Pavol Šoltés

O niektorých vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice tvaru
$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x)$

Matematický časopis, Vol. 22 (1972), No. 2, 123--130

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126318

Matematický časopis 22 (1972), No. 2

O NIEKTORÝCH VLASTNOSTIACH RIEŠENÍ DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE TVARU $y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x)$

P. ŠOLTÉS, Košice

V prácach [1], [2] a [3] sú uvedené niektoré výsledky týkajúce sa existencie nulových bodov riešení lineárnej diferenciálnej rovnice homogénnej 3. rádu. Výsledky tejto práce sú zovšeobecnením niektorých výsledkov v uvedených prácach v tom zmysle, že namiesto homogénnej (bez pravej strany) rovnice sa vyšetruje rovnica tvaru:

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x)\,. \tag{1}$$

V celej práci budeme predpokladať, že funkcie $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ a $f(x)$ sú spojité pre každé $x \in \langle x_0, \infty)$, resp. $x \in (-\infty, x_0\rangle$.

Veta 1. *Nech pre každé* $x \in \langle x_0, \infty)$ $[x \in (-\infty, x_0\rangle]$ *existuje* $q'(x)$ *a nech platí:*

$$p(x) \leqq 0,\ q(x) \leqq 0,\ 2r(x) - q'(x) \leqq 0,\ f(x) \geqq 0\ (f(x) \leqq 0)$$

$$[p(x) \geqq 0,\ q(x) \leqq 0,\ 2r(x) - q'(x) \geqq 0,\ f(x) \leqq 0\ (f(x) \geqq 0)]\,,$$

pričom $p(x)$, $2r(x) - q'(x)$ *a* $f(x)$ *nie sú súčasne identicky rovné nule v žiadnom čiastočnom intervale intervalu* (x_0, ∞) $[(-\infty, x_0)]$. *Ak* $y(x)$ *je riešením rovnice* (1), *pre ktoré platí*

$$y(x_0) \geqq 0\ (y(x_0) \leqq 0),\ y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) > 0\ (y''(x_0) < 0) \tag{2}$$

a

$$y(x_0)y''(x_0) + \tfrac{1}{2}q(x_0)y^2(x_0) \geqq 0\,, \tag{3}$$

potom $y(x)$, $y'(x)$ *a* $y''(x)$ *nemajú nulový bod v intervale* (x_0, ∞) $[(-\infty, x_0)]$.

Dôkaz. Nech platí:

$$f(x) \geqq 0,\ y(x_0) \geqq 0,\ y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) > 0\,.$$

Násobením rovnice (1) funkciou $y(x)$ a integrovaním dostaneme:

$$(4) \qquad y(x)y''(x) - \tfrac{1}{2}y'^2(x) + \tfrac{1}{2}q(x)y^2(x) + \int_{x_0}^{x} p(t)y(t)y''(t)\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} [r(t) - \tfrac{1}{2}q'(t)]y^2(t)\mathrm{d}t = y(x_0)y''(x_0) - \tfrac{1}{2}y'^2(x_0) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}q(x_0)y^2(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)y(t)\mathrm{d}t\,.$$

Stačí dokázať, že pre $x \geqq x_0$ je $y''(x) > 0$, čo bude znamenať, že $y(x)$ je konvexná funkcia a teda bude $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$ pre $x > x_0$. Nech je x_1 prvý nulový bod napravo od x_0 funkcie $y''(x)$. Zo vzťahu (4) dostaneme:

$$(5) \qquad -\tfrac{1}{2}y'^2(x_1) + \tfrac{1}{2}q(x_1)y^2(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} p(t)y(t)y''(t)\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{x}^{x_1} [r(t) - \tfrac{1}{2}q'(t)]y^2(t)\mathrm{d}t = y(x_0)y''(x_0) + \tfrac{1}{2}q(x_0)y^2(x_0) +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} f(t)y(t)\mathrm{d}t \geqq 0\,,$$

čo je ale spor, pretože pre $x \in (x_0, x_1)$ je $y''(x) > 0$ a $y(x) > 0$. Analogicky sa dokáže platnosť druhého tvrdenia na intervale $\langle x_0, \infty)$. Totiž ak je $y''(x_0) < 0$ a $y''(x_1) = 0$, je v intervale (x_0, x_1) aj $y(x) < 0$, a keďže je $f(x) \leqq 0$, zo vzťahu (5) plynie opäť spor. Teda $y(x)$ je konkávna na intervale (x_0, ∞), $y(x) < 0$ a $y'(x) < 0$.

