Roman Koplatadze

О монотонных и колеблющихся решениях дифференциальных уравнений n-го порядка с запаздывающим аргументом

Mathematica Bohemica, Vol. 116 (1991), No. 3, 296–308

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126173

116 (1991) MATHEMATICA BOHEMICA No. 3, 296—308

О МОНОТОННЫХ И КОЛЕБЛЮЩИХСЯ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Р. Г. КОПЛАТАДЗЕ, Тбилиси

(Поступило в редакцию 19. 6. 1989)

Резюме. Получены достаточные условия, при выполнении которых нелинейное дифференциальное уравнение высшего порядка с запаздыванием не имеет кнезеровских решений. Установлены специфические для уравнений с запаздыванием условия колеблемости решений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u^{(n)}(t) + f(t, u(\tau_1(t)), \ldots, u(\tau_m(t))) = 0\,, \tag{0.1}$$

где $n \geqq 1$, функции $\tau_i\colon R_+ \to R$ $(i = 1, \ldots, m)$ непрерывны,

$$\tau_i(t) \leqq t \quad \text{при} \quad t \in R_+ \quad \text{и} \quad \lim_{t\to+\infty} \tau_i(t) = +\infty \ (i = 1, \ldots, m)\,,$$

а функция $f\colon R_+ \times R^m \to R$ удовлетворяет локальным условиям Каратеодори и

$$(-1)^{n+1} f(t, x_1, \ldots, x_m)\, x_1 \geqq 0 \quad \text{при} \quad t \in R_+\,, \quad (x_1, \ldots, x_m) \in R^m, \tag{0.2}$$
$$x_1 x_i > 0 \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

Положим

$$\tau(t) = \min\{\tau_1(t), \ldots, \tau_m(t)\}\,,$$
$$\tau_*(t) = \inf\{s\colon s \geqq t,\ \tau(\xi) \geqq t \text{ при } \xi \geqq s\}\,.$$

Пусть $t_0 \in R_+$. Непрерывную функцию $u\colon [t_0, +\infty[\to R$ назовем правильным решением уравнения (0.1), если она абсолютно непрерывна вместе со своими производными до порядка $n - 1$ включительно на $[\tau_*(t_0), +\infty[$, почти всюду в этом промежутке удовлетворяет уравнению (0.1) и

$$\sup\{|u(t)|\colon s \leqq t < +\infty\} > 0 \quad \text{при} \quad s \geqq t_0\,.$$

Правильное решение уравнения (0.1) называется колеблющимся, если оно имеет последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$, и неколеблющимся — в противном случае.

Определение [2]. Уравнение (0.1) обладает свойством $\tilde{A}$, если каждое правильное решение этого уравнения при нечетном n является колелбющимся, а при четном n-либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию

$$|u^{(i)}(t)| \uparrow +\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow +\infty \quad (i = 0, \dots, n-1)\,. \tag{0.3}$$

Признаки колеблемости, улавливающие специфические особенности дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, впервые были предложены А. Д. Мышкисом [1]. Результаты аналогичного характера см. также в [2–11].

В данной работе приводятся новые специфические признаки колеблемости правильных решений уравнения (0.1).

1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Лемма 1.1. *Пусть соблюдается условие* (0.2) *и u-неколеблющееся правильное решение уравнения* (0.1). *Тогда существуют* $t_0 \in R_+$ *и четное число* $l \in \{0, \dots, n\}$ *такие, что*

$$u^{(i)}(t)\, u(t) \geqq 0 \quad (i = 0, \dots, l-1)\,,$$
$$(-1)^{i+l}\, u^{(i)}(t)\, u(t) \geqq 0 \;\; (i = l, \dots, n) \quad \text{при} \quad t \geqq t_0\,.$$

Доказательство этой леммы см. в [12] (леммы 14.1 и 14.2).

Через $L_{\mathrm{loc}}(R_+; R_+)$ обозначим множество функций $p\colon R_+ \to R_+$суммируемых на каждом конечном отрезке.

