Allami Benyaiche

Distributions bi-sousharmoniques sur $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$

Mathematica Bohemica, Vol. 119 (1994), No. 1, 1–13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126203`

DISTRIBUTIONS BI-SOUSHARMONIQUES SUR $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 2)$

ALLAMI BENYAICHE, Kénitra

(Reçu Mai 3, 1991)

Summary. L'objet de ce travail est l'etude des fonctions localement sommable ω sur $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, vérifiant $\Delta^2\omega \geqslant 0$ (où Δ est Laplacien pris au sens des distributions) et que se comportent à l'infini comme des fonctions sousharmoniques. En parculier, nous caractérisons les fonctions qui sont à la fois bi-sousharmoniques et sousharmoniques.

Keywords: bi-sousharmonique, ordre d'une fonction

AMS classification: 31B

INTRODUCTION

Une fonction localement sommable ω sur $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ vérifiant $\Delta^2\omega \geqslant 0$ (où Δ est le Laplacien pris au sens des distributions), peut-être identifiée à une différence de deux fonctions sousharmoniques sur $\mathbf{R}^n$ (voir [1], [4]). Dans cette optique, nous avons remarqué que, sous certaines conditions, de telles fonctions (appelées fonctions bi-sousharmoniques sur $\mathbf{R}^n$) se comportent à l'infini comme des fonctions sousharmoniques.

Les but de ce travail est d'étudier la classe des fonctions bi-sousharmoniques qui ont un tel comportement.

Pour réaliser cette étude, nous utilisons la théorie de R. Nevanlinna developée dans le cas des fonctions bi-sousharmoniques sur $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ par V. Anandam [1], dans le cas des fonctions sousharmoniques sur $\mathbf{R}^2$ par M. Arsove [3] et sur $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ par Premalatha et Anandam [13].

Dans la première section, nous montrons qu'une fonction bi-sousharmonique ω est représentable comme différence de deux fonctions qui sont à la fois bi-sousharmoniques et sousharmoniques si, et seulement si $\Delta\omega$ coïncide, presque-partout, avec une fonction sousharmonique qui possède une minorante surharmonique bornée supérieurement.

Nous désignons par fonctions bi-sousharmoniques ω d'allure sousharmonique à l'infini, les fonctions qui vérifient $\operatorname{ord}|\mu| = \operatorname{ord}\mu$ où $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est la mesure associée à ω dans la représentation locale de Riesz, $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ et $\operatorname{ord}\mu := \limsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{Log}\mu(B_0^r)}{\operatorname{Log} r}$ est l'ordre de μ (voir Définition 1 et Remarque 5). Nous prouvons dans la seconde section qu'une fonction bi-sousharmonique ω est d'allure sousharmonique à l'infini si et seulement si $\Delta\omega$ coïncide, presque-partout, avec une fonction sousharmonique s dominante en mesure (i.e. $\operatorname{ord} s = \max(0, -1+\operatorname{ord}\lambda)$), où $\operatorname{ord} s := \limsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} M(r,s^+)}{\operatorname{Log} r}$ et λ est la mesure associée à s. $M(r, s^+)$ est la moyenne de s sur la sphère de centre o et de rayon r, $s^+ = \sup(0, s)$ (voir [1]).

Dans la dernière section, nous montrons que, pour toute fonction biharmonique ω sur $\mathbf{R}^3$ (i.e. $\Delta^2\omega = 0$), on a la caractérisation suivante:

$$\omega(x) = c|x|^2 + \psi(x)$$

(où c est une constante positive et ψ une fonctions harmonique sur $\mathbf{R}^3$) si et seulement si $\lim_{r\to+\infty} \frac{A^a(r,\omega)}{r^2} \geqslant 0$.

$A^a(r,\omega)$ désigne la moyenne de ω sur la boule de centre a et de rayon r. De plus, si $\omega(x) = \varphi(x)\cdot|x|^2 + \psi(x)$ (φ et ψ sont deux fonctions harmoniques sur $\mathbf{R}^3$) est le developpement d'Almansi ([2], [10]) d'une fonction biharmonique ω, nous montrons que $\operatorname{ord}\omega = \max(2+\operatorname{ord}\varphi, \operatorname{ord}\psi)$ où

$$\operatorname{ord}\omega := \limsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} T(r,\omega)}{\operatorname{Log} r}$$

et

$$T(r,\omega) = M(r,\omega^+) + \int_0^r \frac{\mu^-(B_o^t)}{t^2}\,\mathrm{dt}$$

est la fonction caractéristique de Nevanlinna.

