Štefan Belohorec

Neoscilatorické riešenia istej nelineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 12 (1962), No. 4, 253--262

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126335

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, XII, 4, 1962

NEOSCILATORICKÉ RIEŠENIA ISTEJ NELINEÁRNEJ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE DRUHÉHO RÁDU

ŠTEFAN BELOHOREC, Bratislava

V práci [1] našiel F. V. Atkinson postačujúcu podmienku na to, aby všetky riešenia rovnice

$$y'' + f(x)\, y^{2n+1} = 0 \tag{α}$$

[$f(x) > 0$, spojitá pre $x \geqq 0$, $n \geqq 1$ prirodzené číslo] boli neoscilatorické. J. Jones v [2] zovšeobecnil jeho výsledok pre rovnicu

$$y'' + \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{2i+1} = 0 \tag{β}$$

[$f_i(x) \geqq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) spojité pre $x \geqq 0$, $f_k(x) > 0$ pre nejaké k].

V prácach [3] a [4] boli odvodené nutné a postačujúce podmienky na to, aby existovalo aspoň jedno neohraničené neoscilatorické riešenie rovnice (α) a aspoň jedno ohraničené neoscilatorické riešenie. Tvrdenia týchto viet zostanú zachované aj pre diferenciálnu rovnicu (β), v ktorej exponenty $2i + 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) nahradíme číslami $N_i > 1$, pričom o N_i predpokladáme, že $N_i = p_i/q_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), kde p_i a q_i sú nepárne prirodzené čísla.

Cieľom tejto práce je nájsť takéto podmienky pre rovnicu

$$y'' + \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{N_i} = 0, \tag{1}$$

ak $f_i(x) \geqq 0$ pre $x \geqq c$ a $0 < N_i < 1$.

Riešenie $y(x)$ rovnice (1) budeme nazývať oscilatorickým, ak má aspoň jeden nulový bod v intervale (x, ∞) pre ľubovoľné x.

V ďalšom sa budeme zaoberať iba regulárnymi riešeniami rovnice (1), t. j. takými riešeniami $y(x)$, ktoré sú definované v celom intervale $(0, \infty)$ a majú tam spojitú deriváciu.

Každé takéto riešenie $y(x) \not\equiv 0$ rovnice (1) má nanajvýš jednoduché nulové body, vyjmúc prípad, v ktorom množina nulových bodov nejakého riešenia má hromadný bod v konečne. Keby riešenie $y(x) \not\equiv 0$ v nejakom bode x_0 splňovalo počiatočné podmienky $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, potom z rovnice (1) dostaneme pre isté okolie zľava (podobne sprava).

$$y(x) = -\int_x^{x_0} (t - x) \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, dt,$$

čo vedie k sporu. Ak na $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) dáme ďalšie podmienky, napr. $f_i'(x) \geqq 0$ resp. $f_i'(x) \leqq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), žiadne riešenie $y(x) \not\equiv 0$ nemá hromadný bod nulových bodov v konečne, čo vidieť z dôkazu vety 1. a 2.

Veta 1. *Nech* $0 < N_i < 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) *a nech* $N_i = p_i/q_i$, *kde* p_i *a* q_i *sú nepárne prirodzené čísla. Nech sú funkcie* $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) *nezáporné v intervale* $(0, \infty)$ *a majú v tomto intervale spojité derivácie* $f_i'(x) \leqq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), *pričom existuje číslo* $c > 0$ *a index* j *tak, že* $f_j'(x) < 0$ *pre* $x \in (c, \infty)$. *Označme* $\{x_m\}$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) *postupnosť nulových bodov riešenia* $y(x)$ *a* $\{x_m'\}$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) *postupnosť nulových bodov* $y'(x)$ *v intervale* (c, ∞).