Druhá časť vety — platnosť tvrdenia na intervale $(-\infty, x_0)$ — sa dokáže analogicky. Stačí použiť transformáciu $x = -t$.

Veta 2. *Nech pre každé $x \in \langle x_0, \infty)$ $[x \in (-\infty, x_0\rangle]$ je*

$$p(x) \leqq 0,\ q(x) \leqq 0,\ r(x) \leqq 0,\ f(x) \geqq 0\ (f(x) \leqq 0)$$

$$[p(x) \geqq 0,\ q(x) \leqq 0,\ r(x) \geqq 0,\ f(x) \leqq 0\ (f(x) \geqq 0)]\,.$$

Ak $y(x)$ je riešenie diferenciálnej rovnice (1), *pre ktoré platí* (2), *potom $y(x)$, $y'(x)$ a $y''(x)$ nemajú v intervale (x_0, ∞) $[(-\infty, x_0)]$ nulový bod.*

Dôkaz. Násobme rovnicu (1) funkciou $y'(x)$ a integrujme. Dostaneme:

$$(6) \qquad y'(x)y''(x) - \int_{x_0}^{x} y''^2(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} p(t)y'(t)y''(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} q(t)y'^2(t)\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} r(t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t = y'(x_0)y''(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)y'(t)\mathrm{d}t\,.$$

Predpokladajme, že riešenie $y(x)$, pre ktoré platí (2), má tú vlastnosť, že $y''(x)$ má napravo od x_0 nulový bod. Označme prvý nulový bod x_1. Z rovnosti (6) potom plynie:

$$-\int_{x_0}^{x_1} y''^2(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_1} p(t)y'(t)y''(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_1} q(t)y'^2(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_1} r(t)y(t)y'(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(t)y'(t)\mathrm{d}t\,.$$

Keďže je pre $x \in (x_0, x_1) y''(x) > 0 (y''(x) < 0)$, $y'(x) > 0$ $(y'(x) < 0)$ a $y(x) > 0 (y(x) < 0)$, plynie z poslednej rovnosti spor.

Druhá časť vety sa dokáže analogicky.

Veta 3. *Nech pre každé* $x \in \langle x_0, \infty)$ $[x \in (-\infty, x_0\rangle]$ *existuje* $q'(x)$ *a nech platí:*

$$p(x) \leqq 0\,,\; q(x) \leqq 0\,,\; 2r(x) - q'(x) + 1 \leqq 0$$

$$[p(x) \geqq 0\,,\; q(x) \leqq 0\,,\; 2r(x) - q'(x) - 1 \geqq 0]\,,$$

pričom $p(x)$ *a* $2r(x) - q'(x) + 1$ $[2r(x) - q'(x) - 1]$ *nie sú súčasne identicky rovné nule v žiadnom čiastočnom intervale intervalu* (x_0, ∞) $[(-\infty, x_0)]$. *Ak pre* $y(x)$ *platí:*

$$y(x_0) > 0\; (y(x_0) < 0)\,,\; y'(x_0) = 0\,,\; y''(x_0) > 0\; (y''(x_0) < 0)$$

a

$$\tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{\infty} f^2(t)\mathrm{d}t \leqq K_0 = y(x_0)y''(x_0) + \tfrac{1}{2}q(x_0)y^2(x_0)$$

$$[\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{x_0} f^2(t)\mathrm{d}t \leqq K_0 = y(x_0)y''(x_0) + \tfrac{1}{2}q(x_0)y^2(x_0)]\,,$$

potom $y(x)$, $y'(x)$ *a* $y''(x)$ *nemajú nulový bod v intervale* (x_0, ∞) $[(-\infty, x_0)]$.

