E) = 0$ ($|| \mu ||$ denotes the semivariation of μ, see [1]).

If the space X is reflexive and the semivariation $|| \mu ||$ of μ is finite on $\boldsymbol{R}$, then there exists a finite non-negative measure ν on $\boldsymbol{R}$, such that $\lim_{\nu(E)\to 0} || \mu || (E) = 0$.

An example of vector measure is constructed, showing that the requirement of reflexivity of X in the last theorem, must not be omitted.