Nous faisons cette étude dans le cas de $\mathbf{R}^3$. Celui de $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$) est similaire.

0. Notations et préliminaires

On désignera par $M^a(r,v)$ (resp. $A^a(r,v)$) la moyenne d'une fonction v sur la sphère de centre a et de rayon r (resp. la boule de centre a et de rayon r). Si $a = 0$ on ecrit $M(r,v)$ et $A(r,v)$ seulement.

Une fonction ω localement sommable vérifiant $\Delta^2\omega \geqslant 0$, Δ est le Laplacien pris au sens des distributions, est appelée fonction bi-sousharmonique sur $\mathbf{R}^n$. Pour $a \in \mathbf{R}$, a^+, a^- et $|a|$ sont utilisées dans le sens usuel.

On désignera par fonctions δ-sousharmoniques les fonctions qui sont représentables, presque-partout, comme différence de deux fonctions sousharmoniques.

Si $S(r)$ est une fonction croissante en r telle que $S(r) \geqslant 1$, pour r assez grand, on definit l'ordre de $S(r)$ par $\operatorname{ord} S := \limsup_{r \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} S(r)}{\operatorname{Log} r}$ (voir [1], [4], [9]).

En particulier, si v est une fonction sousharmonique sur $\mathbf{R}^3$ et λ est une mesure de Radon positive, l'ordre de v et celui de λ sont donnés par

$$\operatorname{ord} v := \limsup_{r \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} M(r, v^+)}{\operatorname{Log} r}, \quad \text{ici } S(r) = M(r, v^+),$$

$$\operatorname{ord} \lambda := \limsup_{r \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} \lambda(B_0^r)}{\operatorname{Log} r}, \quad \text{ici } S(r) = \lambda(B_0^r),$$

où B_0^r désigne la boule de centre o et de rayon r.

D'aprés la définition, ci-dessus, on a: $\operatorname{ord} v = \operatorname{ord} v^+ = \operatorname{ord} M(r, v^+)$.

Etant donnée une mesure de Radon $\lambda \geqslant 0$, il y a des fonctions sousharmoniques v sur $\mathbf{R}^3$ dont λ est la mesure associée dans la représentation locale de Riesz (voir Brelôt [5]). Quand on prend pour v le potentiel canonique associé à λ (au sens de [1], p. 358), v satisfait à la condition

$$\operatorname{ord} M(r, v) = \operatorname{ord} M(r, v^+)$$

et par conséquent

$$\operatorname{ord} v = (-1 + \operatorname{ord} \lambda)^+ \quad \text{(voir [1], th. 1).}$$

Soit $\omega = u - v$ une fonction δ-sousharmonique avec $\mu = \mu^+ - \mu^-$ sa mesure associée. Comme précèdemment, on peut choisir v telle que ord $v = (-1 + \operatorname{ord} \mu^-)^+$ et u une fonction sousharmonique dont μ^+ est la mesure associée dans la representation locale de Riesz. Dans tout ce travail on se refère à cette représentation canonique de ω.

Soit $\omega = u - v$ une fonction δ-sousharmonique avec $\mu = \mu^+ - \mu^-$ sa mesure associée. On définit (Privaloff, [1]) la fonction caractéristique de ω par

$$T(r, \omega) = M(r, \omega^+) + \int_0^r \frac{\mu^-(B_0^t)}{t^2} \mathrm{dt}$$

D'après R-Nevanlinna [9], on définit

$$\operatorname{ord} \omega := \limsup_{r \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} T(r, \omega)}{\operatorname{Log} r}$$

R e m a r q u e 1. (voir [1]). En prenant ω harmonique au voisinage de 0, on a

$$T(r, \omega) = M\big(r, \sup(u, v)\big) - v(0)$$

Proposition 1. *([1], th. 3). Soit ω une fonction δ-sousharmonique sur $\mathbf{R}^3$, avec $\omega = u - v$ sa représentation canonique, alors* $\operatorname{ord}\omega = \max(\operatorname{ord} u, \operatorname{ord} v)$.

