František Machala

Über einige Endomorphismen der additiven Gruppe des Endomorphismenringes eines vollständig reduziblen Moduls

Matematický časopis, Vol. 22 (1972), No. 2, 131--140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126319

Matematický časopis 22 (1972), No. 2

ÜBER EINIGE ENDOMORPHISMEN DER ADDITIVEN GRUPPE DES ENDOMORPHISMENRINGES EINES VOLLSTÄNDIG REDUZIBLEN MODULS

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

Seien M ein vollständig reduzibler Modul, Φ der Endomorphismenring dieses Moduls und σ ein Endomorphismus der additiven Gruppe des Ringes Φ. Im vorliegenden Artikel wird bewiesen, dass alle Linkshauptideale (Rechtshauptideale) des Ringes Φ genau dann σ-zulässig sind, wenn σ die linke (rechte) Translation des Ringes Φ ist. Es werden auch einige Spezialfälle behandelt.

Ist ein Modul M die direkte Summe seiner einfachen Untermoduln, so heisst er vollständig reduzibel. Wir werden uns lediglich mit unitären, vollständig reduziblen Linksmoduln über dem Ring R mit Einselement befassen. Die Tatsache, dass U ein Untermodul des Moduls M ist, wird als $U \leq M$ geschrieben. Ein monogener, durch das Element $u \in M$ erzeugter Untermodul wird mit Ru bezeichnet. Die Summe zweier Untermoduln P, Q, für die $P \cap Q = o$ gilt, wird mit $P \oplus Q$ angegeben. Zu jedem Untermodul $U \leqq M$ gibt es einen solchen Untermodul $V \leqq M$, dass $U \oplus V = M$. (Vgl. Theorem aus [2], Seite 96). Die Summe H aller untereinander isomorphen einfachen Untermoduln des Moduls M nennt man homogene Komponente. Der Modul M ist die direkte Summe seiner homogenen Komponenten — kurz $M = \sum_{\nu \in J} \oplus H_\nu$ (Vgl. Folgerung aus [2], Seite 99). Zu jedem $x \in M$ gibt es daher n solcher Elemente $x_i \neq o$, $x_i \in H_{\nu_i}$, dass $x = x_1 + \ldots + x_n$ ist.

Bezeichnen wir mit Φ den Ring aller Endomorphismen des Moduls M, mit ι das Einselement dieses Ringes, mit $M\varrho$ das Bild vom Modul M im Endomorphismus ϱ, mit Ker (ϱ) seinen Kern und mit $\Phi\varphi$ bzw. $\varphi\Phi$ vom Element φ erzeugtes Links- Rechtshauptideal des Ringes Φ. Nach [3] sind die Beziehungen $\Phi\varphi \cap \Phi\omega = o$, $M\varphi \cap M\omega = o$, äquivalent. (Wir benutzen dieselbe Bezeichnung für das Nullelement des Ringes Φ und des Moduls M) Wenn $\varrho \in \Phi$, dann ist $H\varrho \leqq H$ für jede homogene Komponente H des Moduls M. (Vgl. Satz 10 aus [1], Seite 152.) Die Bildmenge des Elementes $x \in M$ in allen Endomorphismen des Moduls M wird als M_x geschrieben.

Lemma 1. *M_x ist eine additive Gruppe bezüglich der Addition im Modul M. Wenn $x = x_1 + \ldots + x_n$ und $Rx_i \cap (\sum_{j \neq i} Rx_j) = o$ für $i = 1, \ldots, n$, so ist $M_x = M_{x_1} + \cdots + M_{x_n}$.*

Beweis. Ist $u, v \in M_x$, dann existieren $\alpha, \beta \in \Phi$ derart, dass $x\alpha = u$, $x\beta = v$ gilt. Daraus ergibt sich $u - v = x(\alpha - \beta)$, d. h. $u - v \in M_x$ und M_x ist eine additive Gruppe.

Gegeben sei $u \in M_x$. Dann existiert $\alpha \in \Phi$ derart, dass $u = x\alpha = x_1\alpha + \ldots + x_n\alpha$. Weil $x_i\alpha \in M_{x_i}$, ist $u \in M_{x_1} + \ldots + M_{x_n}$ und $M_x \subset M_{x_1} + \ldots + M_{x_n}$. Wählen wir nun umgekehrt ein beliebiges Element $y \in M_{x_1} + \ldots + M_{x_n}$. Dann lässt sich $y = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$ schreiben. Es existiert ein Untermodul $Q \leqq M$ derart, dass $Rx_1 \oplus \ldots \oplus Rx_n \oplus Q = M$ gilt. Jedes $z \in M$ lässt sich eindeutig als $z = z_1 + \ldots + z_n + q$, wo $z_i \in Rx_i$, $q \in Q$, schreiben. Die durch die Vorschrift $z\alpha = z_1\alpha_1 + \ldots + z_n\alpha_n$ definierte Abbildung α stellt einen Endomorphismus des Moduls M dar. Setzen wir $z = x_i$, dann $x_i\alpha = x_i\alpha_i$ und $y = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n = x_1\alpha + \ldots + x_n\alpha = x\alpha$. Folglich ist $y \in M_x$ und $M_{x_1} + \ldots + M_{x_n} \subset M_x$.