Potom pre každé oscilatorické riešenie $y(x) \not\equiv 0$ *rovnice* (1) *platí, že postupnosť* $\{|y'(x_m')|\}$ *je klesajúca a postupnosť* $\{|y(x_m')|\}$ *je rastúca. Ak okrem toho*

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x f_i(x)\, dx < \infty,$$

potom každé riešenie $y(x) \not\equiv 0$ *rovnice* (1) *je neoscilatorické.*

Dôkaz. Nech je $y(x) \not\equiv 0$ ľubovoľné oscilatorické riešenie rovnice (1). Násobme (1) $y'(x)$ a integrujme v intervale $\langle a, b\rangle$ ($a \geqq c$) dostaneme

$$y'^2(b) - y'^2(a) + 2 \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{N_i}(x)\, y'(x)\, dx = 0.$$

Ak vypočítame posledný integrál, máme

$$y'^2(b) - y'^2(a) + 2 \sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} f_i(b)\, y^{N_i+1}(b) -$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} f_i(a)\, y^{N_i+1}(a) = 2 \sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} \int_a^b f_i'(x)\, y^{N_i+1}(x)\, dx. \qquad (2)$$

Položme $a = x_m$, $b = x_{m+1}$, pričom x_m a x_{m+1} sú nasledujúce nulové body riešenia $y(x)$ také, že $y(x) > 0$ v intervale (x_m, x_{m+1}).
Potom z (2) dostaneme

$$y'^2(x_{m+1}) - y'^2(x_m) = 2 \sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} f_i'(x)\, y^{N_i+1}(x)\, dx$$

Z posledného vyplýva, že $|y'(x_{m+1})| < |y'(x_m)|$.

Ak položíme $a = x'_m$, $b = x'_{m+1}$, pričom x'_m, x'_{m+1} sú nasledujúce nulové body $y'(x)$ také, že $x'_m \in (x_m, x_{m+1})$, z (2) dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} f_i(x'_{m+1})\, y^{N_i+1}(x'_{m+1}) - \sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} f_i(x'_m)\, y^{N_i+1}(x'_m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} \int_{x'_m}^{x'_{m+1}} f'_i(x)\, y^{N_i+1}(x)\, dx. \tag{3}$$

Pridajme k obom stranám (3) výraz

$$-\sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} f_i(x'_{m+1})\, y^{N_i+1}(x'_m).$$

Po úprave dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} f_i(x'_{m+1}) \left[y^{N_i+1}(x'_{m+1}) - y^{N_i+1}(x'_m)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} \int_{x'_m}^{x'_{m+1}} f'_i(x) \left[y^{N_i+1}(x) - y^{N_i+1}(x'_m)\right] dx.$$

Pretože $f'_i(x) \leqq 0$, potom je $|y(x'_m)| < |y(x'_{m+1})|$. Keby $|y(x'_m)| \geqq |y(x'_{m+1})|$, potom by nutne existovalo $x_0 \in (x'_m, x'_{m+1})$ také, že $|y(x_0)| > |y(x'_m)|$, čo je spor. Tým sme dokázali, že postupnosť $\{|y(x_m)|\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ je klesajúca a postupnosť $\{|y(x'_m)|\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ je rastúca.

Integrujme rovnicu (1) v intervale $\langle x, x'_m \rangle$, pričom $x \in (x_m, x_{m+1})$, dostaneme

$$y'(x) = \int_{x}^{x'_m} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, dt.$$

Z poslednej rovnosti po integrácii v intervale $\langle x_m, x'_m \rangle$ dostaneme

$$y(x'_m) = \int_{x_m}^{x'_m} (t - x_m) \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, dt \leqq \int_{x_m}^{x'_m} (t - x_m) \sum_{i=1}^{n} y^{N_i}(x'_m) f_i(t)\, dt. \tag{4}$$

Je zrejmé, že existuje index p tak, že pre ľubovoľné $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $y^{N_i}(x'_m) \leqq$ $\leqq y^{N_p}(x'_m)$. Zo (4) dostaneme

$$1 \leqq y^{N_p - 1}(x'_m) \int_{x_m}^{x'_m} (t - x_m) \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, dt <$$

$$< y^{N_p - 1}(x'_m) \int_{x_m}^{\infty} \sum x f_i(x)\, dx < C \int_{x_m}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x f_i(x)\, dx,$$

pretože postupnosť $\{|y(x'_m)|^{N_p-1}\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ je klesajúca. Stačí teraz voliť m dostatočne veľké, potom nerovnosť (4) vedie k sporu. Teda riešenie $y(x)$ je neoscilatorické. Tým je tvrdenie vety dokázané.