R e m a r q u e 2. Si $\omega = u - v + H$ avec u le potentiel canonique associé à μ^+, v le potentiel canonique associé à μ^- et H une fonction harmonique. On a, d'aprés ([1], p. 360–361),

$$\operatorname{ord}\omega = \max(-1 + \operatorname{ord}\mu^+, -1 + \operatorname{ord}\mu^-, \operatorname{ord} H).$$

Lemme 1. *Soit ω une fonction δ-sousharmonique, alors*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} M(r,\omega^+)}{\operatorname{Log} r} \leqslant \operatorname{ord}\omega^+ \leqslant \operatorname{ord}\omega$$

D é m o n s t r a t i o n . Soit $\omega = u - v$ la représentation de ω, avec $\operatorname{ord} v = (-1 + \operatorname{ord}\mu^-)^+$, où $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est la mesure associée à ω.

Puisque $\omega^+ = \sup(u, v) - v$ et $M(r, v)$ est croissante en r, alors

$$M(r,\omega^+) \leqslant M\big(r, \sup(u, v)\big) + \text{constante}.$$

Ainsi, en utilisant la remarque 1, on a:

$$\operatorname{ord}\omega \geqslant \limsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} M(r,\omega^+)}{\operatorname{Log} r}.$$

Si on désigne par $\gamma = \gamma^+ - \gamma^-$ la mesure associée à ω^+ on a

$$T(r,\omega^+) = M(r,\omega^+) + \int_0^r \frac{\gamma^-(B_0^t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Parsuite

$$T(r,\omega^+) \geqslant M(r,\omega^+).$$

Donc

$$\operatorname{ord}\omega^+ \geqslant \limsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} M(r,\omega^+)}{\operatorname{Log} r}.$$

D'aprés ([1], Th. 7) on $a \operatorname{ord}\omega = \max(\operatorname{ord}\omega^+, \operatorname{ord}\omega^-)$. Par conséquent

$$\operatorname{ord}\omega \geqslant \operatorname{ord}\omega^+ \geqslant \limsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} M(r,\omega^+)}{\operatorname{Log} r}.$$

□

1. Les distributions bi-sousharmoniques qui sont sousharmoniques

Notons par Q le cône convexe des fonctions qui sont à la fois bi-sousharmoniques et sousharmoniques.

Proposition 2. *Pour toute fonction ω localement sommable, les assertions suivantes sont équivalentes*

1) *ω est une fonction bi-sousharmonique appartenant à $Q - Q$.*

2) *$\Delta\omega$ coïncide, presque-partout, avec une fonction sousharmonique majorant une fonction surharmonique bornée supérieurement.*

Demonstrantion. (1) $\Longrightarrow$ (2): Si $\omega \in Q - Q$, avec $\omega = s_1 - s_2$, où s_1, $s_2 \in Q$, alors $\Delta\omega = \Delta s_1 - \Delta s_2 \geqslant -\Delta s_2$. Or $-\Delta s_2$ est surharmonique négative. D'où l'assertion (2).

(2) $\Longrightarrow$ (1): Soit s une fonction surharmonique bornée supérieurement telle que $\Delta\omega \geqslant s$ et $\Delta\omega$ est, presque-partout, une fonction sousharmonique. Sans perdre de gènèralité, on peut supposer que s est négative.

Posons

$$u_0 = \Delta\omega$$

$$s_1 = u_0 - s, \quad s_1 \geqslant 0$$

s_1 étant une fonction sousharmonique positive, soit s_2 la fonction sousharmonique associée à la mesure $(s_1 \cdot \mathrm{dx})$. Alors

$$\Delta s_2 = s_1$$

$$\Delta^2 s_2 = \Delta s_1 \quad \text{est positive.}$$

Donc $s_2 \in Q$.

Par ailleurs, $(-s)$ est une fonction sousharmonique positive, soit t la fonction sousharmonique associée à la mesure $(-s\,\mathrm{dx})$. Alors $t \in Q$ et

$$\Delta(s_2 - t) = \Delta s_2 - \Delta t = s_1 + s = u_0 = \Delta\omega.$$

Soit h une fonction harmonique telle que $\omega = s_2 - t + h$. Ainsi $\omega = (s_2 + h) - t$, où $s_2 + h \in Q$ et $t \in Q$. En d'autres termes $\omega \in Q - Q$. □

Remarque 3. Toute fonction biharmonique ω appartient à $Q - Q$, car $\Delta\omega = h = h^+ - h^- \geqslant -h^-$, où h est une fonction harmonique.

