Tibor Šalát

K jednej vlastnosti iracionálnych čísel

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 7 (1957), No. 2, 128--137

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126340`

K JEDNEJ VLASTNOSTI IRACIONÁLNYCH ČÍSEL

TIBOR ŠALÁT

Katedra matematiky Univerzity Komenského v Bratislave

V práci [3] sa A. Turowicz zaoberá riešením nasledujúcej otázky: Konštruujme postupne (indukciou) postupnosť

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_n > 0 (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$$

Je otázka, či existuje taký predpis pre konštrukciu párnych (nepárnych) členov postupnosti, aby sme pri konštrukcii párnych (nepárnych) členov postupnosti podľa tohto predpisu a pri ľubovoľnej konštrukcii nepárnych (párnych) členov postupnosti dostali postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s týmito vlastnosťami:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$,

(b) Súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je iracionálne číslo.

V citovanej práci je vypracovaný taký predpis.

Tejto úlohe možno dať aj formuláciu matematickej hry. Nech A, B sú dvaja hráči, ktorí hrajú tak, že postupne striedavo volia členy klesajúcej postupnosti kladných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. A zvíťazí, ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a jeho súčet je iracionálne číslo, B zvíťazí, ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ buď diverguje, alebo konverguje a jeho súčet je racionálne číslo. V práci [3] je dokázané, že vždy možno zaručiť víťazstvo hráča A.

V tomto článku je riešená podobná otázka pre nekonečné súčiny. Konštruujme teda postupne (indukciou) klesajúcu postupnosť kladných čísel (reálnych) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je otázka, či existuje taký predpis pre konštrukciu párnych (nepárnych) členov postupnosti, aby sme pri voľbe párnych (nepárnych) členov postupnosti podľa tohto predpisu a pri ľubovoľnej voľbe nepárnych (párnych) členov postupnosti dostali postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s týmito vlastnosťami:

(a) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ konverguje.

(b) Hodnota nekonečného súčinu $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ je iracionálne číslo.

Zrejme aj tejto úlohe možno dať formuláciu matematickej hry. Uvidíme, že aj na túto otázku je odpoveď kladná a problém rozriešime istou modifikáciou Turowiczovej metódy.

Prv než prikročíme k riešeniu tohto problému, uvedieme niekoľko známych poznatkov z teórie reálnych čísel.

Je známe, že každé reálne číslo x možno jediným spôsobom vyjadriť ako súčet tzv. Cantorovho radu (pozri [1], str. 116), t. j. platí:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} = \frac{c_1}{1!} + \frac{c_2}{2!} + \ldots + \frac{c_n}{n!} + \ldots \tag{1}$$

$c_n(n = 1, 2, 3, \ldots)$ celé čísla, $c_n(n = 2, 3, \ldots)$ nezáporné, $c_n < n$ pre všetky $n = 2, 3, 4, \ldots$ a $c_n < n - 1$ pre nekonečne mnoho n. Rad (1) voláme Cantorovým rozvojom čísla x. Nutná a postačujúca podmienka na to, aby číslo x bolo racionálne je, aby pre všetky n od istého počínajúc platilo $c_n = 0$.

Ďalej je známe (pozri [2], str. 46), že prirodzený logaritmus každého kladného racionálneho čísla a je buď 0 (ak $a = 1$), alebo iracionálne číslo. Označme v tomto článku znakom M' množinu všetkých tých iracionálnych čísel, ktoré sú logaritmami racionálnych čísel, a položme $M = M' \cup \{0\}$.

Nasledujúce pomocné vety hovoria o niektorých jednoduchých vlastnostiach množiny M.

Lemma 1. *Nech $y_1, y_2 \in M$, vtedy $y_1 + y_2 \in M$ a $y_1 - y_2 \in M$.*

Dôkaz. e^{y_1} a e^{y_2} sú podľa predpokladu kladné racionálne čísla, označme ich znakmi r_1 a r_2, t. j. $r_1 = e^{y_1}$, $r_2 = e^{y_2}$. Potom $e^{y_1+y_2} = r_1 \cdot r_2$ a $e^{y_1-y_2} = \frac{r_1}{r_2}$, keďže $r_1 \cdot r_2$ a $\frac{r_1}{r_2}$ sú zase kladné racionálne čísla, dostávame odtiaľ platnosť lemmy.