Lemma 2. *Rx sei ein monogener Untermodul des Moduls M.*
a) *Jeder Untermodul des Moduls Rx ist monogen.*
b) *Rx ist eine direkte Summe einer endlichen Anzahl einfacher Untermoduln.*
c) *Es sei $Rx = Ru \oplus Rv$ und $x = u' + v'$, wo $u' \in Ru$, $v' \in Rv$. Dann ist $Ru = Ru'$, $Rv = Rv'$.*

Beweis. a) P sei ein Untermodul vom Modul Rx. Es existiert ein solcher Untermodul $Q \leqq Rx$, dass $Rx = P \oplus Q$. Zufolge $x \in Rx$ gibt es $p \in P$, $q \in Q$ derart, dass $x = p + q$. Offensichtlich ist $Rp \leqq P$. Wählen wir ein beliebiges Element $y \in P$. Es existiert ein $r \in R$ derart, dass $y = rx = r(p + q)$. Weil $rq = o$ gilt, ist $y = rp$. Dies bedeutet, dass $y \in Rp$ und mithin $P \leqq Rp$.

b) Der Modul Rx lässt sich als direkte Summe $\sum_{\nu \in J} \oplus Ru_\nu$ einfacher Untermoduln schreiben. Es existiert eine endliche Anzahl von k Elementen $u_i' \in Ru_{\nu_i}$, $u_i' \neq o$ derart, dass $x = u_1' + \ldots + u_k'$ ist. Offensichtlich gilt $\sum_{i=1}^{k} \oplus Ru_{\nu_i} \leqq Rx$. Jedes Element Rx lässt sich in der Form $rx = ru_1' + \ldots + ru_k'$ schreiben. Daraus folgt $Rx \leqq \sum_{i=1}^{k} \oplus Ru_{\nu_i}$ und somit $Rx = \sum_{i=1}^{k} \oplus Ru_{\nu_i}$.

c) Nehmen wir an, es existieren Ru'', Rv'' derart, dass $Ru = Ru' \oplus Ru''$, $Rv = Rv' \oplus Rv''$. Offensichtlich gilt $Rx = R(u' + v') \leqq Ru' \oplus Rv' \leqq Ru \oplus \oplus Rv = Rx$, woraus sich $Ru \oplus Rv = Ru' \oplus Ru'' \oplus Rv' \oplus Rv'' = Ru' \oplus Rv'$ und mithin $Ru'' = Rv'' = o$ ergibt.

Lemma 3. *Seien Rp, Rq einfache Untermoduln des Moduls M, die zu einer und derselben homogenen Komponente gehören, wobei $Rp \cap Rq = o$. Dann* *existiert ein derartiger Untermodul* $Ru \leqq M$, *dass* $S = Rp \oplus Rq = Rp \oplus Ru - - Ru \oplus Rq$ *gilt.*

Beweis. Die Moduln Rp, Rq sind isomorph. Nehmen wir an, dass α der zugehörige Isomorphismus ist und schreiben wir $p\alpha = q'$. Dann gilt $Rq = Rq'$. Wenn $x \in Rq \cap R(q' - p)$ ist, dann existieren $r_1, r_2 \in R$ derart, dass $x = r_1 q' = r_2(q' - p)$, woraus sich $(r_2 - r_1)q' = r_2 p$ ergibt. Nach der Voraussetzung $Rp \cap Rq = o$ gilt $r_2 p = o$. Dann ist auch $r_2 q' = r_2 p\alpha = o$ und deshalb gilt $x = o$. Folglich $Rq \cap R(q' - p) = o$. Nach Theorem aus [2], Seite 97, ist $R(q' - p)$ ein einfacher Modul und $S = R(q' - p) \oplus Rq$. Weil $p = q'\alpha^{-1}$ ist, kann man analog beweisen, dass $Rp \cap R(q' - p) = o$ und $S = Rp \oplus \oplus R(q' - p)$. Der Untermodul $R(q' - p) = Ru$ erfüllt also die Bedingungen des Satzes.

Lemma 4. *Gegeben sei ein Endomorphismus* $\omega \in \Phi$. *Die folgenden zwei Behauptungen sind äquivalent:*
a) *Für jedes* $\varrho \in \Phi$ *gilt* $\omega\varrho = \omega\varrho\omega$.
b) *Der Endomorphismus* ω *ist idempotent und* $M\omega$ *ist die Summe einer gewissen Menge homogener Komponenten von Modul* M.

Beweis. $a \to b$. Setzt man $\varrho = \iota$, so erhalten wir $\omega = \omega\omega$ und ω ist ein idempotentes Element. Offenbar gilt $M\omega\varrho \leqq M\omega$ für jedes $\varrho \in \Phi$. Nach Satz 11 aus [1], Seite 152 ist also $M\omega$ die Summe einer gewissen Menge homogener Komponenten von Modul M.