Veta 2. *Nech je N_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ také isté ako vo vete 1. Nech sú funkcie $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nezáporné v intervale $(0, \infty)$ a majú tam spojité derivácie $f_i'(x) \geqq 0$, pričom existuje číslo $c > 0$ a index j tak, že $f_j'(x) > 0$ pre $x \in (c, \infty)$. Potom sú všetky riešenia rovnice (1) ohraničené a pre každé oscilatorické riešenie $y(x) \not\equiv 0$ platí, že postupnosť $\{|y'(x_m)|\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ je rastúca a postupnosť $\{|y(x'_m)|\}$ je klesajúca.*

Dôkaz. Nech je $y(x) \not\equiv 0$ oscilatorické riešenie rovnice (1). Potom je nerovnosť $|y'(x_m)| < |y'(x_{m+1})|$ zrejmá. Pripočítajme k obom stranám (3) výraz

$$\sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} f_i(x'_m)\, y^{N_i+1}(x'_{m+1}).$$

Po úprave dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} f_i(x'_m) \left[y^{N_i+1}(x'_{m+1}) - y^{N_i+1}(x'_m)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (N_i + 1)^{-1} \int_{x'_m}^{x'_{m+1}} f_i'(x) \left[y^{N_i+1}(x) - y^{N_i+1}(x'_{m+1})\right] dx.$$

Pretože $f_i'(x) \geqq 0$, potom je $|y(x'_m)| > |y(x'_{m+1})|$ z dôvodov ako vo vete (1). Tým sme dokázali, že postupnosť $\{|y(x'_m)|\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ je klesajúca a postupnosť $\{|y'(x_m)|\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ je rastúca. Pretože $f_i'(x) \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, potom $\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x)\, dx = \infty$, teda podľa [5] všetky riešenia rovnice (1) sú oscilatorické a podľa predchádzajúceho sú ohraničené.

V ďalšom uvedieme rovnicu tvaru (1), ktorá má oscilatorické aj neoscilatorické riešenie. Je to rovnica

$$y'' + x^{-(3+N)/2} y^N = 0. \tag{5}$$

U tejto rovnice nie sú splnené postačujúce podmienky z vety 1. preto, aby všetky riešenia boli neoscilatorické. Ďalej vidíme, že $\int^{\infty} x^N x^{-(3+N)/2}\, dx < \infty$, čo je podľa [5] postačujúca podmienka pre existenciu aspoň jedného neoscilatorického riešenia rovnice (5). Z dôkazu vety v [5] vyplýva, že každé riešenie $y(x)$ rovnice (5), ktoré pre dostatočne veľké a splňuje počiatočné podmienky $y(a) = 0$, $y'(a) \geqq 1$, je neoscilatorické. Okrem neoscilatorického riešenia tohto druhu možno nájsť i také riešenie rovnice (5), ktoré nemá v intervale $(0, \infty)$ žiaden nulový bod. Hľadajme riešenie rovnice (5) v tvare

$$y(x) = x^{\beta} u(\lg x).$$

Po tejto transformácii rovnica (5) prejde do tvaru

$$\ddot{u} + (2\beta - 1)\dot{u} + \beta(\beta - 1)u + e^{t(N-1)(\beta-1/2)}u^N = 0$$

$$\left(\dot{u} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \ \lg x = t\right).$$

Položme $\beta = 1/2$, dostaneme

$$\ddot{u} - 1/4u + u^N = 0. \tag{6}$$

Vidieť, že posledná rovnica má riešenie $u(t) = 4^{1/(1-N)}$, teda $y(x) = 4^{1/(1-N)}x^{1/2}$ je riešením rovnice (5). Toto riešenie je neoscilatorické a v intervale $(0, \infty)$ nemá nulový bod.