Lemma 2. *Nech $y_1, y_2 \in M$, $y_1 \neq y_2$. Nech Cantorove rozvoje čísel y_1 a y_2 sú*

$$y_i = \frac{c_1^{(i)}}{1!} + \frac{c_2^{(i)}}{2!} + \ldots + \frac{c_n^{(i)}}{n!} + \ldots; \qquad i = 1, 2.$$

Tvrdenie: Pre nekonečne mnoho prirodzených čísel n platí: $c_n^{(1)} \neq c_n^{(2)}$.

Dôkaz. Dokážme to nepriamo. Nech by pre všetky $n > n_0$ platilo $c_n^{(1)} = c_n^{(2)}$. Potom dostávame $y_1 - y_2 = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{c_n^{(1)} - c_n^{(2)}}{n!} = r$, kde r je racionálne číslo, $r \neq 0$, teda e^r je iracionálne číslo (pozri [2], str. 46), v dôsledku toho $y_1 - y_2 \notin M$, a to je spor s tvrdením lemmy 1.

Uvážme v ďalšom, že množina M je očíslovateľná a zrejme nekonečná.

Zoraďme všetky jej členy do prostej postupnosti $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$. Nech

$$y_k = \frac{d_1^{(k)}}{1!} + \frac{d_2^{(k)}}{2!} + \ldots + \frac{d_n^{(k)}}{n!} + \ldots$$

je Cantorov rozvoj čísla $y_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ z množiny M.

Riešenie nášho problému je ľahkým dôsledkom nasledujúcej vety, ktorú dokážeme vhodnou modifikáciou Turowiczovej metódy.

Veta 1. *Konštruujme postupne (indukciou) klesajúcu postupnosť kladných reálnych čísel*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{2}$$

Tvrdenie: Existuje také pravidlo pre konštrukciu párnych (nepárnych) členov postupnosti (2), *že pri konštrukcii párnych (nepárnych) členov postupnosti podľa tohto pravidla a pri ľubovoľnej konštrukcii nepárnych (párnych) členov postupnosti dostávame postupnosť* (2) *s týmito vlastnosťami:*

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k < \pm\infty$,

(b) *Súčet radu* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *je iracionálne číslo nepatriace do množiny* M.

Dôkaz. Obmedzíme sa na dôkaz existencie spomínaného pravidla pre konštrukciu párnych členov (pre nepárne členy je to podobné).

Položme v ďalšom pre každé prirodzené k $s_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$.

Nech je zvolené (ľubovoľné) číslo $s_1 = x_1 > 0$. Nech

$$s_1 = \frac{c_1^{(1)}}{1!} + \frac{c_2^{(1)}}{2!} + \ldots + \frac{c_n^{(1)}}{n!} + \ldots$$

je Cantorov rozvoj čísla s_1.

Sú tu dve možnosti:

(a) Ak $s_1 \neq y_1$, potom existuje (najmenší) index $r(1) \geq 1$ s vlastnosťou: $c_{r(1)}^{(1)} \neq d_{r(1)}^{(1)}$ (3) a číslu s_1 priradíme číslo y_1.

(b) Ak $s_1 = y_1$, potom $s_1 \neq y_2$ a zase existuje (najmenší) index $r(1) \geq 1$ s vlastnosťou: $c_{r(1)}^{(1)} \neq d_{r(1)}^{(2)}$ a číslu s_1 priradíme číslo y_2.