Dôkaz. Zo vzťahu (4) pre x_1, kde x_1 je prvý nulový bod funkcie $y''(x)$ napravo od x_0, platí:

$$-\tfrac{1}{2}y'^2(x_1) + \tfrac{1}{2}q(x_1)y^2(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} p(t)y(t)y''(t)\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [r(t) - \tfrac{1}{2}q'(t)]y^2(t)\mathrm{d}t = K_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t)y(t)\mathrm{d}t \geqq$$

$$\geqq K_0 - \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} [f^2(t) + y^2(t)]\mathrm{d}t\,,$$

teda

$$-\tfrac{1}{2}y'(x_1) + \tfrac{1}{2}q(x_1)y^2(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} p(t)y(t)y''(t)\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [r(t) - \tfrac{1}{2}q'(t) + \tfrac{1}{2}]y^2(t)\mathrm{d}t \geqq K_0 - \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f^2(t)\mathrm{d}t \geqq 0 ,$$

čo je spor. Teda $y''(x) > 0$ ($y''(x) < 0$) pre každé $x \in (x_0, \infty)$.

Druhá časť vety sa dokáže analogicky.

Poznámka 1. Z dôkazov uvedených viet vyplývajú ďalšie vlastnosti riešení rovnice (1), a to monotónnosť a neohraničenosť. Platí napr.:

Veta 1'. *Ak sú splnené predpoklady vety* 1, *pre riešenie* $y(x)$, *ktoré spĺňa podmienky* (2) *a* (3), *platí:*

$$\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y'(x) = \operatorname{sgn} y''(x) , \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty \; (-\infty)$$

$$[\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x) , \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty \; (-\infty)] ,$$

čiže $y(x)$ *nie je ohraničené pre* $x \to \infty$ $[x \to -\infty]$.

Podobne možno sformulovať ďalšie vety o monotónnosti a neohraničenosti riešení rovnice (1).

V ďalšom budeme predpokladať, že $p(x) \equiv 0$, čiže budeme sa zaoberať diferenciálnou rovnicou tvaru

$$y''' + q(x)y' + r(x)y = f(x) , \tag{7}$$

pričom budeme predpokladať, že $x \in \langle x_0, \infty)$.

Lemma. *Nech pre každé* $x \in \langle x_0, \infty)$ *je*

$$q(x) \geqq 0 , \quad 2r(x) - q'(x) - 1 \geqq 0 ,$$

pričom $2r(x) - q'(x) - 1 \equiv 0$ *neplatí v žiadnom čiastočnom intervale intervalu* (x_0, ∞). *Ak* $y(x)$ *je riešenie rovnice* (7), *pre ktoré platí*

$$y(x_0)y''(x_0) - \tfrac{1}{2}y'^2(x_0) + \tfrac{1}{2}q(x_0)y^2(x_0) + \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{\infty} f^2(t)\mathrm{d}t \leqq k \leqq 0 , \tag{8}$$

potom nulové body funkcií $y(x)$ *a* $y'(x)$ *sa oddeľujú na intervale* (x_0, ∞).

Dôkaz. Je zrejmé, že stačí dokázať toto: ak je $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$, potom existuje také číslo $\xi \in (x_1, x_2)$, že je $y(\xi) = 0$. Predpokladajme, že je $y(x) \neq 0$ pre každé $x \in (x_1, x_2)$. Z rovnice (7) dostávame:

$$F(y(x)) \leqq F(y(x_0)) + \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x} f^2(t)\mathrm{d}t - \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x} [2r(t) - q'(t) - 1]y^2(t)\mathrm{d}t ,$$

kde $F(y(x)) = y(x)y''(x) - \tfrac{1}{2}y'^2(x) + \tfrac{1}{2}q(x)y^2(x)$. Odtiaľ však plynie:

$$y(x)y''(x) - y'^2(x) \leqq y(x)y''(x) - \tfrac{1}{2}y'^2(x) \leqq k - \tfrac{1}{2}q(x)y^2(x) -$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} [2r(t) - q'(t) - 1]y^2(t)\,dt\,,$$

a teda

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right) = \frac{1}{y^2(x)}\left\{k - \tfrac{1}{2}q(x)y^2(x) - \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} [2r(t) - q'(t) - 1]y^2(t)\,dt\right\},$$

čiže:

$$0 \leqq \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{k}{y^2(x)} - \tfrac{1}{2}q(x) - \frac{1}{2y^2(x)}\int_{x_0}^{x} [2r(t) - q'(t) - 1]y^2(t)\,dt\right\}dx < 0\,,$$

čo je spor. Tým je lemma dokázaná.