Nech je $u(t)$ riešenie rovnice (6) také, že

$$u(a) = 0, \qquad \dot{u}^2(a) < [2/(N + 1) - 1]\, 4^{(1+N)/(1-N)}.$$

Ukážeme o ňom, že je oscilatorické. Vynásobme (6) $\dot{u}(t)$ a integrujme v intervale $\langle a, t\rangle$; dostaneme

$$\dot{u}^2(t) = \frac{1}{4}u^2(t) - \frac{2}{(N + 1)}u^{N+1}(t) + \dot{u}^2(a). \tag{7}$$

Z poslednej rovnice vidieť, že pre toto riešenie platí

$$-4^{1/(1-N)} < u(t) < 4^{1/(1-N)}.$$

V opačnom prípade by existoval bod $t_0 > a$ tak, že $u(t_0) = 4^{1/(1-N)}$. Toto však vedie k sporu, pretože $\dot{u}^2(a) < [2/(N + 1) - 1]\, 4^{(1+N)/(1-N)}$. Nech $b > a$ je ďalší nulový bod riešenia $u(t)$. V tomto bode $\dot{u}^2(b) = \dot{u}^2(a)$, čo je zrejmé z rovnice (7). Predpokladajme, že t^* je posledný nulový bod riešenia $u(t)$ a nech je $u(t) > 0$ v intervale (t^*, ∞). Potom zo (6) dostávame, že $u(t)$ je v intervale (t^*, ∞) konkávnou funkciou. Existuje teda $\lim_{t\to\infty} u(t) = u_0$ $[-u(t)$ je tiež riešenie rovnice (6)]. Z rovnice (6) je ďalej zrejmé, že $u_0 = 4^{1/(1-N)}$, a z rovnice (7) zasa vyplýva

$$\dot{u}^2(a) + [1 - 2/(1 + N)]4^{(1+N)/(1-N)} = 0,$$

čo je spor s predpokladom, ktorý sme položili na počiatočné podmienky. Riešenie $u(t)$ je teda oscilatorické a pretože $y(x) = x^{1/2}u(t)$, aj $y(x)$ je oscilatorické riešenie rovnice (5). Tým je dokázané, že rovnica (5) má aspoň jedno oscilatorické riešenie.

V nasledujúcich dvoch vetách sú odvodené nutné a postačujúce podmienky na to, aby exitovalo aspoň jedno ohraničené neoscilatorické riešenie rovnice (1) a aspoň jedno neohraničené neoscilatorické riešenie.

Veta 3. *Nech je N_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) také isté ako vo vete* 1. Nech sú funkcie $f_i(x)$ *nezáporné a spojité v intervale $\langle 0, \infty)$. Potom existuje ohraničené neoscilatorické riešenie rovnice* (1) *vtedy a len vtedy, keď*

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x f_i(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Dôkaz. 1. Nech je $a < b$. Integrujme rovnicu (1) najskôr v intervale $\langle x, b\rangle$, potom v intervale $\langle a, x\rangle$; dostaneme

$$y(x) = y(a) + y'(b)(x - a) +$$
$$+ (x - a)\sum_{i=1}^{n} \int_{x}^{b} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \int_{a}^{x} (t - a) f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, \mathrm{d}t. \tag{8}$$

Nech je $y(x)$ ohraničené neoscilatorické riešenie rovnice (1) také, že pre $x > a$ je $0 < y(x) \leqq K$ [$-y(x)$ je tiež riešením rovnice (1)]. Potom z (8), pretože $y(a) \geqq 0$ $y'(b) > 0$, máme

$$K \geqq y(x) \geqq \sum_{i=1}^{n} \int_{a}^{x} (t - a) f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, \mathrm{d}t \geqq M \sum_{i=1}^{n} \int_{a}^{x} (t - a) f_i(t)\, \mathrm{d}t,$$

kde $M = \min y^{N_i}(a)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Posledná nerovnosť zrejme platí pre ľubovoľné $x > a$, a teda