Nech $p(1)$ je najmenšie prirodzené číslo s vlastnosťami:

$$p(1) > r(1) + 1, \qquad c_{p(1)}^{(1)} < p(1) - 1.$$

V prípade (a) zvolíme za druhý člen postupnosti akékoľvek kladné číslo vyhovujúce obom nasledujúcim podmienkam

(I) $x_2 \leq \frac{1}{3p!}$, $p = p(1)$, $x_2 < x_1$.

(II) Ak je $s_1 < y_2$, nech $x_2 < \frac{1}{2}(y_2 - s_1)$. Ak $y_2 \leq s_1$, na x_2 nekladieme ďalšiu podmienku.

Za člen x_3 zvoľme ľubovoľné kladné číslo, menšie než x_2.

Z podmienky (II) ihneď vyplýva, že $s_3 \neq y_2$.

V prípade (b) zvolíme α_2 tak, aby vyhovovalo podmienke (I), α_3 je zase ľubovoľné reálne číslo splňujúce jedine podmienku $0 < \alpha_3 < \alpha_2$. Zrejme $s_3 \neq y_1$.

Ukážeme, že v oboch prípadoch sa Cantorove rozvoje čísel s_1, s_2, s_3 nelíšia v prvých $p(1) - 1$ členoch, a teda sa nelíšia ani v prvých $\nu(1) + 1$ členoch. Uvážme, že platí:

$$s_3 = s_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < s_1 + \frac{2}{3p!}, \qquad p = p(1),$$

$$s_3 < \sum_{n=1}^{p} \frac{c_n^{(1)}}{n!} + \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{c_n^{(1)}}{n!} - \frac{4}{3p!} \right) + \frac{2}{p!} \tag{4}$$

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{c_n^{(1)}}{n!} - \frac{4}{3p!} < \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} - \frac{4}{3p!} = \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right) -$$

$$- \frac{4}{3p!} = \frac{1}{p!} - \frac{4}{3p!} < 0. \tag{5}$$

Z (4), (5) vyplýva:

$$s_3 < \sum_{n=1}^{p} \frac{c_n^{(1)}}{n!} + \frac{2}{p!} \leqq \sum_{n=1}^{p-1} \frac{c_n^{(1)}}{n!} + \frac{c_p^{(1)} + 2}{p!} \leqq \sum_{n=1}^{p-1} \frac{c_n^{(1)}}{n!} + \frac{1}{(p-1)!}$$

a teda celkom platí:

$$s_1 < s_2 < s_3 < \sum_{n=1}^{p-1} \frac{c_n^{(1)}}{n!} + \frac{1}{(p-1)!}.$$

To dokazuje správnosť tvrdenia.

Teraz pokračujeme v konštrukcii takto: Nech $s_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!}$. (3)

Ak nastal pôvodne prípad (a), je $s_3 \neq y_2$. Ak existuje najmenšie prirodzené číslo $\nu(3)$ s vlastnosťami

$$\nu(3) > \nu(1) + 1, \qquad c_{\nu(3)}^{(3)} \neq d_{\nu(3)}^{(2)}, \tag{6}$$

tak priradíme číslu s_3 číslo y_2.

Ak však také $\nu(3)$ neexistuje, tak $s_3 \neq y_2$ a s_3 má pre všetky $n > \nu(1) + 1$ rovnaké členy vo svojom Cantorovom rozvoji ako y_2. Teda podľa lemmy 2 je v tomto prípade $s_3 \notin M$ a teda $s_3 \neq y_3$. Teraz zrejme (podľa lemmy 2 použitej na čísla y_2, y_3) existuje (najmenší) index $\nu(3)$ s vlastnosťami:

$$\nu(3) > \nu(1) + 1, \qquad c_{\nu(3)}^{(3)} \neq d_{\nu(3)}^{(3)}.$$

Voľbu člena α_4 možno zrejme zariadiť tak (pozri (II)), aby $s_5 \neq y_2$. Ako prv i teraz sa možno presvedčiť, že Cantorove rozvoje čísel s_3, s_4, s_5 sa nelíšia v prvých $\nu(3)+1$ členoch. Tvrdíme, že y_2 možno priradiť číslu s_5 v tomto zmysle: Existuje (najmenšie) prirodzené číslo $\nu(5)$ s vlastnosťami:

$$\nu(5) > \nu(3) + 1, \qquad c^{(5)}_{\nu(5)} \neq d^{(2)}_{\nu(5)}.$$

Keby totiž také číslo $\nu(5)$ neexistovalo, Cantorove rozvoje čísel s_5 a y_2 by sa nelíšili v žiadnom člene s indexom väčším než $\nu(3)+1$, a teda i Cantorove rozvoje čísel s_5 a s_3 by sa nelíšili v žiadnom člene s indexom väčším než $\nu(3)+1$, a keďže sa nelíšia v prvých $\nu(3)+1$ členoch, vyplýva, že $s_5 = s_3$, čo je spor.

Ak nastal prípad (b), potom je nutné $s_3 \neq y_1$. Tvrdíme, že číslu s_3 možno priradiť číslo y_1 v tom zmysle, že existuje číslo $\nu(3)$ s vlastnosťami:

$$\nu(3) > \nu(1) + 1, \qquad c^{(3)}_{\nu(3)} \neq d^{(1)}_{\nu(3)}.$$

(V konštrukcii pre určitosť berieme najmenšie číslo tejto vlastnosti.) Keby totiž také číslo $\nu(3)$ neexistovalo, rozvoje čísel s_3 a y_1 by sa nelíšili v členoch s indexmi väčšími než $\nu(1)+1$, a teda (keďže s_3 a $s_1 = y_1$ sa nelíšia v prvých $\nu(1)+1$ členoch) dostávame $s_3 = s_1$, čo nie je možné.

Teraz pristúpime k indukčnému kroku.

Z celého postupu je zrejmé:

Nech k je prirodzené číslo. Potom máme dve možnosti:

(a) Čísla $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sú vzájomne jednoznačne priradené číslam $s_1, s_3, \ldots, s_{2k-1}$ (y_i je priradené číslu s_{2l-1}, ak existuje (najmenšie) prirodzené číslo $\nu(2l-1)$ s vlastnosťami: $\nu(2l-1) > \nu(2l-3)+1$, $c^{(2l-1)}_{\nu(2l-1)} \neq d^{(i)}_{\nu(2l-1)}$).

(b) Čísla $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}$ sú vzájomne jednoznačne priradené číslam $s_1, s_3, \ldots, s_{2k-1}$, pritom číslo y_{k+1} je priradené číslu s_{2k-1} a všetky členy rozvoja čísla s_{2k-1} s indexom väčším než $\nu(2k-3)+1$ sú rovnaké s príslušnými členmi rozvoja čísla y_k. I tu platí poznámka uvedená v zátvorke v (a).

V prípade (a) pokračujeme takto:

Nech

$$s_{2k-1} = \frac{c_1^{(2k-1)}}{1!} + \frac{c_2^{(2k-1)}}{2!} + \ldots + \frac{c_n^{(2k-1)}}{n!} + \ldots \tag{7}$$

je Cantorov rozvoj čísla s_{2k-1} a nech $p(2k-1)$ je najmenšie prirodzené číslo s týmito vlastnosťami:

$$p(2k-1) > p(2k-3), \qquad p(2k-1) > \nu(2k-1)+1,$$
$$c^{(2k-1)}_{p(2k-1)} < p(2k-1) - 1.$$

Zvoľme číslo α_{2k} tak, aby splňovalo podmienky:

(I) $0 < \alpha_{2k} \leq \dfrac{1}{3p!}$, $\quad p = p(2k-1)$, $\quad \alpha_{2k} < \alpha_{2k-1}$.

(II) Ak $s_{2k-1} < y_{k+1}$, nech $\alpha_{2k} < \dfrac{1}{2}t$, kde $t = |s_{2k-1} - y_{k+1}|$. Ak však $y_{k+1} \leq s_{2k-1}$, potom na α_{2k} nekladieme ďalšiu podmienku.