$b \to a$. Weil $M\omega$ die direkte Summe homogener Komponenten darstellt, gilt nach Satz 11 aus [1], Seite 152, dass $M\omega\varrho \leqq M\omega$ für jedes $\varrho \in \Phi$ ist. Man wähle ein beliebiges Element $x \in M$, dann $x\omega\varrho \in M\omega$. Nachdem ω ein idempotenter Endomorphismus ist, gilt $x\omega\varrho\omega = x\omega\varrho$ und somit ist $\omega\varrho\omega = \omega\varrho$ für jedes $\varrho \in \Phi$.

Satz 1. *Setzen wir voraus, dass in jeder homogenen Komponente vom Modul* M *mindestens zwei verschiedene einfache Untermoduln existieren und* σ *sei ein Endomorphismus der additiven Gruppe des Ringes* Φ. *Alle Linkshauptideale des Ringes* Φ *sind genau dann* σ*-zulässig, wenn* σ *eine, durch die Vorschrift* $\varrho^\sigma \quad \iota^\sigma\varrho$, $\varrho \in \Phi$ *bestimmte linke Translation dieses Ringes ist.*

Beweis. Nehmen wir an, dass σ eine beliebige linke Translation des Ringes Φ ist, d. h. es gibt ein Element $\xi \in \Phi$ derart, dass $\varphi^\sigma = \xi\varphi$ für jedes $\varphi \in \Phi$ gilt. Alle Linkshauptideale sind offensichtlich σ-zulässig.

Setzen wir nun voraus, dass jedes Linkshauptideal des Ringes Φ σ-zulässig ist. Es gilt $(\Phi\varphi)^\sigma \leqq \Phi\varphi$ für jedes $\varphi \in \Phi$, also auch $\varphi^\sigma \in \Phi\varphi$. Dann existiert zu jedem Element φ ein derartiges $\xi_\varphi \in \Phi$, dass $\varphi^\sigma = \xi_\varphi\varphi$ ist. Da σ ein Endomorphismus der additiven Gruppe des Ringes Φ ist, gilt für beliebige $\varrho, \varphi \in \Phi$:

$$(1) \qquad (\varrho + \varphi)^\sigma = \xi_{\varrho+\varphi}\varrho + \xi_{\varrho+\varphi}\varphi = \xi_\varrho\varrho + \xi_\varphi\varphi\,,$$

woraus wir $(\xi_{\varrho+\varphi} - \xi_\varrho)\varrho = (\xi_\varphi - \xi_{\varphi+\varrho})\varphi$ erhalten. Ist $\Phi\varrho \cap \Phi\varphi = o$, so gilt

$$(2) \qquad \xi_{\varrho+\varphi}\varrho = \xi_\varrho\varrho\,, \quad \xi_{\varrho+\varphi}\varphi = \xi_\varphi\,\varphi.$$

Für beliebiges $x \in M$ gilt dann $x\xi_{\varrho+\varphi} = x\xi_\varrho + u$, wo $u \in \mathrm{Ker}\,(\varrho)$ und zugleich $x\xi_{\varrho+\varphi} = x\xi_\varphi + v$, wo $v \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ ist. Aus diesen Beziehungen ergibt sich

$$(3) \qquad x(\xi_\varrho - \xi_\varphi) = v - u = z\,, \quad z \in \mathrm{Ker}\,(\varrho) + \mathrm{Ker}\,(\varphi)\,.$$

Betrachten wir nun ein beliebiges idempotentes Element $\omega \in \Phi$. Dann $\gamma = \iota - \omega$ ist wiederum idempotent und es gilt $\Phi\omega \cap \Phi\gamma = o$. Nach (2) erhalten wir $\omega^\sigma = \xi_\omega\omega = \xi_{\gamma+\omega}\omega = \xi_\iota\omega$. Nach (3) gilt sodann für alle idempotenten Elemente ω mit der Eigenschaft $\Phi\varrho \cap \Phi\omega = o$, folgende Beziehung:

$$(4) \qquad x(\xi_\varrho - \xi_\iota) = z\,, \quad z \in \mathrm{Ker}\,(\varrho) + \mathrm{Ker}\,(\omega)\,.$$

Das Element z ist also unabhängig von der Wahl dieses idempotenten Endomorphismus.

Wählen wir ein beliebiges $\varrho \in \Phi$ und ein Element $x \in M$, $x \neq o$, welches in gewisser homogener Komponente H des Moduls M liegt. Nach (4) ist auch $z \in H$. Gemäss Lemma 2 lässt sich $Rz \cap H\varrho = Ru$ schreiben. Wählen wir einen Untermodul $Rv \leqq M$ derart, dass $Rz = Ru \oplus Rv$. Offensichtlich gilt $Rv \cap H\varrho = o$. Nehmen wir an, dass $v \notin \mathrm{Ker}\,(\varrho)$. Bezeichnen wir $Rv' = Rv \cap \mathrm{Ker}\,(\varrho)$. Dann existiert ein $Rv'' \neq o$ derart, dass $Rv = Rv' \oplus Rv''$ ist. Hierbei gilt $Rv'' \cap \mathrm{Ker}\,(\varrho) = o$. Wählen wir den Untermodul Q so, dass $M = Rv'' \oplus \mathrm{Ker}\,(\varrho) \oplus Q$ ist und das idempotente Element $\omega \in \Phi$, welches durch die Untermoduln $M\omega = Rv''$, $\mathrm{Ker}\,(\omega) = \mathrm{Ker}\,(\varrho) \oplus Q$ bestimmt ist. Klar gilt $M\omega \cap M\varrho = o$. Weil $v'' \in Rz$, $v'' \notin \mathrm{Ker}\,(\omega)$, liegt z nicht in $\mathrm{Ker}\,(\omega)$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Beziehung (4), d. h. $v \in \mathrm{Ker}\,(\varrho)$.