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x f_i(x)\, \mathrm{d}x < \infty.$$

2. Tvrdenie o postačujúcej podmienke bude dokázané, ak nájdeme ohraničené neoscilatorické riešenie rovnice (1), za predpokladu, že platí

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x f_i(x)\, \mathrm{d}x < \infty.$$

Nech $\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x f_i(x)\, \mathrm{d}x < \infty$. Potom pre dostatočne veľké a platí nerovnosť

$$\int_{a}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (x - a) f_i(x)\, \mathrm{d}x < \tfrac{1}{2}.$$

Zoberme integrálnu rovnicu

$$y(x) = k + \int_{a}^{x} (t - a) \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, \mathrm{d}t + (x - a) \int_{x}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y^{N_i}(t)\, \mathrm{d}t, \tag{9}$$

pričom k je ľubovoľné kladné číslo. Dokážeme, že táto rovnica má v intervale (a, ∞) ohraničené riešenie $y(x) > 0$, ktoré je zrejmé riešením aj rovnice (1).

Existencia ohraničeného riešenia $y(x)$ rovnice (9) sa ukáže metódou postupných aproximácií. Definujme

$$y_1(x) = k$$
$$y_{m+1}(x) = k + \int_{a}^{x} (t - a) \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y_m^{N_i}(t)\, \mathrm{d}t + (x - a) \int_{x}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, y_m^{N_i}(t)\, \mathrm{d}t,$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nech je $K = \max(1, 2k)$. Pretože pre $x \geqq a$ a pre $k \leqq y_m(x) \leqq K$ je

$$k \leqq y_{m+1}(x) \leqq k + K\left\{\int_a^x (t-a) \sum_{i=1}^n f_i(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^\infty (t-a) \sum_{i=1}^n f_i(t)\,\mathrm{d}t\right\} =$$

$$= k + K\int_a^\infty (t-a) \sum_{i=1}^n f_i(t)\,\mathrm{d}t \leqq k + \frac{K}{2} \leqq K.$$

To znamená, že postupné aproximácie sú ohraničené funkcie a pre $m = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$k \leqq y_m(x) \leqq K.$$

Ďalej ľahko možno dokázať, že $\{y_m(x)\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ tvoria postupnosť rovnomocne spojitých funkcií v ľubovoľnom konečnom intervale. Pre pevné $x > a$ je $\{y_m(x)\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ rastúca postupnosť, čo sa tiež dokáže indukciou, pretože $y_2(x) > y_1(x)$ a pre $m = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$y_{m+1}(x) - y_m(x) = \int_a^x (t-a) \sum_{i=1}^n f_i(t)\,[y_m^{N_i}(t) - y_{m-1}^{N_i}(t)]\,\mathrm{d}t +$$

$$+ (x-a)\int_x^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t)\,[y_m^{N_i}(t) - y_{m-1}^{N_i}(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Podľa Ascoliho vety postupnosť $\{y_m(x)\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ rovnomerne konverguje k funkcii $y(x)$ v ľubovoľnom konečnom intervale $\langle a, b\rangle$.

Nech je $\varepsilon >$ ľubovoľne malé číslo, potom pre dostatočne veľké b platí

$$\left|y_{m+1}(x) - k - \int_a^x (t-a) \sum_{i=1}^n f_i(t)\, y_m^{N_i}(t)\,\mathrm{d}t - (x-a)\int_x^b \sum_{i=1}^n f_i(t)\, y_m^{N_i}(t)\,\mathrm{d}t\right| =$$

$$= (x-a)\int_b^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t)\, y_m^{N_i}(t)\,\mathrm{d}t \leqq K\int_b^\infty (t-a) \sum_{i=1}^n f_i(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Ak $m \to \infty$, $b \to \infty$, z posledného vyplýva, že

$$y(x) = k + \int_a^x (t-a) \sum_{i=1}^n f_i(t)\, y^{N_i}(t)\,\mathrm{d}t + (x-a)\int_x^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t)\, y^{N_i}(t)\,\mathrm{d}t.$$

$y(x)$ je teda riešením integrálnej rovnice (9). Tým je veta dokázaná.