Z voľby x_{2k} vidieť, že $s_{2k+1} \neq y_{k+1}$.

Zvoľme x_{2k+1} ľubovoľne (pravda, tak, aby $0 < x_{2k+1} < x_{2k}$).

Ukážeme, že Cantorove rozvoje čísel $s_{2k-1}, s_{2k}, s_{2k+1}$ sa nelíšia v prvých $\nu(2k-1)+1$ členoch. Skutočne máme:

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + x_{2k} + x_{2k+1} < s_{2k-1} + \frac{2}{3p!}, \qquad p = \nu(2k-1).$$

$$s_{2k+1} < \sum_{n=1}^{p} \frac{c_n^{(2k-1)}}{n!} + \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{c_n^{(2k-1)}}{n!} - \frac{4}{3p!} \right) + \frac{2}{p!} \tag{8}$$

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{c_n^{(2k-1)}}{n!} - \frac{4}{3p!} < \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} - \frac{4}{3p!} = \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right) -$$

$$- \frac{4}{3p!} = \frac{1}{p!} - \frac{4}{3p!} < 0. \tag{9}$$

Teda z (8), (9) vyplýva:

$$s_{2k+1} < \sum_{n=1}^{p-1} \frac{c_n^{(2k-1)}}{n!} + \frac{c_p^{(2k-1)} + 2}{p!} \leqq \sum_{n=1}^{p-1} \frac{c_n^{(2k-1)}}{n!} + \frac{1}{(p-1)!}$$

a teda celkom dostávame:

$$s_{2k-1} < s_{2k} < s_{2k+1} < \sum_{n=1}^{p-1} \frac{c_n^{(2k-1)}}{n!} + \frac{1}{(p-1)!}. \tag{10}$$

Rovnakým postupom možno ukázať aj pri voľbe x_{2k} v prípade (b) (pozri ďalej), že Cantorove rozvoje čísel $s_{2k-1}, s_{2k}, s_{2k+1}$ sa nelíšia v prvých $\nu(2k-1)+1$ členoch. Treba si však uvedomiť, že $\nu(2k-1)$ značí v prípade (b) všeobecne iné číslo než v prípade (a).

Ďalej máme tu dve možnosti:

(c) Existuje prirodzené číslo $\nu(2k+1)$ s vlastnosťami:

$$\nu(2k+1) > \nu(2k-1) + 1, \qquad c_{\nu(2k+1)}^{(2k+1)} \neq d_{\nu(2k+1)}^{(k+1)}$$

(v konštrukcii berieme najmenšie prirodzené číslo $\nu(2k+1)$ s uvedenými vlastnosťami).

(d) Všetky členy Cantorových rozvojov čísel s_{2k+1} a y_{k+1} s indexmi väčšími než $\nu(2k-1)+1$ sú rovnaké, rozvoje čísel s_{2k+1} a y_{k+1} nelíšia sa v členoch s indexmi väčšími než $\nu(2k-1)+1$.

V prípade (c) priradíme číslo y_{k+1} číslu s_{2k+1}.

V prípade (d) je zrejmé: $s_{2k+1} \notin M \Rightarrow s_{2k+1} \neq y_{k+2}$ a podľa lemmy 2 existuje index $\nu(2k+1)$ s vlastnosťami:

$$\nu(2k+1) > \nu(2k-1) + 1, \qquad c_{\nu(2k+1)}^{(2k+1)} \neq d_{\nu(2k+1)}^{(k+2)}$$

(v konštrukcii berieme najmenší taký index), číslu s_{2k+1} priradíme číslo y_{k+2}. Číslo y_{k+1} v ďalšom kroku priradíme číslu s_{2k+3}, čo je možné na základe toho, že Cantorove rozvoje čísel y_{k+1} a s_{2k+3} nemôžu mať všetky členy s indexmi väčšími než $\nu(2k+1)+1$ rovnaké, pretože v opačnom prípade by sa rozvoj čísla s_{2k+3} zhodoval s rozvojom čísla s_{2k+1} vo všetkých členoch s indexmi väčšími než $\nu(2k+1)+1$ a keďže rozvoje čísla s_{2k+3} a s_{2k+1} sa nelíšia v prvých $\nu(2k+1)+1$ členoch, dostávame $s_{2k+3}=s_{2k+1}$, čo nie je možné.