2. Distributions bi-sousharmoniques d'allure sousharmonique à l'infini

Dans ce paragraphe nous caractérisons les fonctions bi-sousharmoniques n'appartenant pas nécessairement à la classe Q, mais elles se comportent à l'infini comme des fonctions sousharmoniques.

On rappelle qu'une fonction sousharmonique de mesure associée λ est dite dominante en mesure si

$$\operatorname{ord} s = (-1 + \operatorname{ord} \lambda)^{+} \quad \text{(voir [1], def. 2, p. 359)}$$

R e m a r q u e 4 ([1], p. 359). s est dominante en mesure si et seulement si $\operatorname{ord} s = \operatorname{ord} M(r, s)$.

Définition 1. Soit ω une fonction bi-sousharmonique et $\mu = \mu^{+} - \mu^{-}$ sa mesure associée dans la représentation locale de Riesz. ω est dite d'allure sousharmonique à l'infini si et seulement si $\operatorname{ord} \mu = \operatorname{ord} |\mu|$, $|\mu| = \mu^{+} + \mu^{-}$.

R e m a r q u e s 5. 1) La définition 1 est justifiée par les remarques a) et b) suivantes:

a) Toute fonction sousharmonique est d'allure sousharmonique à l'infini (car la mesure qui lui est associée est positive).

b) Dans la proposition 4 nous montrerons que, pour toute fonction bi-sousharmonique ω d'allure sousharmonique à l'infini, on a: $\operatorname{ord} \omega = \operatorname{ord} \omega^{+}$. De telle propriété est toujours vérifiée pour une fonction sousharmonique (voir p. 3).

2) $\operatorname{ord} \mu$ est bien défini. En effet, soit s une fonction sousharmonique telle que $\Delta\omega = s$ presque-partout. Alors $d\mu(x) = \frac{1}{4\pi} s(x)\,\mathrm{d}x$. Donc

$$\begin{aligned}
\mu(B_0^r) &= \frac{1}{4\pi} \int_{B_0^r} s(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^r \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} s(t, \theta, \varphi) t^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^r t^2 M(t, s)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

En supposant par exemple $s(0) = 0$ ou $\mu(B_0^1) = 0$ on a: $\mu(B_0^r)$ est croinssante en r, positive et donc $\operatorname{ord} \mu$ admet un sens.

Proposition 3. *Soit ω une fonction bi-sousharmonique sur $\mathbf{R}^3$ et s une fonction sousharmonique telle que $\Delta\omega = s$ presque-partout. Alors ω est d'allure sousharmonique à l'infini si et seulement si s est dominante en mesure.*

D é m o n s t r a t i o n . Sans perdre de génèralité on suppose $\mu(B_0^1) = 0$, où μ est la mesure associée à ω. De l'égalité $\Delta\omega = s$ on a

$$\mu(B_0^r) = \int_0^r t^2 M(t,s)\,\mathrm{dt} \tag{3.1}$$

$$\mu^+(B_0^r) = \int_0^r t^2 M(t,s^+)\,\mathrm{dt}\,. \tag{3.2}$$

De la relation (3.1) et du fait que $M(t,s)$ est croissante en t on a

$$\frac{7}{24} r^3 \cdot M\left(\frac{r}{2}, s\right) \leqslant \mu(B_0^r) \leqslant \frac{1}{3} r^3 \cdot M(r,s).$$

D'où

$$\operatorname{ord}\mu = 3 + \operatorname{ord} M(r,s). \tag{3.3}$$

D'une façon similare, en utilisant (3.2), on a

$$\operatorname{ord}\mu^+ = 3 + \operatorname{ord} M(r,s^+). \tag{3.4}$$

Puisque $\mu^+(B_0^r) \geqslant \mu^-(B_0^r)$, pour r assez grand, et $\operatorname{ord}|\mu| = \max(\operatorname{ord}\mu^+, \operatorname{ord}\mu^-)$ (voir [1], p. 358). On a: $\operatorname{ord}\mu = \operatorname{ord}\mu^+$.

Ainsi, nous voyons que

$$\operatorname{ord}\mu = \operatorname{ord}|\mu| \iff \operatorname{ord} M(r,s) = \operatorname{ord} M(r,s^+) := \operatorname{ord} s \tag{3.5}$$

Montrons que

$$\operatorname{ord} M(r,s) = \operatorname{ord} M(r,s^+) \iff \operatorname{ord} s = (-1 + \operatorname{ord}\lambda)^+, \tag{3.6}$$

où λ est la mesure de Radon positive associée à s.