Poznámka 1. Z druhej časti dôkazu vidieť, že rovnica (9) a teda aj rovnica (1) má ohraničené neoscilatorické riešenie vychádzajúce z bodu (a, k), pričom $k > 0$ je ľubovoľné a a dostatočne veľké číslo.

Poznámka 2. Tvrdenie vety 3 platí aj pre $N_i = 1$. Keby bolo N_i tvaru ako vo vete 1, pričom $N_i > 1$, potom existenciu takýchto riešení možno dokázať iba pre $0 < k < 1$. Ak žiadame existenciu kladného neoscilatorického riešenia, potom veta 3 platí pre ľubovoľné $N_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Veta 4. *Nech je $N_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ľubovoľné reálne číslo.. Nech funkcie $f_i(x)$ majú tie isté vlastnosti ako vo vete 3. Potom existuje neohraničené neoscilatorické riešenie rovnice* (1), *pre ktoré platí $y(x) \sim c_0 x (c_0 > 0)$ vtedy a len vtedy, keď*

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x) \, dx < \infty .$$

Dôkaz. 1. Nech je $y(x)$ riešenie rovnice (1), pre ktoré platí $y(x) \sim c_0 x$ $(c_0 > 0)$. Potom existujú čísla $A > 0$ a b tak, že $y(x) > Ax$ pre $x \geqq b$. Pre takéto x máme

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \, y^{N_i}(x) > B \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \, x^{N_i},$$

pričom $B = \min A^{N_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Z rovnice (1) dostaneme

$$y'(b) = y'(x) + \int_b^x \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \, y^{N_i}(t) \, dt \geqq y'(x) + B \int_b^x \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \, t^{N_i} \, dt .$$

Je zrejmé, že $y'(x)$ je klesajúca funkcia, pretože $y(x) > 0$. Existuje teda $\lim_{x \to \infty} y'(x) = c_0$. Z poslednej nerovnosti vyplýva, že

$$y'(b) \geqq c_0 + B \int_b^x \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \, t^{N_i} \, dt$$

platí pre ľubovoľné x. Tým je dokázaná existencia integrálu

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x) \, dx .$$

2. Nech $\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x) \, dx < \infty$. Nech je $\varepsilon > 0$ ľubovoľne malé. Potom existuje číslo a tak, že

$$\int_a^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x) \, dx < \varepsilon .$$

Zoberme riešenie $y(x)$ rovnice (1), ktoré v bode a má $y(a) = 0$, $y'(a) \geqq 1$, ak je $0 < N_i < 1$. V prípade $N_i \geqq 1$ berme $y(a) = 0$, $y'(a) \leqq 1$. Toto riešenie v intervale

(a, ∞) nemá nulový bod. Pripusťme, že to nie je pravda a označme znakom b najmenší nulový bod riešenia $y(x)$ v intervale (a, ∞). Riešenie $y(x)$ v intervale (a, b) spĺňa nerovnosť

$$y(x) \leqq y'(a)(x - a),$$

pretože je tam konkávnou funkciou. Z rovnice (1) dostaneme

$$y'(a) \leqq y'(x) + \int_a^x \sum_{i=1}^n f_i(t) [y'(a)]^{N_i} (t - a)^{N_i} \, dt \leqq$$

$$\leqq y'(x) + y'(a) \int_a^\infty \sum_{i=1}^n f_i(x)(x - a)^{N_i} \, dx \leqq y'(x) + y'(a) \, \varepsilon,$$

t. j.