V prípade (b) zvolíme α_{2k} tak, aby vyhovovalo podmienke (I), kde $p(2k-1)$ je najmenšie prirodzené číslo s vlastnosťami:

$$p(2k-1)>p(2k-3),\qquad p(2k-1)>\nu(2k-1)+1,$$
$$c^{(2k-1)}_{p(2k-1)}<p(2k-1)-1$$

a $\nu(2k-1)$ je najmenšie prirodzené číslo s vlastnosťami:

$$\nu(2k-1)>\nu(2k-3)+1,\qquad c^{(2k-1)}_{\nu(2k-1)}\neq d^{(k-1)}_{\nu(2k-1)}.$$

Ukážeme, že číslo y_k možno priradiť číslu s_{2k+1}, t. j. existuje $\nu(2k+1)$ prirodzené s vlastnosťami:

$$\nu(2k+1)>\nu(2k-1)+1,\qquad c^{(2k+1)}_{\nu(2k+1)}\neq d^{(k)}_{\nu(2k+1)}$$

(v konštrukcii berieme najmenšie prirodzené číslo uvedených vlastností). Keby totiž také $\nu(2k+1)$ neexistovalo, tak by rozvoj čísel y_k a s_{2k+1} mali rovnaké rovnoľahlé členy s indexmi väčšími než $\nu(2k-1)+1$, a keďže členy rozvoje čísla y_k s indexmi väčšími než $\nu(2k-3)+1$ sú rovnaké s rovnoľahlými členmi rozvoja čísla s_{2k-1}, tak aj rozvoje čísel s_{2k-1} a s_{2k+1} sa nelíšia v členoch s indexmi väčšími než $\nu(2k-1)+1$, a keďže sa zhodujú tieto rozvoje aj v prvých $\nu(2k-1)+1$ členoch, je $s_{2k+1}=s_{2k-1}$, čo je spor.

Zostrojme teraz rad:

$$\begin{aligned}&\frac{b_1}{1!}+\frac{b_2}{2!}+\ldots+\frac{b_{\nu(1)}}{[\nu(1)]!}+\frac{b_{\nu(1)+1}}{[\nu(1)+1]!}+\ldots+\\&+\frac{b_{\nu(3)}}{[\nu(3)]!}+\frac{b_{\nu(3)+1}}{[\nu(3)+1]!}+\ldots+\frac{b_{\nu(5)}}{[\nu(5)]!}+\ldots+\\&+\frac{b_{\nu(2k-1)}}{[\nu(2k-1)]!}+\frac{b_{\nu(2k-1)+1}}{[\nu(2k-1)+1]!}+\ldots+\frac{b_{\nu(2k+1)}}{[\nu(2k+1)]!}+\ldots\end{aligned}\tag{11}$$

kde

$$\begin{aligned}b_l&=c_l^{(1)}, && 1\leqq l\leqq \nu(1)+1\\ b_l&=c_l^{(3)}, && \nu(1)+1<l\leqq\nu(3)+1\\ &\;\vdots\\ b_l&=c_l^{(2k+1)}, && \nu(2k-1)+1<l\leqq\nu(2k+1)+1.\\ &\;\vdots\end{aligned}$$

Z voľby čísel b_l ihneď vyplýva, že rad (11) konverguje; jeho súčet označme znakom b. Odhadnime rozdiel $b - s_j$. Ak j je nepárne číslo, $j = 2k - 1$ alebo j je párne číslo, $j = 2k$, potom platí:

$$|b - s_j| \leqq \sum_{\nu(2k-1)+2}^{\infty} \frac{|b_n - c_n^{(2k-1)}|}{n!} \leqq \sum_{\nu(2k-1)+2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \to 0 \text{ keď } j \to \infty,$$

a teda $b - s_j \to 0$, t. j. rad $\sum_1 \alpha_n$ konverguje a jeho súčet je b.