a) Es sei $H\varrho = o$. Dann ist $H \leqq \mathrm{Ker}\,(\varrho)$, und auch $z \in \mathrm{Ker}\,(\varrho)$. Nach (4) ergibt sich $x\varrho^\sigma = x\xi_\varrho\varrho = (x\xi_\iota + z)\varrho = x\xi_\iota\varrho$.

b) Es sei $o < H\varrho < H$. Setzen wir voraus, dass $z \notin \mathrm{Ker}\,(\varrho)$ gilt. Dann gilt auch $u \notin \mathrm{Ker}\,(\varrho)$. Es gibt einen einfachen Untermodul $Ru' \leqq Ru$ derart, dass $Ru' \cap \mathrm{Ker}\,(\varrho) = o$ ist. Bezeichnen wir $K = H \cap \mathrm{Ker}\,(\varrho)$ und wählen einen Untermodul $U \leqq M$ derart, dass $H = Ru' \oplus K \oplus U$ gilt. Wenn wir $P = K \oplus U$ setzen, bekommen wir

$$(5) \qquad H = Ru' \oplus P\,.$$

Wegen $Ru' \leqq H\varrho$ und $H\varrho < H$, gibt es ein solches $p \in P$, dass $Rp \cap H\varrho = o$ und Rp ein einfacher Untermodul ist. Setzen wir $S = Rp \oplus Ru'$. Dann gilt $S \cap H\varrho = Ru'$, $S \cap P = Rp$. Nehmen wir z. B. an, dass $s \in S$, $s \in H\varrho$. Dann lässt sich $s = r_1p + r_2u'$; $r_1, r_2 \in R$ schreiben, woraus $r_1p \in H\varrho$, $r_1p = o$ und $s = r_2u'$ folgt.

Nach Lemma 3 existiert ein einfacher Untermodul $Rw \leqq S$ derart, das

$$S = Rw \oplus Rp = Rw \oplus Ru' . \tag{6}$$

Offensichtlich gilt $Rw \cap M\varrho = o$, $Rw \cap P = o$. Betrachten wir einen Untermodul Q mit der Eigenschaft $P = Rp \oplus Q$. Nach (5) ist

$$H = Ru' \oplus P = Ru' \oplus Rp \oplus Q = S \oplus Q . \tag{7}$$

Wählen wir ferner Untermoduln V und Z derart, dass die Beziehungen Ker $(\varrho) = K \oplus V$ und $M = S \oplus Q \oplus V \oplus Z$ gelten. Nach (6), (7) ergibt sich

$$\begin{aligned} M &= Rw \oplus Rp \oplus Q \oplus V \oplus Z = Rw \oplus P \oplus V \oplus Z = \\ &= Ru' \oplus P \oplus V \oplus Z . \end{aligned} \tag{8}$$

Betrachten wir einen idempotenten Endomorphismus ω mit den Eigenschaften Ker $(\omega) = P \oplus V \oplus Z$, $M\omega = Rw$. Offenbar gilt Ker $(\varrho) \leqq$ Ker (ω), $M\omega \cap \cap M\varrho = o$. Nach (8) liegt der Untermodul Ru' nicht in Ker (ω) und deshalb liegt auch Rz nicht in Ker (ω). Folglich gilt $z \notin$ Ker (ω). Dies steht jedoch im Widerspruch zu (4) und deshalb $z \in$ Ker (ϱ). Ähnlich wie in a) erhalten wir die Beziehung $x\varrho^\sigma = x\xi_\iota\varrho$.

c) Es sei $H\varrho = H$ und zugleich Ker $(\varrho) \cap H \neq o$. Bezeichnen wir wiederum $K = $ Ker $(\varrho) \cap H$ und wählen einen Untermodul B derart, dass $H = K \oplus B$ ist. Offensichtlich gilt $o < B < H$. Wegen $H\varrho = H$ gilt $B < H\varrho$ und es existiert ein Untermodul C des Moduls H derart, dass $C\varrho = B$ gilt. Aus der Voraussetzung $C = H$ ergibt sich $C\varrho = H\varrho = H = B$, was einen Widerspruch enthält, denn $B < H$. Somit gilt $o < C < H$ und es ist möglich einen Untermodul S so zu wählen, dass $H = C \oplus S$ gilt. Offenbar ist $o < S < H$. Wird ein solcher Untermodul U betrachtet, wo $M = C \oplus S \oplus U$, dann lässt sich jedes $m \in M$ in der Form $m = c + s + u$ schreiben, wo $c \in C$, $s \in S$, $u \in U$.