Лемма 1.2. *Пусть для некоторого* $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\delta_i(t)}^{t} s^{n-k-1}\, p_i(s)\, \mathrm{d}s > 0 \quad (i = 1, \dots, m) \tag{1.1}$$

и либо

$$\operatorname{v\,rai\,sup}\{p_i(t)\colon t \geqq 0\} < +\infty \quad \textit{при} \quad k = n-1 \quad (i = 1, \dots, m)\,, \tag{1.2}$$

либо

$$\operatorname{v\,rai\,sup}\{t^{n-k}\, p_i(t)\colon t \geqq 0\} < +\infty \quad \textit{при} \quad k \in \{0, \dots, n-2\} \quad (i = 1, \dots, m), \tag{1.3}$$

где $p_i \in L_{\mathrm{loc}}(R_+; R_+)$ $(i = 1, \dots, m)$, *а* $\delta_i\colon R_+ \to R$ $(i = 1, \dots, m)$ *— непрерывные неубывающие функции, уровлетворяющее условиям*

$$\delta_i(t) \leqq t \quad \textit{при} \quad t \in R_+\,, \quad \lim_{t\to+\infty} \delta_i(t) = +\infty \;\; (i = 1, \dots, m)\,. \tag{1.4}$$

Тогда если $u\colon [t_0, +\infty[\to R$ *— правильное решение уравнения*

$$u^{(n)}(t) + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, u(\delta_i(t)) = 0 \tag{1.5}$$

удовлетворяющее условию

(1.6) $$(-1)^i u^{(i)}(t)\,u(t) > 0 \ (i = 0, \dots, n-1) \quad \textit{при} \quad t \geqq t_0 ,$$

то существует $\lambda \in\,]0, +\infty[$ *такое, что*

(1.7) $$u_k(t) \exp \{\lambda \textstyle\int_{t_0}^{t} s^{n-k-1} \sum\limits_{i=1}^{m} p_i(s)\, ds\} \to +\infty \quad \textit{при} \quad t \uparrow +\infty ,$$

где

(1.8) $$u_k(t) = \sum_{i=k}^{n-1} \frac{t^{i-k} |u^{(i)}(t)|}{(i-k)!} .$$

Доказательство. Пусть u: $[t_0, +\infty[\, \to R$ — решение уравнения (1.5), удовлетворяющее условию (1.6). Тогда из (1.5) ввиду (1.6) имеем

(1.9) $$u_k(s) \geqq \frac{1}{(n-k-1)!} \int_s^t \xi^{n-k-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\, |u(\delta_i(\xi))|\, d\xi \ \text{при} \ t_1 \leqq s \leqq t ,$$

где $t_1 \geqq t_0$ — достаточно большое число. Согласно (1.1) существуют такие числа $c \in\,]0, +\infty[$ и $t_2 \in [t_1, +\infty[$, что

(1.10) $$\textstyle\int_{\delta_i(t)}^{t} s^{n-k-1}\, p_i(s)\, ds \geqq c \ (i = 1, \dots, m) \quad \text{при} \quad t \in [t_2, +\infty[.$$

Пусть $t \in [t_2, +\infty[$ — некоторое число. Тогда согласно (1.10) существуют числа $t_i^* \in\,]t, +\infty[$, $\dot{t}_i \in\,]t, t_i^*[$, $\text{t}_i \in\,]\delta_i(t_i^*), t[$ такие, что

(1.11) $$\int_{\delta_i(t_i^*)}^{t_i} s^{n-k-1}\, p_i(s)\, ds \geqq \frac{c}{4}, \quad \int_{t_i}^{t} s^{n-k-1} p_i(s)\, ds \geqq \frac{c}{4},$$

$$\int_{t}^{t_i} s^{n-k-1}\, p_i(s)\, ds \geqq \frac{c}{4} \quad (i = 1, \dots, m) .$$

Поэтому в силу (1.9)

