V. A. Baranskij; A. N. Trahtman

О подполугрупповых графах

Matematický časopis, Vol. 20 (1970), No. 2, 135--140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126375

Matematický časopis 20 (1970), No. 2

О ПОДПОЛУГРУППОВЫХ ГРАФАХ

В. А. БАРАНСКИЙ, А. Н. ТРАХТМАН, Свердловск (СССР)

Под графом мы будем понимать неориентированный граф без петель и кратных ребер.

Пусть $\mathscr{S}$ — произвольная система множеств. Под графом $G(\mathscr{S})$ системы $\mathscr{S}$ (как и в работе [1]) мы понимаем граф, множеством вершин которого является $\mathscr{S}$, и две вершины A, $B \in \mathscr{S}$ смежны (связаны ребром) тогда и только тогда, когда $A \neq B$ и $A \cap B \neq \emptyset$. Если $\mathscr{S}$ есть система всех истинных подполугрупп данной полугруппы Γ, то $G(\mathscr{S})$ будем называть *подполугрупповым графом* полугруппы Γ и будем обозначать его через $G(\Gamma)$. Подполугрупповые графы, повидимому, впервые рассматривались в работе Ю. Босака [1], где для них использовался термин «граф полугруппы». Поскольку полугруппе естественным образом можно сопоставить различные графы, мы считаем, что наш термин предпочтительнее.

В работе [1] были сформулированы следующие проблемы:

1. Существует ли полугруппа более чем с двумя элементами, подполугрупповой граф которой несвязен?

2. Найти необходимые и достаточные условия для графа быть подполугрупповым графом полугруппы (или конечной полугруппы, или периодической полугруппы, или коммутативной полугруппы и т. д.).

Первая из этих проблем недавно отрицательно решена Б. Понделичеком (см. [5]). Авторами независимо также получено решение этой проблемы. Настоящая же работа посвящена изложению результатов, касающихся второй из указанных проблем. Именно, нами установлено, что упомянутые в формулировке этой проблемы условия не могут быть элементарными, т. е. не могут быть сформулированы в терминах узкого исчисления предикатов. Более точно, справедлива следующая теорема, являющаяся основным результатом данной работы.

Теорема 1. *Пусть K — класс полугрупп, содержащий полугруппу, обладающую сильным разбиением на счетное множество подполугрупп, каждая из которых есть либо циклическая группа простого порядка, либо нильпотентная двухэлементная полугруппа. Тогда класс всех графов* *изоморфных подполугрупповым графом полугрупп из K арифметически незамкнут, а поэтому и неаксиоматизируем.*

Из теоремы 1 вытекает, в частности, неаксиоматизируемость классов графов, изоморфных подполугрупповым графам всех полугрупп, коммутативных полугрупп, периодических полугрупп и т. д.

Напомним необходимые определения. Разбиение полугруппы Γ на подполугруппы $H_i (i \in I)$ называется сильным (см. [4]), если для любых $i, j \in I (i \neq j)$ и для любых подполугрупп A, B ($A \subseteq H_i$, $B \subseteq H_j$) множество $A \cup B$ является подполугруппой. В частности, последовательно аннулирующая связка (см. [3], стр. 446) является сильным разбиением. Класс моделей $\mathscr{P}$ произвольной (вообще бесконечной) сигнатуры σ называется аксиоматизируемым, если характеристические свойства его моделей могут быть описаны на языке узкого исчисления предикатов с равенством (УИП), т. е. если существует такая, вообще бесконечная, система замкнутых формул УИП сигнатуры σ, что $\mathscr{P}$ содержит те и только те модели сигнатуры σ, на которых все формулы этой системы истинны (см. [2], стр. 173). Модели $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{S}_2$ называются арифметически эквивалентными (УИП — неразличимыми) если каждая замкнутая формула УИП, сигнатура которой входит в сигнатуру $\mathscr{S}_1$, истинная на одной из моделей $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$, является истинной и на другой (см. [2], стр. 177). Класс моделей $\mathscr{P}$ называется арифметически замкнутым, если каждая модель арифметически эквивалентная модели класса $\mathscr{P}$ сама принадлежит классу $\mathscr{P}$. Операцию порождения в полугруппе будем обозначать острыми скобками, так, $\langle x \rangle$ будем обозначать циклическую полугруппу порожденную элементом x. Множество, состоящее из элементов x, y, $\ldots$, будем обозначать через $\{x, y, \ldots\}$.