Definieren wir einen Endomoprhismus α des Moduls M durch die Vorschrift: $m\alpha = c\varrho$. Hiernach ist $M\alpha = H\alpha = B$ und $H\alpha < H$. Nach a), b) gilt

$$x\alpha^\sigma = x\xi_\iota\alpha . \tag{9}$$

Betrachten wir ferner den Endomorphismus $\alpha + \varrho$. Für ein beliebiges Element $m \in H$ bekommen wir $m(\alpha + \varrho) = (c + s)(\alpha + \varrho) = s\varrho$ und deshalb ist $H(\alpha + \varrho) \leq S\varrho$. Zufolge $S < H$ gilt auch $S\varrho < H$ und $H(\alpha + \varrho) < H$. Nach a), b) gilt $x(\alpha + \varrho)^\sigma = x\xi_\iota\alpha + x\xi_\iota\varrho$ und nach (1), (9) gilt $x(\alpha + \varrho)^\sigma = x\xi_\iota\alpha + x\varrho^\sigma$. Durch Vergleich ergibt sich $x\varrho^\sigma = x\xi_\iota\varrho$.

d) Es sei $H\varrho = H$. Wählen wir einen, der homogenen Komponente H gehörenden einfachen Untermodul Ra und einen Untermodul U derart, dass $M = Ra \oplus U$ gilt. Dann ist $m = a' + u$, $a' \in Ra$, $u \in U$ für jedes $m \in M$. Betrachten wir nun einen, durch die Vorschrift $m\beta = -a'\cdot\varrho$ bestimmten Endomorphismus β. Wegen $M\beta = (Ra)\varrho$ ist entweder $M\beta = o$ oder $M\beta$ ist ein einfacher Modul. D. h. es gilt $H\beta < H$, denn H ist laut Voraussetzung die direkte Summe von mindestens zwei einfachen Untermoduln. Nach a), b) gilt dann

$$x\beta^\sigma = x\xi_\iota\beta. \tag{10}$$

Für alle $a' \in Ra$ gilt $a'(\beta + \varrho) = o$, d. h. $Ra \leqq \text{Ker}\,(\beta + \varrho)$ und $\text{Ker}\,(\beta + \varrho) \cap \cap H \neq o$. Jetzt können zwei Fälle auftreten: Entweder $H(\beta + \varrho) < H$ oder $H(\beta + \varrho) = H$. Im ersten Falle laut a), b) und im zweiten Falle laut c) gilt $x(\beta + \varrho)^\sigma = x\xi_\iota(\beta + \varrho)$. Unter Anwendung von (1) und (10) bekommen wir $x\varrho^\sigma = x\xi_\iota\varrho$. Somit ist bewiesen, dass für jedes $\varrho \in \Phi$ und für ein beliebiges Element $x \in M$, $x \neq o$, welches der homogenen Komponente H des Moduls M zugehört, $x\varrho^\sigma = x\xi_\iota\varrho$ gilt. Falls $x = o$ ist, kann man auch $x\varrho^\sigma \quad x\xi_\iota\varrho - o$ setzen.

Gegeben seien $x \neq o \in M$, $\varrho \in \Phi$. Das Element x lässt sich in der Form $x = x_1 + \ldots + x_n$ darstellen, wobei $x_i \neq o$, $x_i \in H_{\nu_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. Dann ist $x\varrho^\sigma = x_1\varrho^\sigma + \ldots + x_n\varrho^\sigma = x_1\xi_\iota\varrho + \ldots + x_n\xi_\iota\varrho = x\xi_\iota\varrho$. Es gilt deshalb $\varrho^\sigma = \xi_\iota\varrho$ für ein beliebiges $\varrho \in \Phi$. Zufolge $\iota^\sigma = \xi_\iota\iota$ lässt sich auch $\varrho^\sigma = \iota^\sigma\varrho$ schreiben.

Satz 2. *Setzen wir voraus, dass in jeder homogenen Komponente vom Modul M mindestens zwei verschiedene einfache Untermoduln existieren und σ sei ein Endomorphismus der additiven Gruppe des Ringes Φ. Alle Rechtshauptideale des Ringes Φ sind genau dann σ-zulässig, wenn σ eine, durch die Vorschrift $\varrho^\sigma = \varrho^{\iota^\sigma}$, $\varrho \in \Phi$ bestimmte rechte Translation dieses Ringes ist.*

Beweis. Ist σ eine rechte Translation des Ringes Φ, so ist offenbar jedes Rechtshauptideal σ-zulässig.