(1.12) $$|u_k(t_i)| \geqq \frac{1}{(n-k-1)!} \int_{t_i}^{t} s^{n-k-1} \sum_{j=1}^{m} p_j(s)\, |u(\delta_j(s))| \geqq$$

$$\leqq \frac{c|u(\delta_i(t))|}{4(n-k-1)!} \quad (i = 1, \dots, m),$$

(1.13) $$|u_k(t)| \geqq \frac{1}{(n-k-1)!} \int_{t}^{t_i} s^{n-k-1} \sum_{j=1}^{m} p_j(s)\, |u(\delta_j(s))|\, ds \geqq$$

$$\leqq \frac{c|u(\delta_i(\dot{t}_i))|}{4(n-k-1)!} \quad (i = 1, \dots, m) .$$

С другой стороны, ввиду (1.5) и (1.6) из равенства

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u^{(j)}(s)}{j!} (t-s)^j + \frac{1}{(n-1)!} \int_s^t (t-\xi)^{n-1}\, u^{(n)}(\xi)\, d\xi$$

легко следует, что

$$(1.14)\qquad |u(\delta_i(t_i))| \geqq \sum_{j=k}^{n-1} \frac{|u^{(j)}(t_i)|}{j!}(t_i - \delta_i(t_i))^j \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Рассмотрим случай $k = n - 1$. Тогда согласно (1.10) и (1.2)

$$t_i - \delta_i(t_i) \geqq t_i - \delta_i(t_i^*) \geqq \frac{c}{4M_i} \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где $M_i > \text{v rai sup}\{p_i(t): t \in [0, +\infty[\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ – некоторыечисла. Поэтому в силу (1.12), (1.13) и (1.14) при $k = n - 1$ находим

$$|u^{(n-1)}(t)| \geqq \frac{c^{n+1}(4M_i)^{1-n}}{16[(n-k-1)!]^2} |u(\delta_i(t))| \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Ввиду произвольности t из этого неравенства вытекает, что

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \frac{|u(\delta_i(t))|}{|u^{(n-1)}(t)|} < +\infty \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Поэтому из уравнения (1.5) согласно (1.6) будем иметь

$$|u^{(n-1)}(t)| \geqq \exp\left\{-\lambda_0 \int_{t_3}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\, d\xi\right\} \quad \text{при} \quad t \geqq t_3,$$

где λ_0 и t_3 – достаточно большие положительные числа. Следовательно, при $k = n - 1$ существует $\lambda \in]0, +\infty[$ такое, что соблюдается условие (1.7).

Рассмотрим теперь случай, когда $k \in \{0, \ldots, n-2\}$. Тогда согласно (1.3) и (1.11) имеем

$$\delta_i(t_i^*) \leqq e^{-c/4M_i} t_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где $M_i > \text{v rai sup}\{t^{n-k} p_i(t): t \geqq 0\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ – некоторые числа. Поэтому в силу (1.14)

$$\begin{aligned}
|u(\delta_i(t_i))| &\geqq \sum_{j=k}^{n-1} \frac{(t_i - \delta_i(t_i))^j}{j!} |u^{(j)}(t_i)| \geqq \\
&\geqq \sum_{j=k}^{n-1} \frac{(t_i - \delta_i(t_i^*))^j}{j!} |u^{(j)}(t_i)| \geqq (1 - e^{-c/4M_i})^{n-1} \sum_{j=k}^{n-1} \frac{t_i^j |u^{(j)}(t_i)|}{j!} \geqq \\
&\geqq (1 - e^{-c/4M_i})^{n-1} \sum_{j=k}^{n-1} \frac{t_i^{j-k} |u^{(j)}(t_i)|}{(j-k)!} = (1 - e^{-c/4M_i})^{n-1} u_k(t_i).
\end{aligned}$$

Следовательно, согласно (1.12) и (1.13) имеем

$$u_k(t) \geqq \frac{c^2(1 - e^{-c/4M_i})^{n-1}}{4^2[(n-k-1)!]^2} |u(\delta_i(t))| \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Ввиду произвольности t из этого неравенства вытекает, что

(1.15) $$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{|u(\delta_i(t))|}{u_k(t)} < +\infty \quad (i = 1, \ldots, m).$$

С другой стороны, из уравнения (1.5) согласно (1.6) находим

$$u_k(t) = u_k(t_3) \exp\left\{-\frac{1}{(n-k-1)!}\int_{t_3}^{t} s^{n-k-1} \sum_{i=1}^{m} P_i(s) \frac{|u(\delta_i(s))|}{u_k(s)} \, \mathrm{d}s\right\}.$$

Отсюда ввиду (1.15) существует $\lambda \in]0, +\infty[$, для которого соблюдается условие (1.7). Лемма доказана.