1^{er} cas: si $\operatorname{ord}\lambda = 1$.

On a, d'après ([13], th 2.1), $\operatorname{ord} M(r,s) = -1 + \operatorname{ord}\lambda = 0$. D'où (3.6).

2^{éme} cas : si $\operatorname{ord}\lambda \neq 1$.

a) si $M(r,s)$ est bornée, alors, $\operatorname{ord} M(r,s) = 0$. De plus, $\operatorname{ord}\lambda < 1$. En effet, si $\operatorname{ord}\lambda > 1$, on aurait, en vêrtu du ([13], th 2.1), $0 = \operatorname{ord} M(r,s) = -1 + \operatorname{ord}\lambda$. Parsuite $\operatorname{ord}\lambda = 1$. Ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, on a (3.6).

b) Si $M(r,s)$ est non bornée, alors $\operatorname{ord}\lambda > 1$. En effet, si $\operatorname{ord}\lambda < 1$, s admet, ([13], p. 190) une majorante harmonique h. Donc $M(r,s) \leqslant h(0)$ et parsuite $M(r,s)$ est bornée. Ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, en utilisant ([13], th 2.1), on a l'équivalence (3.6). □

Proposition 4. *Soit ω une fonction bi-sousharmonique d'allure sousharmonique à l'infini sur $\mathbf{R}^3$ et dont la mesure associée μ ne charge pas un voisinage de l'origine. On a*

1) $\operatorname{ord} M(r,\omega) = -1 + \operatorname{ord}\mu$
2) $\operatorname{ord}\omega = \operatorname{ord}\omega^+$

D é m o n s t r a t i o n. 1) De la relation $\Delta\omega = s(p \cdot p)$ on a la relation (3.1) et la relation

$$M(r,\omega) = \int^r \frac{\mu(B_0^t)}{t^2}\,\mathrm{dt} + \text{constante (voir [1], [4])} \tag{4.1}$$

or

$$M(r,\omega) \geqslant \int_{r/2}^{r} \frac{\mu(B_0^t)}{t^2}\,\mathrm{dt}$$
$$M(r,\omega) \geqslant \frac{1}{r}\mu(B_0^{r/2})$$

Comme l'ordre de μ est défini, on obtient

$$\operatorname{ord} M(r,\omega) \geqslant -1 + \operatorname{ord}\mu$$

Comme s est diminante en mesure, on a, d'aprés la proposition 3,

$$\operatorname{ord} s = \operatorname{ord} M(r,s) = \alpha.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $0 < R < r$ on a

$$M(r,s) < r^{\alpha+\varepsilon}$$

D'aprés (3.1). On a

$$\mu(B_0^r) < \frac{1}{\alpha+3+\varepsilon}\cdot r^{\alpha+3+\varepsilon}$$

En substituant cette inégalité dans (4.1), on obtient

$$\operatorname{ord} M(r,\omega) \leqslant 2 + \alpha.$$

D'aprés ([1], th 15), $\operatorname{ord}|\mu| = 3 + \operatorname{ord} s$, et le fait que ω est d'allure sousharmonique à l'infini on a

$$\operatorname{ord}|\mu| = 3 + \operatorname{ord} s = \operatorname{ord}\mu$$

ce qui donne $\operatorname{ord} M(r,\omega) \leqslant -1 + \operatorname{ord}\mu$.

2) Puisque ω est d'allure sousharmonique on a, d'aprés 1,

$$-1 + \operatorname{ord}|\mu| = -1 + \operatorname{ord}\mu = \operatorname{ord} M(r,\omega).$$

Comme ω est bi-sousharmonique, on a $\mu^-(B_0^r) \leqslant \mu^+(B_0^r)$, pour r assez grand, et donc $\operatorname{ord}\mu^- \leqslant \operatorname{ord}\mu^+$. Or

$$\operatorname{ord}|\mu| = \max(\operatorname{ord}\mu^-, \operatorname{ord}\mu^+) \quad \text{(voir [1], p. 358)}$$

et

$$\operatorname{ord} M(r,\omega) \leqslant \operatorname{ord} M(r,\omega^+).$$

Ainsi, il résulte du Lemme 1 que

$$-1 + \operatorname{ord}\mu^- \leqslant \operatorname{ord}\omega^+ \leqslant \operatorname{ord}\omega. \tag{4.2}$$