Приступим к доказательству теоремы 1. Для доказательства нам понадобятся два графа G_1 и G_2, которые мы построим ниже. Пусть N—множество всех целых положительных чисел. Через $\mathscr{S}(N)$ будем обозначать множество всех непустых подмножеств N. Если $a \in \mathscr{S}(N)$, то через 2^a будем обозначать множество всех подмножеств a.

Построим граф G_1. Каждому $a \in \mathscr{S}(N)$ поставим в соответствие множество R_a^1 равномощное 2^a. Считаем, что если $a \neq b (a, b \in \mathscr{S}(N))$, то $R_a^1 \cap R_b^1 = \emptyset$. Основным множеством графа G_1 будем считать множество $\bigcup\limits_{a \in \mathscr{S}(N)} R_a^1$, а отношение смежности на нем определим следующим образом: если $\alpha \in R_a^1$, $\beta \in R_b^1$, $\alpha \neq \beta$, то α и β смежны тогда и только тогда, когда $a \cap b \neq \emptyset$.

Замечание 1. Рассмотрим следующий пример. Пусть L—структура, являющаяся прямым произведением счетного множества трехэлементных цепей. Рассмотрим граф G, вершинами которого служат отличные от нуля и единицы элементы L, и две различные вершины из G смежны тогда и только тогда, когда в L их пересечение отлично от нуля. Легко проверить что G изоморфен G_1.

Построим граф G_2. Каждому $a \in \mathscr{S}(N)$ поставим в соответствие множество R_a^2 такое, что

1. если a — конечное подмножество N, то R_a^2 равномощно 2^a;
2. если a — счетное подмножество N, то R_a^2 — счетное множество.

Считаем, что если $a \neq b (a, b \in \mathscr{S}(N))$, то $R_a^2 \cap R_b^2 = \emptyset$. Основным множеством графа G_2 будем считать множество $\bigcup\limits_{a \in \mathscr{S}(N)} R_a^2$, а отношение смежности (которое условимся сбозначать для G_2 через $\sim$) на нем определим следующим образом: если $\alpha \in R_a^2$, $\beta \in R_b^2$, $\alpha \neq \beta$, то $\alpha \sim \beta$ тогда и только тогда, когда $a \cap b \neq \emptyset$.

Замечание 2. G_1 и G_2 арифметически эквивалентны.

Это утверждение следует непосредственно из теоремы Тайманова (см. [2], стр. 177).

Лемма 1. *Пусть Γ — полугруппа, обладающая сильным разбиением на счетное множество подполугрупп, каждая из которых есть либо циклическая группа простого порядка, либо нильпотентная двухэлементная полугруппа. Тогда подполугрупповой граф полугруппы Γ изоморфен G_1.*

Доказательство. По теореме 1 работы [4] структура L всех (включая пустую) подполугрупп полугруппы Γ изоморфна прямому произведению структур всех подполугрупп компонент разбиения; но очевидно, указанные структуры — трехэлементные цепи. Осталось воспользоваться замечанием 1.

Пусть G — произвольный граф на множестве X и ϱ — отношение смежности графа G. Тогда $x, y \in X$ назовем неразличимыми элементами графа G, если, для всякого $z \in X$, $z \neq x$, $z \neq y$, $x \varrho z (z \varrho x)$ тогда и только тогда $y \varrho z (z \varrho y)$.

Замечание 3. Например, из определения графов G_1 и G_2 следует, что каждое из множеств R_a^1 и R_a^2 является максимальным множеством неразличимых элементов в соответствующем графе.

Лемма 2. *Не существует полугруппы Γ такой, что ее подполугрупповой граф изоморфен G_2.*

Доказательство. Пусть φ — изоморфизм графа $G(\Gamma)$ на граф G_2. Введем некоторые обозначения. Пусть $i \in N$. Очевидно, что $R_{\{i\}}^2$ — двухэлементное множество. Элементы указанного множества обозначим через α_i^1, α_i^2. Положим $\Gamma_i^1 = \varphi^{-1}(\alpha_i^1)$, $\Gamma_i^2 = \varphi^{-1}(\alpha_i^2)$.