Из доказанной леммы легко следует справедливость следующих лемм.

Лемма 1.3. *Пусть*

(1.16) $$\lim_{t\to+\infty} \int_{\delta_i(t)}^{t} p_i(s)\,\mathrm{d}s > 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

и

(1.17) $$\operatorname{vrai\,sup}\{p_i(t) \colon t \in [0, +\infty[\} < +\infty \quad (i = 1, \ldots, m)$$

где $\delta_i \colon R_+ \to R$ $(i = 1, \ldots, m)$ — непрерывные неубывающие функции, удовлетворяющие условию (1.4), *а $p_i \in L_{\mathrm{loc}}(R_+; R_+)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда, если $u \colon [t_0, +\infty[\to R$ — решение уравнения* (1.5), *удовлетворяющее условию* (1.6), *то существует $\lambda \in]0, +\infty[$ такое, что*

$$u(t)\, e^{\lambda t} \to +\infty \quad \textit{при} \quad t \uparrow +\infty.$$

Лемма 1.4. *Пусть для некоторого $k \in \{0, \ldots, n-1\}$*

(1.18) $$\lim_{t\to+\infty} \int_{\delta_i(t)}^{t} s^{n-k-1} p_i(s)\,\mathrm{d}s > 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

и

(1.19) $$\operatorname{vrai\,sup}\{t^{n-k} p_i(t) \colon t \in [0, +\infty[\} < +\infty \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где $\delta_i \colon R_+ \to R$ $(i = 1, \ldots, m)$ — непрерывные неубывающие функции, удовлетворящие условию (1.4). *Тогда если $u \colon [t_0, +\infty[\to R$ — решение уравнения* (1.5) *удовлетворяющее условию* (1.6), *то существует $\lambda \in]0, +\infty[$ такое, что*

$$u(t)\, t^{\lambda} \to +\infty \quad \textit{при} \quad t \uparrow +\infty.$$

Предложение 1.1. *Пусть соблюдаются неравенства* (1.16), (1.17),

(1.20) $$\inf\left\{\lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t} \int_{t}^{+\infty} (s-t)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\, e^{-\lambda\delta_i(s)}\,\mathrm{d}s \colon \lambda \in]0, +\infty[\right\} > (n-1)!$$

и

$$(1.21)\qquad \lim_{t\to+\infty}(\delta_i(t)-t)>-\infty \quad (i=1,\dots,m),$$

где $p_i \in L_{\mathrm{loc}}(R_+; R_+)$ $(i=1,\dots,m)$, $\delta_i\colon R_+ \to R$ $(i=1,\dots,m)$ — ***непрерывные неубывающие функции, удовлетворяющие условию*** (1.4). ***Тогда уравнение*** (1.5) ***не имеет решение, удовлетворяющее*** (1.6).

Доказательство. Предположим противное. Пусть уравнение(1.5) имеет решение $u\colon [t_0, +\infty[\to R$, удовлетворяющее условию (1.6). Тогда согласно лемме 1.3 существует $\lambda \in]0, +\infty[$ такое, что

$$(1.22)\qquad |u(t)|\, e^{\lambda t} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow +\infty .$$

Пусть Λ — множество тех λ, для которых соблюдается условие (1.22) и $\lambda_0 = \inf \Lambda$.