1^{er} cas: si $-1 + \operatorname{ord}\mu^- < \operatorname{ord}\omega$, il résulte du corollaire de ([1], prop. 8) que $\operatorname{ord}\omega^+ = \operatorname{ord}\omega$,

2^{éme} cas: si $-1 + \operatorname{ord}\mu^- = \operatorname{ord}\omega$ on a, d'aprés (4.2), que $\operatorname{ord}\omega = \operatorname{ord}\omega^+$. □

3. Fonctions biharmoniques

Dans cette section, nous donnons des propriétés caractéristiques des fonctions biharmoniques, et nous déterminons l'ordre de telles fonctions.

Proposition 5. *Soit $\omega \in C(\Omega)$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1) *ω est biharmonique au sens classique: $\Delta^2\omega = 0$*

2) *$M^a(r,\omega) - \omega(a) = r^2 h_1(a)$, pour toute boule fermée $\overline{B}_a^r \subset \Omega$, où h_1 est une fonction harmonique sur Ω*

3) *$A^a(r,\omega) - \omega(a) = r^2 h_2(a)$, pour toute boule fermée $\overline{B}_a^r \subset \Omega$, où h_2 est une fonction harmonique sur Ω*

4) *$M^a(r,\omega) - A^a(r,\omega) = r^2 h_3(a)$, pour toute boule fermée $\overline{B}_a^r \subset \Omega$, où h_3 est une fonction harmonique sur Ω.*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) soit $\mu = \mu^+ - \mu^-$ la mesure associée à ω. On a

$$M^a(r,\omega) - \omega(a) = \int_0^r \frac{\mu(B_0^t)}{t^2}\,\mathrm{dt}. \tag{5.1}$$

Comme

$$d\mu(x) = \frac{1}{4\pi}\Delta\omega\,\mathrm{dx},$$

on a, d'aprés (3.1)

$$M^a(r,\omega) - \omega(a) = \int_0^r \frac{1}{t^2}\left[\int_0^r x^2 \cdot M^a(x,\Delta\omega)\,\mathrm{dx}\right]\mathrm{dt}.$$

Ainsi, si ω est biharmonique (i.e. $\Delta\omega$ est harmonique) on a

$$M^a(r,\omega)-\omega(a)=\int_0^r \frac{1}{t^2}\left[\int_0^t x^2\Delta\omega(a)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\,.$$

Donc

$$M^a(r,\omega)-\omega(a)=\frac{1}{6}\Delta\omega(a)r^2,\ ,\ \text{ici } h_1=\frac{1}{6}\Delta\omega. \tag{5.2}$$

Réciproquement, s'il existe une fonction harmonique h_1 vérifiant
(2): $M^a(r,\omega)-\omega(a)=r^2\cdot h_1(a)$,
on a, d'aprés ([6], p. 169)

$$\frac{1}{6}\Delta\omega(a)=\lim_{r\to 0}\frac{M^a(r,\omega)-\omega(a)}{r^2}=h_1(a)$$

i.e. $\Delta\omega$ est harmonique et parsuite $\Delta^2\omega=0$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): De la relation

$$\begin{aligned} A^a(r,\omega)&=\frac{3}{r^3}\int_0^r t^2M(^a(t,\omega)\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{3}{r^3}\int_0^r \left[t^2\left(\omega(a)+t^2\cdot h_1(a)\right)\right]\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.3}$$

avec $h_1=\frac{1}{6}\Delta\omega$, on a

$$A^a(r,\omega)=\omega(a)+\frac{3}{5}\cdot r^2h_1(a),$$

d'où

$$A^a(r,\omega)-\omega(a)=r^2\cdot h_2(a),\quad \text{avec } h_2=\frac{1}{10}\Delta\omega.$$

(3) $\Longrightarrow$ (4): En dérivant (5.3) et (3) on a

$$r^2\cdot A^a(r,\omega)+\frac{r^3}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}}{}\mathrm{d}rA^a(r,\omega)=r^2\cdot M^a(r,\omega)$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{}\mathrm{d}rA^a(r,\omega)=2r\cdot h_2(a). \tag{5.4}$$

En substituant (5.4) dans la dernière relation on a

$$M^a(r,\omega)-A^a(r,\omega)=r^2\cdot h_3(a)\quad \text{où } h_3=\frac{1}{15}\Delta\omega,$$

et ceci n'est autre que la biharmonicité au sens de B.K. Pčelin ([11], [12]).