Nehmen wir an, dass σ ein Endomorphismus der additiven Gruppe des Ringes Φ ist und dass alle Rechtshauptideale σ-zulässig sind. Dann gilt $\varrho^\sigma \in \varrho\Phi$ und $\varrho^\sigma = \varrho\xi_\varrho$ für jedes $\varrho \in \Phi$. Hieraus ergibt sich $\text{Ker}\,(\varrho) \leqq \text{Ker}\,(\varrho^\sigma)$ und aus der Beziehung $x\varrho = o$ folgt daher $x\varrho^\sigma = o$. Weil σ ein Endomorphismus der additiven Gruppe des Ringes Φ ist, gelten folgende Beziehungen:

$$\text{Wenn } x\varrho = y\varrho \text{ ist, dann auch } x\varrho^\sigma = y\varrho^\sigma. \tag{1}$$

$$\text{Wenn } x\varrho = x\omega \text{ ist, dann auch } x\varrho^\sigma = x\omega^\sigma. \tag{2}$$

Wählen wir ein beliebiges $x \in M$ und ein beliebiges $u \in M_x$ und setzen wir

$$u\sigma_x = x\varrho^\sigma \text{ genau dann, wenn } x\varrho = u \text{ ist.} \tag{3}$$

Nun werden wir zeigen, dass σ_x ein Endomorphismus der additiven Gruppe M^x ist. Zu jedem $u \in M_x$ existiert ein derartiges $\gamma \in \Phi$, dass $x\gamma = u$ ist und man kann $u\sigma_x = x\gamma^\sigma$ schreiben. Nehmen wir an, dass $u\sigma_x = x\varrho^\sigma$, $u\sigma_x = x\omega^\sigma$. Dann gilt $u = x\varrho = x\omega$, nach (2) ist $x\varrho^\sigma = x\omega^\sigma$ und σ_x ist also die Abbildung von M_x in M_x. Wählen wir $u, v \in M_x$. Dann ist $u = x\varrho$, $v = x\omega$ und $(u + v)\sigma_x = - x(\varrho + \omega)^\sigma = x\varrho^\sigma + x\omega^\sigma = u\sigma_x + v\sigma_x$.

a) Wählen wir ein beliebiges $p \in M$ derart, dass der Modul Rp einfach ist. Liegt p in der homogenen Komponente H, dann liegt dort auch M_p. Für jedes $v \neq o$, $v \in M_p$ ist $M_p = M_v$. Nach der Voraussetzung gibt es einen einfachen Untermodul $Rs \leqq H$ derart, dass $Rp \cap Rs = o$ ist. Es existiert ein Isomorphismus $\bar{\alpha}$ von Moduln Rp, Rs. Nach Satz 1, aus [2], Seite 185 lässt sich dieser Isomorphismus auf einen Automorphismus α vom Modul M erweitern. Dann gilt $p\alpha \neq o$, $p\alpha \in Rs$ und $M_p \cap Rs \neq o$. Wählen wir ein beliebiges Element $q \neq o$, $q \in M_p \cap Rs$. Dann ist $Rq = Rs$ und aus dem Beweis von Lemma 3 folgt $R(q - p) \cap Rp = o$, $R(q - p) \cap Rq = o$. Wählen wir ferner ein beliebiges $u \in M_p$. Dann existiert ein $\beta \in \Phi$ derart, dass $p\beta = u$ ist. Betrachten wir einen Untermodul $Q \leqq M$ derart, dass $M = Rp \oplus R(q - p) \oplus \oplus Q$ und setzen wir $K = R(q - p) \oplus Q$. Jedes Element $x \in M$ lässt sich dann in der Form $x = rp + k$, $k \in K$ darstellen. Die Abbildung ϱ: $x\varrho = rp\beta$ ist ein Endomorphismus des Moduls M, wobei $K = \text{Ker}(\varrho)$ ist. Wegen $q - p \in \text{Ker}(\varrho)$ ist $q\varrho = p\varrho$ und aus der Definition der Abbildung ϱ ergibt sich $pq - u$. Nach (1) ist $p\varrho^\sigma = q\varrho^\sigma$ und nach (3) gilt sodann $u\sigma_p = u\sigma_q$. Weil diese Beziehung für alle $u \in M_p$ gilt und $M_p = M_q$ ist, gilt $\sigma_p = \sigma_q$. Wählen wir nun ein beliebiges $v \neq o$, $v \in M_p$. Hiernach können zwei Fälle vorkommen. Entweder $Rv \cap Rp = o$ oder $Rv = Rp$. Ist $Rv \cap Rp = o$, so folgt aus dem Vorhergehenden $\sigma_p = \sigma_v$. Ist $Rv = Rp$, dann ist $Rv \cap Rq - o$ und ähnlich wie im letzteren erweist sich, dass $\sigma_q = \sigma_v$ gilt. Wegen $\sigma_q = \sigma_p$ gilt auch $\sigma_v = \sigma_p$. Speziell für ein beliebiges $u \neq o$, $u \in M_p$ gilt also $u\sigma_p = u\sigma_u$ und nach (3) gilt $u\sigma_u = u\iota^\sigma$. Somit gilt für ein beliebiges Element $u \in M_p$ die Beziehung $u\sigma_p = u\iota^\sigma$.

b) Wählen wir ein beliebiges Element $x \neq o$ des Moduls M, welches zu einer homogenen Komponente gehört und ein beliebiges $u \in M_x$ derart, dass Ru einfach ist. Es existiert ein $\varrho \in \Phi$ derart, dass $x\varrho = u$ ist. Setzen wir nun $Rw = Rx \cap \text{Ker}(\varrho)$ und wählen einen Untermodul Rv derart, dass $Rx - Rv \oplus Rw$ ist. Nach Lemma 2 können wir die Bezeichnung so wählen, dass $x - v + w$ ist. Es gilt $x\varrho = v\varrho = u$. Weil die Moduln Ru, Rv isomorph sind, ist Rv einfach. Nach (3) erhalten wir $u\sigma_x = u\sigma_v$. Da Rv ein einfacher Untermodul ist und $u \in M_v$, gilt nach a) $u\sigma_v = u\iota^\sigma$ und daher ist $u\sigma_x = u\iota^\sigma$.