Согласно (1.20) существуют $\varepsilon > 0$ и $t_1 \in [t_0, +\infty[$ такие, что

$$(1.23)\qquad e^{\lambda t}\int_t^{+\infty}(s-t)^{n-1}\sum_{i=1}^m p_i(s)\, e^{-\lambda\delta_i(s)}\,\mathrm{d}s \geqq (n-1)! + \varepsilon \quad \text{при}$$

$$t\in[t_1, +\infty[\,,\quad \lambda \in]\lambda_0, \lambda_0+\varepsilon[\,.$$

Подберем $\varepsilon_0 \in]0, \varepsilon[$ и $\lambda \in]\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon[$ таким образом, чтобы

$$(1.24)\qquad e^{2c\varepsilon_0} > \frac{(n-1)!}{(n-1)!+\varepsilon}, \quad \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda\delta(t)}|u(\delta(t))| = +\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\varepsilon_0 t} e^{\lambda\delta(t)}|u(\delta(t))| = 0,$$

где $\delta(t) = \min\{\delta_1(t), \dots, \delta_m(t)\}$, $c = \lim\limits_{t\to+\infty}(\delta(t)-t)$.

Положим

$$(1.25)\qquad \varphi(t) = \inf\{e^{\lambda\delta(s)}|u(\delta(s))| \colon s \geqq t \geqq t_1\}.$$

Ввиду (1.25) и (1.24) очевидно, что

$$(1.26)\qquad \varphi(t)\uparrow +\infty \quad \text{при} \quad t\uparrow +\infty$$

и

$$(1.27)\qquad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t)\, e^{-\varepsilon_0 t} = 0.$$

Введем множества E_1 и E_2 следующим образом:

$$(1.28)\qquad t\in E_1 \Rightarrow e^{-\varepsilon_0 t}\varphi(t) \leqq e^{-\varepsilon_0 s}\varphi(s) \quad \text{при} \quad t_1 \leqq s \leqq t,$$

$$(1.29)\qquad t \in E_2 \Rightarrow \varphi(t) = e^{\lambda\delta(t)}|u(\delta(t))|.$$

Покажем, что

$$(1.30)\qquad \sup E_1 \cap E_2 = +\infty.$$

В самом деле, пусть $t^* \in E_1$ и $t^* \notin E_2$. Тогда согласно (1.24) и (1.25) существует $t_* > t^*$ такое, что

$$\varphi(t) = \varphi(t^*) \quad \text{при} \quad t \in [t^*, t_*[\quad \text{и} \quad \varphi(t_*) = e^{\lambda\delta(t_*)}|u(\delta(t_*))|$$

т.е. $t_* \in E_1 \cap E_2$. Так как $\sup E_i = +\infty$ $(i = 1, 2)$, из вышеприведенных расуждений вытекает (1.30). Поэтому ниже будем предполагать, что существует возрастающая последовательность $\{t_k\}$ такая, что

$$\lim_{k \to +\infty} t_k = +\infty\,, \quad e^{-\varepsilon_0 t_k}\varphi(t_k) \leqq e^{-\varepsilon_0 t}\varphi(t) \quad \text{при} \quad t_1 \leqq t \geqq t_k\,,$$
$$\varphi(t_k) = e^{\lambda\delta(t_k)}|u(\delta(t_k))| \quad (k = 2, 3, \ldots)\,. \tag{1.31}$$

С другой стороны, из уравнения (1.5) ввиду (1.6) имеем

$$|u(\delta t))| = \frac{1}{(n-2)!}\int_{\delta(t)}^{t}\int_{s}^{+\infty}(\xi - s)^{n-2}\sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\,|u(\delta_i(\xi))|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s\, +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\int_{t}^{+\infty}(\xi - t)^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\,|u(\delta_i)(\xi))|\,\mathrm{d}\xi \quad \text{при} \quad t \geqq \bar{t}\,, \tag{1.32}$$

где $\bar{t}$ — достаточно большое число. Очевидно, что

$$|u(\delta_i(t))|\,e^{\lambda\delta_i(t)} \geqq \varphi(t) \quad \text{при} \quad t \geqq \bar{t} \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