Veta 4. *Ak je pre každé* $x \in \langle x_0, \infty)$:

$$q(x) \geqq 0,\ r(x) \geqq k_1 > 0,\ 2r(x) - q'(x) - 1 \geqq k_2 > 0,\ \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| \leqq K < \infty,$$

potom riešenie $y(x)$ rovnice (7), ktoré spĺňa (8) je buď oscilatorické alebo platí: $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Dôkaz. Nech $y(x)$, pre ktoré platí (8), nie je oscilatorické. Môže nastať 5 prípadov:

1. $y'(x)$ osciluje na intervale $\langle x_0, \infty)$, t. j. v intervale (a, ∞), kde a je ľubovoľne veľké číslo, existuje aspoň jeden nulový bod funkcie $y'(x)$. Vzhľadom na lemmu dostávame, že potom aj $y(x)$ osciluje.

2. $y(x) > 0$, $y'(x) \geqq 0$ pre $x \in \langle x_1, \infty)$, $x_1 \geqq x_0$. Z rovnice (7) platí:

$$y'''(x) = f(x) - q(x)y'(x) - r(x)y(x) \leqq f(x) - k_1 y(x_1)\,,$$

čiže

$$y''(x) \leqq y''(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt - k_1 y(x_1)(x - x_1) \leqq k_3 - k_1 y(x_1)(x - x_1)\,,$$

z čoho plynie, že pre dostatočne veľké x bude $y'(x) < 0$, čo je spor.

3. $y(x) < 0$, $y'(x) \leqq 0$ pre $x \in \langle x_1, \infty)$, $x_1 \geqq x_0$. V tomto prípade sa dôjde k sporu analogickým spôsobom ako v prípade 2.

4. $y(x) > 0$, $y'(x) \leqq 0$ pre $x \in \langle x_1, \infty)$, kde $x_1 \geqq x_0$. Z rovnice (7) plynie:

$$(9)\qquad y(x)y''(x) - \tfrac{1}{2}y'^2(x) \leqq k - \tfrac{1}{2}q(x)y^2(x) - \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} [2r(t) - q'(t) - 1]y^2(t)\,dt\,.$$

Nech je

$$\int_{x_1}^{\infty} [2r(t) - q'(t) - 1]y^2(t)\mathrm{d}t = +\infty \, .$$

Z (9) potom plynie:

$$y(x)y''(x) - \tfrac{1}{2}y'^2(x) \to -\infty \quad \text{pre} \quad x \to \infty \, .$$

Ak je $y''(x) \to -\infty$ pre $x \to \infty$, potom pre každé číslo $A > 0$ existuje také číslo x_2, že pre $x > x_2$ je $y''(x) < -A$, z čoho dostaneme spor s predpokladom, že $y(x) > 0$ pre každé $x \in \langle x_1, \infty)$. Platí teda: $y'(x) \to -\infty$ pre $x \to \infty$, z čoho opäť plynie spor. Musí teda byť:

$$\int_{x_1}^{\infty} [2r(t) - q'(t) - 1]y^2(t)\mathrm{d}t < \infty$$

a teda

$$\int_{x_1}^{\infty} y^2(t)\mathrm{d}t < \infty \, ,$$

čo znamená, že $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$ (vzhľadom na monotónnosť $y(x)$).

5. $y(x) < 0$, $y'(x) \geqq 0$ pre $x \in \langle x_1, \infty)$, kde $x_1 \geqq x_0$. Analogicky ako v prípade 4. sa ukáže, že musí byť $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) - 0$.

Tým je veta dokázaná.