c) Wählen wir ein beliebiges Element $x \neq o$, $x \in M$, welches zu einer homogenen Komponente gehört und ein beliebiges $z \in M_x$. Es existiert ein $\varrho \in \Phi$ derart, dass $x\varrho = z$ ist. Bezeichnen wir $Rw = Rx \cap \text{Ker}(\varrho)$ und wählen wir Rw so, dass $Rx - Rv \oplus Rw$ gilt. Nach Lemma 2 lässt sich $Rv = \sum_{j-1}^{k} \oplus Rv_j$, schreiben, wo Rv_j einfache Untermoduln sind. Wir können die Bezeichnung so wählen, dass $x = v_1 + \dots + v_k + w$ ist. Hiernach ist $x\varrho = v_1\varrho + \dots + v_k\varrho = z$ und $Rv_i\varrho$ sind einfache Untermoduln. Nach Lemma 1 ist $M_x = M_{v_1} + \dots + M_{v_k} + M_w$. Wegen $v_i\varrho \in M_{v_i}$ ist $v_i\varrho \in M_x$ für alle $i = 1, \dots, k$. Die Abbildung σ_x ist ein Endomorphismus der additiven Gruppe M_x, deshalb gilt $z\sigma_x = (v_1\varrho)\sigma_x + \dots + (v_k\varrho)\sigma_x$. Nach b) gilt dann auch $z\sigma_x = v_1\varrho\iota^\sigma + \dots + v_k\varrho\iota^\sigma = z\iota^\sigma$.

d) Wählen wir ein beliebiges Element $x \in M$. Dann existieren $x_i \neq o$, $x_i \in H_{\nu_i}$ derart, dass $x = x_1 + \dots + x_n$. Zufolge $M = \sum_{\nu \in J} \oplus H_\nu$ ist $Rx_i \cap (\sum_{j \neq i} Rx_j) = o$, $i = 1, \dots, n$. Offenbar gilt $R(\sum_{j \neq i} x_j) \leq \sum_{j \neq i} Rx_j$. Wegen $R(\sum_{j \neq i} x_j) = R(x - x_i)$ gilt $R(x - x_i) \cap Rx_i = o$. Wählen wir nun ein beliebiges Element $u \in M_{x_i}$. Hiernach existiert $\alpha \in \Phi$ derart, dass $x_i\alpha = u$ ist. Sei $Rw = Rx_i \cap \mathrm{Ker}(\alpha)$ und $Rx_i = Rv \oplus Rw$. Wählen wir die Elemente v, w so, dass $x_i = v + w$ ist, dann gilt $x_i\alpha = v\alpha = u$. Es existiert ein Untermodul $Q < M$ derart, dass $M = Rv \oplus Rw \oplus R(x - x_i) \oplus Q$ ist. Setzen wir $K = Rw \oplus R(x - x_i) \oplus Q$. Dann lässt sich jedes $y \in M$ in der Form $y = rv + k$, $k \in K$ darstellen. Die Abbildung $\varrho : y\varrho = rv\alpha$ ist ein Endomorphismus des Moduls M, wobei Ker $(\varrho) = K$ ist. Offenbar ist $x_i\varrho = u$ und zufolge $x - x_i \in \mathrm{Ker}\,(\varrho)$ ist $x\varrho = x_i\varrho$. Folglich gilt $u\sigma_x = u\sigma_{x_i}$. Nach Absatz c) ist $u\sigma_x = u\iota^\sigma$ und daher gilt $u\sigma_x = u\iota^\sigma$. Wählen wir nun ein beliebiges Element $z \in M_x$. Es existiert ein $\beta \in \Phi$ derart, dass $z = x\beta = x_1\beta + \dots + x_n\beta$ ist. Nach Lemma 1 ist $M_x = M_{x_1} + \dots + M_{x_n}$ und mithin $x_i\beta \in M_x$. Aus der Tatsache, dass σ_x ein Endomorphismus der additiven Gruppe M_x ist, ergibt sich $z\sigma_x = (x_1\beta)\sigma_x + \dots + (x_n\beta)\sigma_x$ und aus dem Vorangehenden erhalten wir $(x_i\beta)\sigma_x = x_i\beta\iota^\sigma$ für alle i. Folglich gilt $z\sigma_x = z\iota^\sigma$.

Es liegen beliebige $x \in M$, $\varrho \in \Phi$ vor. Gemäss (3) gilt $(x\varrho)\sigma_x = x\varrho^\sigma$. Zufolge $x\varrho \in M_x$ ergibt sich aus Absatz d) die Beziehung $x\varrho^\sigma = (x\varrho)\sigma_x = x\varrho\iota^\sigma$. Dies bedeutet, dass $\varrho^\sigma = \varrho\iota^\sigma$ für beliebige $\varrho \in \Phi$ ist.