Поэтому согласно (1.26) и (1.31) из (1.32) находим

$$|u(\delta(t_k))| \geqq \frac{e^{\lambda\delta(t_k) - \varepsilon_0 t_k}|u(\delta(t_k))|}{(n-2)!}\int_{\delta(t_k)}^{t_k} e^{\varepsilon_0 s}\int_{s}^{+\infty}(\xi - s)^{n-2}\, \times$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\,e^{-\lambda\delta_i(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s\, +$$
$$+ \frac{e^{\lambda\delta(t_k)}|u(\delta(t_k))|}{(n-1)!}\int_{t_k}^{+\infty}(\xi - t_k)^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\,e^{-\lambda\delta_i(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Следовательно, ввиду (1.23) и (1.24)

$$1 \geqq \frac{e^{\lambda\delta(t_k)}}{(n-1)!}\left[-e^{-\varepsilon_0 t_k}\int_{\delta(t_k)}^{t_k} e^{\varepsilon_0 s}\,\mathrm{d}\int_{s}^{+\infty}(\xi - s)^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\,e^{-\lambda\delta_i(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\, +\right.$$
$$\left. + \int_{t_k}^{+\infty}(\xi - t_k)^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\,e^{-\lambda\delta_i(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\right] \geqq$$
$$\geqq \frac{e^{\varepsilon_0(\delta(t_k) - t_k)}}{(n-1)!}\,e^{\lambda\delta(t_k)}\int_{\delta(t_k)}^{+\infty}(\xi - \delta(t_k))^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\,e^{-\lambda\delta_i(\xi)}\,\mathrm{d}\xi \geqq$$
$$\geqq e^{2c\varepsilon_0}\frac{(n-1)! + \varepsilon}{(n-1)!} > 1 \quad \text{при} \quad k \geqq k_0\,,$$

где k_0 – достаточно большое число. Полученное противоречие доказывает предложение.

Из доказанного предложения вытекают следующие утверждения.

Следствие 1.1. *Пусть соблюдаются неравенства* (1.16), (1.17) *и*

$$(1.33)\qquad \inf_{\lambda\in]0,+\infty[} (\lambda^{-n}\ \mathrm{v\,rai\,inf}\{\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, e^{\lambda(t-\delta_i(t))}:\ t \geqq t_0\}) > 1\,,$$

где $t_0 \in [0, +\infty[$ *– некоторое число,* $p_i \in L_{\mathrm{loc}}(R_+; R_+)$ $(i = 1, \ldots, m)$*, а* $\delta_i\colon R_+ \to$ $\to R$ $(i = 1, \ldots, m)$ *– непрерывные неубывающие функции удовлетворяющее условию* (1.4). *Тогда уравнение* (1.5) *не имеетрешений, удовлетво ряющих условию* (1.6).

Следствие 1.2. *Пусть соблюдаются неравенства* (1.16), (1.17) *и*

$$(1.34)\qquad \mathrm{v\,rai\,inf}\{\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\,(t-\delta_i(t))^n:\ t \geqq t_0\} > \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

где $t_0 \in [0, +\infty[$ *– некоторое число,* $p_i \in L_{\mathrm{loc}}(R_+; R_+)$ $(i = 1, \ldots, m)$*, а* $\delta_i\colon R_+ \to R$ $(i = 1\,, \ldots, m)$ *непрерывные неубывающие функции, удовлетворяющие условию* (1.4). *Тогда уравнение* (1.5) *не имеет решений, удовлет воряющих условию* (1.6).

Предложение 1.2. *Пусть для некоторого* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ *соблюдаются неравенства* (1.18), (1.19),

$$(1.35)\qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\delta_i(t)}{t} > 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

и

$$(1.36)\qquad \inf\{\lim_{t\to+\infty} t^{\lambda} \int_t^{+\infty} (s-t)^{n-1} \sum_{n=1}^{m} p_i(s)\,\delta_i^{-\lambda}(s)\,\mathrm{d}s:\ \lambda \in]0, +\infty[\} >$$
$$> (n-1)!\,,$$

где $\delta_i\colon R_+ \to R\,(i = 1, \ldots, m)$ *– непрерывные неубывающие функции, удовлетворяющие условию* (1.4), *а* $p_i \in L_{\mathrm{loc}}(R_+; R_+)$ $(i = 1, \ldots, m)$. *Тогда уравнение* (1.5) *не имеет решебий, удовлетворяющих условию* (1.6).