Ukážeme, že číslo b je iracionálne číslo. Aby sme to dokázali, stačí overiť platnosť týchto dvoch tvrdení:

(E) Rad (11) má nekonečne mnoho členov rôznych od nuly.

(F) Rad (11) je Cantorov rozvoj čísla b.

Dokážme (E). Položme $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k!}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Z konštrukcie radu (11) je zrejmé, že pre každé prirodzené n platí: $\sigma_n \leqq s_n < s_{n+1} < b$, a teda $\sigma_n < b$ pre všetky n. To dokazuje správnosť tvrdenia (E).

Zaveďme toto vyjadrovanie: Nech $\sum_1^{\infty} \frac{c_n}{n!}$ je nekonečný rad. Hovoríme, že člen tohto radu $\frac{c_n}{n!}$ má vlastnosť ν, ak $c_n = n - 1$. Aby sme dokázali správnosť tvrdenia (F), stačí zrejme dokázať, že nie je možné, aby všetky členy radu (11) od istého počínajúc mali vlastnosť ν. Postupujme nepriamo, nech všetky členy radu (11) od n_0-tého majú vlastnosť ν. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme položiť $n_0 = \nu(2k - 1)$. Člen $\frac{c_{\nu(2k-1)+1}^{(2k-1)}}{[\nu(2k-1)+1]!}$ v (7) má vlastnosť ν, keďže na základe konštrukcie radu (11) je rovný členu $\frac{b_{\nu(2k-1)+1}}{[\nu(2k-1)+1]!}$ radu (11). Nech je $\frac{c_l^{(2k-1)}}{l!}$ prvý člen radu s indexom $> \nu(2k - 1) + 1$ v (7), ktorý nemá vlastnosť ν (také l na základe definície Cantorovho radu existuje). Potom na základe voľby čísla $p(2k - 1)$ platí: $l \leqq p(2k - 1)$ a pre $b - s_{2k-1}$ dostaneme tento odhad:

$$\frac{1}{l!} \leqq b - s_{2k-1} < \frac{2}{3}\frac{1}{[p(2k-1)]!} + \frac{2}{3}\frac{1}{[p(2k+1)]!} + \ldots^{1}$$

a teda keďže postupnosť $\{p(2k - 1)\}_{k=1}^{\infty}$ je rastúca:

$$\frac{1}{l!} \leqq b - s_{2k-1} < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{p!} + \frac{1}{(p+1)!} + \frac{1}{(p+2)!} + \ldots\right), \; p = p(2k-1).$$

[1] Uvážte, že $b - s_{2k-1} = \alpha_{2k} + \alpha_{2k+1} + \ldots$ a pozrite voľbu členov $\alpha_{2k}, \alpha_{2k+1}, \ldots$

Z toho dostávame:

$$1 \leqq \frac{p!}{l!} < \frac{2}{3} \frac{p+1}{p} \Rightarrow p < 2.$$

Na druhej strane máme: $p > \nu(2k-1) + 1 \geqq 2$, takže sme dospeli k sporu.

Uvážme ďalej, že pre každé $y_k \in M$ je $y_k \neq b$, keďže Cantorove rozvoje čísel y_k a b sa líšia aspoň v jednom člene. Ak totiž je y_k priradené číslu s_{2l-1}, líšia sa tie rozvoje v člene $\frac{b_{\nu(2l-1)}}{[\nu(2l-1)]!} \neq \frac{c^{(2l-1)}_{\nu(2l-1)}}{[\nu(2l-1)]!}$.

Teda číslo b je iracionálne a nepatrí do M. Tým je dôkaz hotový.

Riešenie problému pre nekonečné súčiny, vysloveného na začiatku článku, je obsiahnuté v nasledujúcej vete, ktorá je už ľahkým dôsledkom vety 1.