Veta 5. *Nech sú splnené predpoklady vety* 4, *pričom namiesto predpokladu* $r(x) \geqq k_1 > 0$ *nech je*

$$r(x) - q'(x) \geqq k_1 > 0 \, .$$

Potom riešenie $y(x)$ rovnice (7), ktoré spĺňa (8) je na intervale $\langle x_0, \infty)$ oscilatorické alebo platí: $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Dôkaz. Stačí vyšetriť prípady: $y(x) > 0$, $y\,(x) \geqq 0$ a $y'(x) < 0$, $y'(x) \leqq 0$ pre $x \in \langle x_1, \infty)$, kde $x_1 \geqq x_0$. V ostatných prípadoch sa postupuje tak ako v dôkaze vety 4.

Nech je $y(x) > 0$, $y'(x) \geqq 0$ pre každé $x \in \langle x_1, \infty)$. Platí:

$$y''(x) = y''(x_1) - q(x)y(x) + q(x_1)y(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(t)\mathrm{d}t -$$

$$- \int_{x_1}^{x} [r(t) - q\,(t)]y(t)\mathrm{d}t \leqq k_3 - k_1 y(x_1)\,(x - x_1) \, ,$$

z čoho dostaneme spor s predpokladom, že pre každé $x \in \langle x_1, \infty)$ je $y'(x) \geqq 0$. Podobne sa ukáže, že nenastane druhý prípad.

LITERATÚRA

[1] ŠVEC, M.: Einige asymptotische und oscillatorische Eigenschaften der Differentialgleichung. Чехосл. матем. ж., *15* (90) 1965, 378—391

[2] GREGUŠ, M.: Über die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, *12*/3 1963, 265—286.

[3] MORAVSKÝ, L.: O niektorých vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice tvaru $y''' + p(x)y'' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$. Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae Math., *13*, 1966, 61—67.

Došlo 9. 1. 1970

Katedra matematickej analýzy
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity P. J. Šafárika
Košice

ON CERTAIN PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x).$$

P. Šoltés

Summary

In the present paper certain results concerning the existence of zero points of solutions of a third-order linear differential equation with zero right-hand part, as published in [1], [2] and [3], are generalized.

Theorems 1, 2, and 3 state sufficient conditions for a solution $y(x)$ of (1), and its first and second derivatives to have no zeroes on (x_0, ∞). We have e. g.

Theorem 3. *Suppose that for all* $x \in \langle x_0, \infty)$ $[x \in (-\infty, x_0\rangle]$ $q'(x)$ *is defined and that*

$$p(x) \leqq 0, \quad q(x) \leqq 0, \quad 2r(x) - q'(x) + 1 \leqq 0$$

$$[p(x) \geqq 0, \quad q(x) \leqq 0, \quad 2r(x) - q'(x) - 1 \geqq 0],$$

and that $p(x)$ *and* $2r(x) - q'(x) + 1[2r(x) - q'(x) - 1]$ *are not both identically zero on any subinterval of* (x_0, ∞) $[(-\infty, x_0)]$. *If* $y(x)$ *is a solution of* (1) *such that*

$$y(x_0) > 0(y(x_0) < 0), \quad y'(x_0) \quad 0, \quad y'(x_0) > 0(y''(x_0) \quad 0)$$

and

$$\tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqq K_0 \quad y(x_0)y''(x_0) + \tfrac{1}{2}q(x_0)y^2(x_0).$$

$$[\tfrac{1}{2} \int_{\infty}^{x_0} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqq K_0 \quad y(x_0)y''(x_0) + \tfrac{1}{2}q(x_0)y^2(x_0)],$$

then $y(x)$, $y'(x)$ *and* $y''(x)$ *have no zero point on* (x_0, ∞) $[(\quad \infty, x_0)]$.

Theorems 4 and 5 state sufficient conditions for a solution $y(x)$ of (7) to be oscillatory or for $\lim_{x\to\infty} y(x) \quad 0$ to hold.

Theorem 4. *If for all* $x \in < x_0, \infty)$

$$q(x) \geq 0, \quad r(x) \geqq k_1 > 0, \quad 2r(x) - q'(x) - 1 \geqq k_2 \quad 0,$$

$$| \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leq K < \infty,$$

then a solution $y(x)$ *of* (7) *which satisfies* (8) *is oscillatory and or* $\lim_{x\to\infty} y(x) \quad 0$.