Доказательство. Предположим противное. Пусть $u\colon [t_0, +\infty[\to R$ – решение уравнения (1.5), удовлетворяющее условию (1.6). Тогда согласно лемме 1.4 существует $\lambda \in]0, +\infty[$ такое, что

$$(1.37)\qquad |u(t)|\, t^{\lambda} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow +\infty\,.$$

Пусть Λ – множество тех λ, для которых соблюдается условие (1.37) и $\lambda_0 = \inf \Lambda$. Тогда согласно (1.36) существуют $\varepsilon > 0$, $t_1 \in [t_0, +\infty[$ такие, что

$$(1.38) \qquad t^{\lambda} \int_t^{+\infty} (s-t)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\, \delta_i^{-\lambda}(s)\, ds > (n-1)! + \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 ,$$

$$\lambda \in \left]\lambda_0 , \quad \lambda_0 + \varepsilon\right[.$$

Подберем $\varepsilon_0 \in \left]0, \varepsilon\right[$ и $\lambda \in \left]\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon\right[$ таким образом, чтобы

$$(1.39) \qquad \left(\frac{c}{2}\right)^{\varepsilon_0} > \frac{(n-1)!}{(n-1)! + \varepsilon}, \quad \lim_{t \to +\infty} \delta^{\lambda}(t) \left|u(\delta(t))\right| = +\infty ,$$

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-\varepsilon_0} \delta^{\lambda}(t) \left|u(\delta(t))\right| = 0 ,$$

где

$$\delta(t) = \min\left\{\delta_1(t), \ldots, \delta_m(t)\right\} , \quad c = \lim_{t \to +\infty} \frac{\delta(t)}{t} .$$

Положим

$$\varphi(t) = \inf\left\{\delta^{\lambda}(s) \left|u(\delta(s))\right| : s \geqq t \geqq t_1\right\} .$$

Введем множества E_1 и E_2 следующим образом:

$$t \in E_1 \Rightarrow t^{-\varepsilon_0} \varphi(t) \leqq s^{-\varepsilon_0} \varphi(s) \quad \text{при} \quad t_1 \leqq s \leqq t ,$$

$$t \in E_2 \Rightarrow \varphi(t) = \delta^{\lambda}(t) \left|u(\delta(t))\right| .$$

Как и при доказательстве предложения 1.1, легко показать, что $\sup E_1 \cap E_2 = +\infty$. Поэтому существует возрастающая последовательность $\{t_k\}$ такая, что

$$(1.40) \qquad \lim_{k \to +\infty} t_k = +\infty , \quad t_k^{-\varepsilon_0} \varphi(t_k) \leqq t^{-\varepsilon_0} \varphi(t) \quad \text{при} \quad t_1 \leqq t \leqq t_k ,$$

$$\varphi(t_k) = \delta^{\lambda}(t_k) \left|u(\delta(t_k))\right| \quad (k = 2, 3, \ldots) .$$

Так как

$$\left|u(\delta_i(t))\right| \delta_i^{\lambda}(t) \geqq \varphi(t) \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 \quad (i = 1, \ldots, m) ,$$

то из (1.5) согласно (1.38), (1.39) и (1.40) имеем

$$1 \geqq \frac{\delta^{\lambda}(t_k)}{(n-1)!}\left[-t_k^{-\varepsilon_0} \int_{\delta(t_k)}^{t_k} s^{\varepsilon_0}\, d \int_s^{+\infty} (\xi - s)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\, \delta_i^{-\lambda}(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{t_k}^{+\infty} (\xi - t_k)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\, \delta_i^{-\lambda}(\xi)\, d\xi \right] \geqq$$

$$\geqq \frac{\delta^{\lambda}(t_k)}{(n-1)!} \left(\frac{\delta(t_k)}{t_k}\right)^{\varepsilon_0} \int_{\delta(t_k)}^{+\infty} (\xi - \delta(t_k))^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\, \delta_i^{-\lambda}(\xi)\, d\xi \geqq$$

$$\geqq \frac{(n-1)! + \varepsilon}{(n-1)!} \left(\frac{c}{2}\right)^{\varepsilon_0} > 1 \quad \text{при} \quad k \geqq k_0 ,$$

где k_0 — достаточно большое число. Полученное противоречие доказывает предположение.