Veta 2. *Konštruujme postupne (indukciou) klesajúcu postupnosť kladných reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Existuje také pravidlo pre konštrukciu párnych (nepárnych) členov postupnosti, že pri konštrukcii párnych (nepárnych) členov postupnosti podľa tohto pravidla a pri ľubovoľnej konštrukcii nepárnych (párnych) členov postupnosti dostaneme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s týmito vlastnosťami:*

(a) *Nekonečný súčin $P = \prod_{h=1}^{\infty} (1 + a_n)$ konverguje.*

(b) *Hodnota P nekonečného súčinu je iracionálne číslo.*

Dôkaz. Položme $\alpha_k = \log(1 + a_k) > 0$ a aplikujme vetu 1 na konštrukciu členov postupnosti $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$. Podľa vety 1 existuje také pravidlo pre konštrukciu párnych (nepárnych) členov postupnosti $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, že pri konštrukcii párnych (nepárnych) členov podľa tohto pravidla a pri ľubovoľnej konštrukcii nepárnych (párnych) členov dostávame postupnosť $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ s vlastnosťami:

(a_1) $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < +\infty$.

(b_1) Súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ je iracionálne číslo nepatriace do M. Pravidlo pre voľbu členov a_{2k} (obmedzujeme sa zase len na párne členy) je teraz jednoduché: Pre každé prirodzené k kladieme: $a_{2k} = e_{\alpha_{2k}} - 1$. Položme $S_n = \sum_{1}^{n} \alpha_k = \log P_n$, kde $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$. Potom $P_n = e^{S_n}$ a zrejme $\lim_{n \to \infty} P_n = e^{\alpha}$ a hodnota nekonečného súčinu $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$, t. j. číslo e^{α} je iracionálne číslo, keďže α je iracionálne nepatriace do M.

Tým je dôkaz vety hotový.

LITERATÚRA

1. Perron O., Irrationalzahlen, 1921. 2. Hardy G. H., Wright E. M., An Introduction to the Theory of Numbers, 3. ed.,1954. 3. Turowicz A., Sur une propriété des nombres irrationnels, Ann. Pol. Math., II, 1, 1955, 103—105.

Došlo 10. 11. 1956.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

ТИБОР ШАЛАТ

Выводы

В этой статьи автор решит одну проблему из теории бесконечных произведений, аналогичную проблеме из теории бесконечных рядов, которую решил А. Турович в работе [3]. Основным результатом этой статьи является доказательство следующей теоремы:

Конструируем постепенно (индукцией) убывающую последовательность положительных вещественных чисел $\{a_n\}_1^\infty$. Потом существует такое правило для конструкции четных (нечетных) членов последовательности, что при конструкции четных (нечетных) членов последовательности по этому правилу и при произвольной конструкции нечетных (четных) членов последовательности получим последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ с следующими свойствами:

(*а*) Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ сходится.

(*б* Значением бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ является иррациональное число.

ZU EINER EIGENSCHAFT DER IRRATIONALZAHLEN

TIBOR ŠALÁT

Zusammenfassung

In dieser Arbeit löst der Verfasser ein Problem aus der Theorie der unendlichen Produkte, welches einem von A. Turowicz in Arbeit [3] gelösten Problem aus der Theorie der unendlichen Reihen ähnlich ist. Das Hauptergebnis der Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes:

Man konstruiert fortschreitend (durch Induktion) eine fallende Folge der positiven reellen Zahlen $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Dann existiert eine solche Regel für die Konstruktion der geraden (ungeraden) Glieder der Folge, daß man bei der Konstruktion der geraden (ungeraden) Glieder der Folge nach dieser Regel und bei willkürlicher Konstruktion der ungeraden (geraden) Glieder der Folge eine Folge $\{a_n\}_1^\infty$ mit diesen Eigenschaften bekommt:

(a) Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergiert.

(b) Der Wert des unendlichen Produktes $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ ist eine Irrationalzahl.