In den folgenden zwei Sätzen sei angenommen, dass der Modul M die in den Sätzen 1,2 besagte Bedingung erfüllt und bezeichnen wir wiederum mit Φ den Ring aller Endomorphismen von diesem Modul.

Satz 3. *σ sei ein Endomorphismus der additiven Gruppe des Ringes Φ derart, dass alle Linkshauptideale dieses Ringes σ-zulässig sind. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

a) *Die Abbildung σ ist ein Endomorphismus des Ringes Φ.*

b) *Das Element ι^σ ist idempotent und $M\iota^\sigma$ ist die direkte Summe einer gewissen Menge homogener Komponenten vom Modul M.*

Beweis. a $\to$ b. Gemäss Satz 1 gilt $\varrho^\sigma = \iota^\sigma\varrho = (\varrho\iota)^\sigma = \iota^\sigma\varrho\iota^\sigma$ für alle $\varrho \in \Phi$. Unsere Behauptung ergibt sich aus Lemma 4.

b → a. Gemäss Lemma 4 gilt $\iota^\sigma \varrho = \iota^\sigma \varrho \iota^\sigma$ für alle $\varrho \in \Phi$. Durch Heranziehung des Ergebnisses aus Satz 1 erhalten wir für beliebige ϱ, $\gamma \in \Phi$ die Beziehung $(\varrho\gamma)^\sigma = \iota^\sigma \varrho\gamma = \iota^\sigma \varrho \iota^\sigma \gamma = \varrho^\sigma \gamma^\sigma$. Die Abbildung σ ist also ein Endomorphismus des Ringes Φ.

Satz 4. *σ sei ein Endomorphismus der additiven Gruppe des Ringes Φ derart, dass alle Rechshauptideale dieses Ringes σ-zulässig sind. Folgende Behauptungen sind äquivalent:*

a) *Die Abbildung σ ist ein Endomorphismus des Ringes Φ.*

b) *Das Element ι^σ ist idempotent und Ker (ι^σ) ist die Summe einer gewissen Menge homogener Komponenten vom Modul M.*

Beweis. a → b. Gemäss Satz 2 gilt $\varrho^\sigma = \varrho\iota^\sigma = (\iota\varrho)^\sigma = \iota^\sigma\varrho\iota^\sigma$ für jedes $\varrho \in \Phi$. Dies bedeutet:

$$(1) \qquad \varrho\iota^\sigma = \iota^\sigma\varrho\iota^\sigma .$$

Offenbar ist ι^σ ein idempotentes Element. Wird $\omega = \iota - \iota^\sigma$ gesetzt, so ist auch ω idempotent und

$$(2) \qquad M\omega = \text{Ker}\,(\iota^\sigma).$$

Durch Einsetzung von $\iota^\sigma = \iota - \omega$ in (1) bekommen wir $\omega\varrho = \omega\varrho\omega$. Nach Lemma 4 erhalten wir, dass $M\omega$ eine direkte Summe homogener Komponenten ist und aus (2) gewinnen wir sodann unsere Behauptung.

b → a. Setzen wir wieder

$$(3) \qquad \omega = \iota - \iota^\sigma .$$

Wegen Ker $(\iota^\sigma) = M\omega$ ergibt sich aus Lemma 4, dass $\omega\varrho = \omega\varrho\omega$ für alle $\varrho \in \Phi$ ist. Durch Einsetzung von (3) erhalten wir $\varrho\iota^\sigma = \iota^\sigma\varrho\iota^\sigma$. Für beliebige γ, $\varrho \in \Phi$ ergibt sich sodann $(\gamma\varrho)^\sigma = \gamma\varrho\iota^\sigma = \gamma\iota^\sigma\varrho\iota^\sigma = \gamma^\sigma\varrho^\sigma$ und σ ist ein Endomorphismus des Ringes Φ.

Bemerkung 1. σ sei ein Automorphismus des Ringes Φ und alle Linkshauptideale (Rechtshauptideale) seien σ-zulässig. Dann ist ι^σ ein Automorphismus des Moduls M und nach Satz 3 (4) ist er ein idempotentes Element. Es gilt darum $\iota^\sigma = \iota$ und σ ist der identische Automorphismus des Ringes Φ.

Bemerkung 2. Setzen wir voraus, dass Modul M lediglich eine homogene Komponente hat — z. B. wenn M über einem beliebigen Körper einen Vektorraum darstellt. Dann ist nach Satz 3 (4) und nach Bemerkung 1 jeder Endomorphismus $\sigma \neq o$ des Ringes Φ, wo alle Linkshauptideale (Rechtshauptideale) σ-zulässig sind, der identische Automorphismus des Ringes Φ.

LITERATUR

[1] БУРБАКИ, Н.: Алгебра. Модули, кольца, формы. Москва 1961.
[2] ДЖЕКОБСОН, Н.: Строение колец. Москва 1961.
[3] WOLFSON, K. G.: Baer rings of endomorphisms. Math. Ann. *143*, 1961, 1, 19—28.

Eingegangen am 2. 3. 1970

Katedra algebry a geometrie
Přírodovědecké fakulty University Palackého
Olomouc