(4) $\Longrightarrow$ (1): On a

$$M^a(r,\omega) - A^a(r,\omega) = r^2 \cdot h_3(a)$$
$$[M^a(r,\omega) - \omega(a)] - [A^a(r,\omega) - \omega(a)] = r^2 \cdot h_3(a).$$

Donc

$$\lim_{r\to 0} \frac{M^a(r,\omega) - \omega(a)}{r^2} - \lim_{r\to 0} \frac{A^a(r,\omega) - \omega(a)}{r^2} = h_3(a).$$

Ainsi, d'aprés ([6], p. 169), on a

$$\frac{1}{15}\Delta\omega(a) = h_3(a).$$

Donc, $\Delta\omega$ est harmonique et parsuite ω est biharmonique. $\square$

Remarque 6. Selon la proposition précédente, nous pouvons considérer la notion de fonctions presque-biharmoniques sur $\mathbf{R}^n$ en remplaçant les égalités dans (1), (2), (3) et (4) par des égalités presque-partout.

Proposition 6. *Soit ω une fonction biharmonique sur $\mathbf{R}^3$, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1) $\lim_{r\to+\infty} \frac{A^a(r,\omega)}{r^2} \geqslant 0$ *pour tout* $a \in \mathbf{R}^3$

2) *ω est sousharmonique sur* $\mathbf{R}^3$

3) $\omega(x) = c|x|^2 + u(x)$. *Où u est une fonction harmonique sur $\mathbf{R}^3$ et c est une constante.*

Démonstration. Soit $h = \Delta\omega$. Puisque,

$$h(a) = \lim_{r\to+\infty} \frac{A^a(r,\omega)}{r^2} \quad ([6], \text{p. } 169),$$

on a l'équivalence entre (1) et (2).

(3) $\Longrightarrow$ (2): $|x| = r^2$ étant une fonction sousharmonique sur $\mathbf{R}^3$, donc cette implication est évidente.

(1) $\Longrightarrow$ (3): Puisque, par hypothése, $h \geqslant 0$ sur $\mathbf{R}^3$, alors h est constante.

Soit $h(a) = \frac{3}{5} \cdot c$ $(c \geqslant 0)$. Maintenant, il est simple de vérifier que

$$A^a(r, |x|^2) = \tfrac{3}{5}r^2 + |a|^2, \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{R}^3.$$

Ainsi, si l'on pose $u(x) = \omega(x) - c|x|^2$, on trouve que la fonction u est continue sur $\mathbf{R}^3$ et vérifie la condition

$$\begin{aligned} A^a(r,u) &= \omega(a) + r^2 \cdot h(a) - c \cdot (\tfrac{3}{5}r^2 + |a|^2) \\ &= \omega(a) - c|a|^2 = u(a). \end{aligned}$$

Parconséquent u est harmonique sur $\mathbf{R}^3$. $\square$

Corollaire. *Soit ω une fonction biharmonique sur $\mathbf{R}^3$. Si $\omega \geqslant 0$ en dehors d'un compact, alors ω est de la forme*

$$\omega(x) = c \cdot |x|^2 + u(x),$$

où $c > 0$ et u est un polynôme harmonique de degré $\leqslant 2$.

R e m a r q u e 7. La représentation du corollaire, a été déduite premièrement à partir de la représentation d'Almansi ([2], [10]) et puis par Duffin et Nehari [7] qui l'ont obtenu comme conséquence des inégalités de type Harnack pour les fonctions polyharmoniques.

Proposition 7. *Soit ω une fonction biharmonique sur $\mathbf{R}^3$, avec $\omega(x) = \varphi(x) \times |x|^2 + \psi(x)$, où φ, ψ sont deux fonctions harmoniques (représentation d'Almansi [2], [10]). On* a

1) $\operatorname{ord}\varphi = \operatorname{ord}\Delta\omega$

2) $\operatorname{ord}\omega = \max(2 + \operatorname{ord}\varphi, \operatorname{ord}\psi)$.

D é m o n s t r a t i o n . 1) D'une part, $\Delta\omega = 6\varphi + 4\left(x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)$.