а) Покажем, что одно из множеств Γ_i^1, Γ_i^2 содержится в другом.

Γ_i^1, Γ_i^2 — неразличимые элементы графа $G(\Gamma)$, так как α_i^1 и α_i^2 неразличимые элементы G_2. Но тогда Γ_i^1, Γ_i^2, $\Gamma_i^1 \cap \Gamma_i^2$ — не различимые элементы. В G_2 α_i^1 имеет точно один отличный от него и неразличимый с ним элемент α_i^2 (см. замечание 3), поэтому утверденпе а) доказано.

В дальнейшем будем считать, что $\Gamma_i^1 \subset \Gamma_i^2$.

b) Покажем, что Γ_i^1 — одноэлементная полугруппа.

Пусть H — истинная подполугруппа из Γ_i^1. Так как $H \neq \Gamma_i^2$ и $H \cap \Gamma_i^1 \neq \emptyset$, то

$$\varphi(H) \notin R^2_{\{i\}}, \qquad (*)$$
$$\varphi(H) \sim \alpha_i^1. \qquad (**)$$

Существует $a \in \mathscr{S}(N)$, что $\varphi(H) \in R_a^2$. Условие (**) равносильно тому, что $\{i\} \cap a \neq \emptyset$, то есть $i \in a$. Условие же (*) показывает, что существует отличное от i целое положительное число $j \in a$. Имеем $j \in a$, следовательно, $\alpha_j^1 \sim \varphi(H)$. Тогда $\Gamma_j^1 \cap H \neq \emptyset$, т.е. $\alpha_j^1 \sim \alpha_i^1$, откуда $\{i\} \cap \{j\} \neq \emptyset$, что противоречиво. Следовательно, Γ_i^1 состоит из одного идемпотента, который будем обозначать e_i.

c) Теперь покажем, что для любого идемпотента $e \in \Gamma$ существует целое положительное число i такое, что $e = e_i$.

Существует $a \in \mathscr{S}(N)$ такое, что $\varphi(\langle e\rangle) \in R_a^2$. Пусть $i \in a$. Так как $a \cap \{i\} \neq \emptyset$, то $\varphi(\langle e\rangle) \sim \alpha_i^1$ или $\varphi(\langle e\rangle) = \alpha_i^1$, откуда $\langle e\rangle \cap \langle e_i\rangle \neq \emptyset$, то есть $e = e_i$.

d) Покажем, что Γ_i^2 либо циклическая группа простого порядка, либо нильпотентная двухэлементная полугруппа.

Пусть H — истинная подполугруппа из Γ_i^2. Так как $\Gamma_i^2 \cap H \neq \emptyset$, то $\alpha_i^2 \sim \varphi(H)$, откуда $\alpha_i^1 \sim \varphi(H)$ или $\alpha_i^1 = \varphi(H)$, следовательно, $\langle e_i\rangle \cap H \neq \emptyset$, т.е. $e_i \in H$. Легко проверить, что H и Γ_i^2 — неразличимые элементы графа $G(\Gamma)$. Но Γ_i^2 содержится в максимальном множестве неразличимых элементов $\{\Gamma_i^1, \Gamma_i^2\}$ графа $G(\Gamma)$. Следовательно, $H = \Gamma_i^1 = \langle e_i\rangle$, т.е. Γ_i^2 не содержит истинных подполугрупп, кроме $\langle e_i\rangle$, откуда следует утверждение *d*).

e) Покажем, что $\Gamma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_i^2$.

Пусть $x \in \Gamma$. Существует $a \in \mathscr{S}(N)$ такое, что $\varphi(\langle x\rangle) \in R_a^2$. Пусть $i \in a$. Тогда $\alpha_i^1 \sim \varphi(\langle x\rangle)$, откуда $e_i \in \langle x\rangle$. Очевидно, $\langle x\rangle$ и $\langle e_i\rangle$ — неразличимые элементы графа $G(\Gamma)$. Но тогда $x \in \Gamma_i^2$, откуда следует справедливость утверждения e).

f) Покажем, что Γ — сильное разбиение на подполугрыппы Γ_i^2.