$$y'(a)(1 - \varepsilon) \leqq y'(x). \tag{10}$$

Pretože $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľne malé, posledná nerovnosť vedie k sporu. Teda riešenie $y(x)$ nenadobúda v intervale (a, ∞) nulový bod, t. j. je neoscilatorické. Pretože $y'(x)$ je klesajúca funkcia a podľa (10) je zdola ohraničená, musí platiť $\lim_{x \to \infty} y'(x) = c_0 > 0$, t. j. $y(x) \sim c_0 x$. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 3. Z viet 3 a 4 vidieť, že ak je $0 < N_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, potom existencia ohraničeného neoscilatorického riešenia implikuje existenciu riešenia $y(x) \sim c_0 x (c_0 > 0)$. V prípade $N_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ platí aj opak. Pre $N_i > 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ existencia riešenia $y(x) \sim c_0 x$ implikuje existenciu ohraničeného neoscilatorického riešenia.

LITERATÚRA

[1] Atkinson F. V., *On second-order non-linear oscillations*, Pacific J. Math. 5 (1955), 643—647.

[2] Jones J., *On non-linear second-order differential equations*, Proc. of the Am. Math. Soc. 9 (1958), 584—589.

[3] Moore R. A. and Nehari Z., *Nonoscillation theorems for a class of nonlinear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 30—52.

[4] Nehari Z., *On a class of nonlinear second-order differential equations*, Trans, Amer. Math. Soc. 95 (1960), 101—123.

[5] Belohorec Š., *Oscilatorické riešenia istej nelineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 11 (1961), 250—255.

Došlo 5. 4. 1962.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

NONOSCILLATORY SOLUTIONS OF A CERTAIN NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

Štefan Belohorec

Summary

In this paper are studied some properties of the nonlinear differential equation

$$y'' + \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y^{N_i} = 0,$$

where $0 < N_i < 1$ and N_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ is supposed to be equal to $N_i = p_i/q_i$, p_i and q_i are odd integers. There are four theorems proved.

Theorem 1. Let the functions $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ be nonnegative in the interval $(0, \infty)$ and let them have there continuous derivatives $f_i'(x) \leqq 0$, where an index j and a number $c > 0$ exist in such a way, that $f_j'(x) < 0$ in the interval (c, ∞). Let us denote $\{x_m\}$, $\{x_m'\}$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$ the sequences of points such, that $y(x_m) = 0$, $y'(x_m') = 0$ for some solution.

Then for every oscillatory solution $y(x) \not\equiv 0$ of the equation (1) the sequence $\{|y'(x_m)|\}$ is decreasing and the sequence $\{|y(x_m')|\}$ is increasing. If we add

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x f_i(x)\, \mathrm{d}x < \infty.$$

then every solution $y(x) \not\equiv 0$ of the equation (1) is nonoscillatory.

Theorem 2. Let the functions $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ be nonnegative in the interval $(0, \infty)$ and let them have there continuous derivatives $f_i'(x) \geqq 0$, where a number $c > 0$ and an index j exist in such a way, that $f_j'(x) > 0$ in the interval (c, ∞). Then all solutions of the equation (1) are bounded and for every oscillatory solution $y(x) \not\equiv 0$ of the equation (1) the sequence $\{|y'(x_m)|\}$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$ is increasing and the sequence $\{|(x_m')|\}$ is decreasing.

Theorem 3. Let the functions $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ be nonnegative and continuous in the interval $(0, \infty)$. Then a bounded nonoscillatory solution of the equation (1) exists if and only if

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x f_i(x)\, \mathrm{d}x < \infty.$$

Theorem 4. Let $N_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ be arbitrary real numbers. Let the functions $f_i(x)$ be nonnegative and continuous in the interval $(0, \infty)$. Then there exists an unbounded nonoscillatory solution of the equation (1), for which $y(x) \sim c_0 x$ $(c_0 > 0)$ if and only if

$$\int^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x^{N_i} f_i(x)\, \mathrm{d}x < \infty.$$