D'autre part, si $\operatorname{ord}\varphi < \infty$, alors φ est un polynôme harmonique (voir Brelôt [6], p. 202). Soit $n = \deg\varphi$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que φ est un polynôme harmonique homogéne. D'aprés le théorème d'Euler on a

$$x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = n\varphi.$$

Parsuite

$$\Delta\omega = (6 + 4n)\varphi,$$

d'où

$$\operatorname{ord}\Delta\omega = \operatorname{ord}\varphi.$$

Si $\operatorname{ord}\varphi = +\infty$, alors $\varphi = \sum\limits_{n\geqslant 0} p_n$, où p_n, $n \geqslant 0$, sont des polynômes harmoniques homogènes de degré n et non nuls ([6], p. 202).

Donc

$$\Delta\omega = \sum_{n\geqslant 0}(6 + 4n)p_n, \quad (p_n \neq 0).$$

Parsuite $\operatorname{ord}\Delta\omega = +\infty$.

2) Posons $v(x) = |x|^2 \cdot \varphi(x)$

$$M(r, v^+) = r^2 \cdot M(r, \varphi^+).$$

Donc

$$\operatorname{ord} v = 2 + \operatorname{ord} \varphi = 2 + \operatorname{ord} \Delta\omega.$$

Si μ est la mesure associée à ω, on a, d'après ([1], th 15),

$$\operatorname{ord} \mu = 3 + \operatorname{ord} \Delta\omega = 3 + \operatorname{ord} \varphi = 1 + \operatorname{ord} v.$$

Par conséquent on a, d'aprés la remarque 2,

$$\begin{aligned} \operatorname{ord} \omega &= \max(\operatorname{ord} \psi, -1 + \operatorname{ord} \mu) = \max(\operatorname{ord} \psi, \operatorname{ord} v) \\ &= \max(\operatorname{ord} \psi, 2 + \operatorname{ord} \varphi). \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 8. Comme la mesure associée à ω coïncide avec celle associée à v (car ψ est harmonique), on a, v est une fonction δ-sousharmonique dominante en mesure au sens de [1] (i.e. $\operatorname{ord} v = (-1 + \operatorname{ord} \mu)^+$). Ainsi, la preuve de 2) peut résulter aussi de ([1], th 3).

Bibliographie

[1] *Anandam, V.*: On the integral representation of bisubharmonic functions. Ann. Acad. Sci. Fenn, Serie A. I. Mathematica *6* (1983), 357–368.

[2] *Aronszajn, N.; Creese, T.M.; Lipkin, L.J.*: Polyharmonic functions. Clarendon Press, Oxford, 1983.

[3] *Arsove, M.*: Functions of potential type. Trans. Amer. Math. Soc. *75* (1953), 526–551.

[4] *Benyaïche, A.*: Distributions bi-sousharmoniques sur la boule unité de $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$). Rev. Roum Math. Pures Appl. *36* (1991), no. 1-2, 3–20.

[5] *Brelôt, M.*: Fonctions sousharmoniques associées à une mesure de Radon. Acad. Roum, section de Jasy *3-4* (1951), 114–118.

[6] *Brelôt, M.*: Theorie classique du potentiel. C.D.U, Paris, 1965.

[7] *Duffin, R.J.; Nehari, Z.*: Note on Polyharmonic functions. Proc. Amer. Math. Soc. *12* (1961), 110–115.

[8] *Hayman, W.K.; Kennedy, P.B.*: Subharmonic functions. I. Academic Press, New York — London, 1976.

[9] *Nevanlinna, R.*: Théorème de Picard et la théorie des fonctions méromorphes. Gauthier Villars et Cie, Paris, 1919.

[10] *Nicolescu, M.*: Les fonctions polyharmoniques — Act. Sci et Ind. Herman, Paris, 1936.

[11] *Pčelin, B.K.*: On the general theory of polyharmonic functions. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, T. 187 (1969), no. 5.

[12] *Pčelin, B.K.*: On the theory of almost everywhere polyharmonic functions. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, T. 221 (1975), no. 1.

[13] *Premalatha; Anandam, V.*: The canonical potentials in $\mathbf{R}^n$. Ann. Acad. Sci. Fenn, Serie A. I., Math *6* (1981), 189–196.

L'addresse de l'auteur: *Allami Benyaïche*, Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatiques, B.P: 133, Kénitra, Morocco.