Для этого достаточно показать, что множества

$$\Gamma_i^2 \cup \Gamma_j^2,\ \Gamma_i^2 \cup \{e_j\},\ \Gamma_j^2 \cup \{e_i\},\ \{e_i\}, \cup \{e_j\}$$

являются подполугруппами для произвольных i, j. Рассмотрим $R^2_{\{i,j\}}$. Пусть $\beta \in R^2_{\{i,j\}}$ и $H = \varphi^{-1}(\beta)$. Если $e_k \in H$, то $\alpha^1_k \sim \beta$, т.е. $k \in \{i, j\}$, откуда $e_k \in \{e_i, e_j\}$. Следовательно, H содержит точно два идемпотента, а именно e_i, e_j. Так как мощность $R^2_{\{i,j\}}$ равна 4, получаем, учитывая выше сказанное, что в Γ существует четыре подполугруппы, содержание e_i, e_j и не содержащие других идемпотентов, откуда следует, что выше перечисленные множества являются подполугруппами.

Из пунктов d), f) и леммы 1 следует, что граф $G(\Gamma)$ изоморфен графу G_1, т.е. G_2 изоморфен G_1, но это невозможно, так как в G_1 есть несчетные совокупности неразличимых элементов, а в G_2 таких совокупностей нет.

Теперь утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из замечания 2 и лемм 1, 2.

Теорема 2. *Класс графов, изоморфных подполугрупповым графам конечных полугрупп (конечных коммутативных полугрупп), неаксиоматизируем.*

Доказательство. Из доказательства леммы 1 [1] видно, что для всякого графа G существует такая система множеств $\mathscr{S}$, что граф G изоморфен $G(\mathscr{S})$, причем если граф G конечен, то множество $\bigcup_{A \in \mathscr{S}} A$ конечно. Пусть $\leqslant$ — произвольное отношение линейного порядка на $\bigcup_{A \in \mathscr{S}} A$. Определим полугрупповую операцию на множестве $\bigcup_{A \in \mathscr{S}} A$, полагая $xy = yx = y$ в том и только в том случае, если $y \leqslant x$. Легко видеть, что граф $G(\mathscr{S})$ вкладывается в подполугрупповой граф полугруппы $\bigcup_{A \in \mathscr{S}} A$. Таким образом, нами установленно, что всякий граф изоморфно вкладывается в некоторый подполугрупповой граф коммутативной полугруппы идемпотентов, причем конечный граф вкладывается в подполугрупповой граф конечной полугруппы. Теперь мы можем легко закончить доказательство теоремы 2, применяя к произвольному бесконечному графу теоремы Хенкина (см. [2], стр. 193).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bosák J., *The graphs of semigroups,* Theory of graphs and its applications. Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963. Praha 1964, 119—125.

[2] Мальцев А. И., *Некоторые вопросы теории классов моделей*, Труды четвертого Всесоюзного математического съезда, том 1, Издательство АН СССР, Ленинград 1963.

[3] Ляпин Е. С., *Полугруппы*, Москва 1960.

[4] Шеврин Л. Н., *Сильные связки полугрупп*, Известия высших учебных заведений, Казань, 49 (1965), 156—165.

[5] Pondělíček B., *Průměr grafu pologrupy*, Časop. pěstov. mat. 92 (1967), 206—211.
Поступило 4. 12 1967

Кафедра алгебры и геометрии
Уральского Государственого университета
Свердловск

THE SUBSEMIGROUP GRAPHS

V. A. Baranskij, A. N. Trachtman

Summary

Let $\mathscr{S}$ be the system of all proper subsemigroups of the semigroup Γ. By the subsemigroup graph of the semigroup Γ we mean the graph whose set of vertices is $\mathscr{S}$ and in wich the vertices $A, B \in \mathscr{S}$ are adjacent if and only if $A \neq B$ and $A \cap B \neq \emptyset$.

It is proved that condition for a graph to be the subsemigroup graph of a semigroup (or a finite semigroup, or a periodic semigroup, or a commutative semigroup) can't be formalized in terms of predicate calculus of first order with identity.