Из доказанного предложения легко вытекает

Следствие 1.3. *Пусть для некоторого* $k \in \{0, \dots, n-1\}$ *соблюдаются неравенства* (1.18), (1.19), (1.35) *и*

$$(1.41) \qquad \inf \left\{ \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{n-1} (i+\lambda)} \operatorname{v\,rai\,inf}_{t \geqq t_0} t^{n+\lambda} \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, \delta_i^{-\lambda}(t) \colon \lambda \in \left]0, +\infty\right[\right\} > 1 ,$$

где $t_0 \in [0, +\infty[$ *— некоторое число,* $p_i \in L_{\mathrm{loc}}(R_+; R_+)$ $(i = 1, \dots, m)$, *а* $\delta_i\colon R_+ \to R$ $(i = 1, \dots, m)$ *— непрерывные неубывающие функции, удовлетворяющие условию* (1.4). *Тогда уравнение* (1.5) *не имеет решений, удовлетворяющих условию* (1.6).

Замечание. В предложениях 1.1 и 1.2 неравенства (1.20) и (1.36) нельзя заменить нестрогими.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СВОЙСТВОМ $\tilde{A}$

Теорема 2.1. *Пусть*

$$(2.1) \qquad (-1)^{n+1} f(t, x_1, \dots, x_m) \operatorname{sign} x_1 \geqq \sum_{i=1}^{m} p_i(t) \left|x_i\right| \quad \text{при} \quad t \in R_+ ,$$

$$(x_1, \dots, x_m) \in R^m$$

и выполняются неравенства (1.16), (1.17), (1.20), (1.21), *где* $p_i \in L_{\mathrm{loc}}(R_+; R_+)$ $(i = 1, \dots, m)$,

$$(2.2) \qquad \delta_i(t) = \max\left\{\tau_i(s)\colon 0 \leqq s \leqq t\right\} \quad (i = 1, \dots, m) .$$

Тогда уравнение (0.1) *обладает свойством* $\tilde{A}$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (0.1) имеет правильное неколеблющееся решение u. Тогда согласно (1.16), (2.1) и лемме 1.1 существуют четное число $l \in \{0, \dots, n\}$ и $t_0 \in R_+$ такие, что

$$(2.3) \qquad u^{(i)}(t)\, u(t) > 0 \;\; (i = 0, \dots, l-1) ,$$

$$(-1)^{i+l} u^{(i)}(t)\, u(t) \geqq 0 \;\; (i = l, \dots, n) \quad \text{при} \quad t \geqq t_0 ,$$

Согласно (1.16)

$$\int^{+\infty} p_i(t)\, \mathrm{d}t = +\infty \quad (i = 1, \dots, m) .$$

Поэтому из следствий теорем 3.1' и 3.2' [2] вытекает, что $l \notin \{2, \dots, n-1\}$.

Предположим теперь, что $l = 0$. Тогда согласно (2.1), (2.3) и лемме 1 [13], уравнение (1.5) имеет решение $u_0(t)$, удовлетворяющее условию

$$(2.4) \qquad (-1)^i u_0^{(i)}(t)\, u_0(t) > 0 \quad (i = 0, \dots, n-1) .$$

С другой стороны, ввиду (1.16), (1.17), (1.20), (1.21) и предложения 1.1 уравенине (1.5) не имеет решений вида (2.4). Полученное противоречие доказывает,что $l \neq 0$. Следовательно, n четно и $l = n$. Тогда легко показать, что соблюдается условие (0.4), т.е. уравнение (0.1) обладает свойством $\tilde{A}$. Теорема доказана.

Ввиду следствий 1.1 и 1.2 из доказанной теоремы вытекают следующие утверждения.

Следствие 2.1. *Пусть соблюдаются неравенства* (1.16), (1.17), (1.21), (1.33), *и* (2.1), *где* $p_i \in L_{loc}(R_+; R_+)$ $(i = 1, \ldots, m)$, *а функции* δ_i $(i = 1, \ldots, m)$ *определяются равенствами* (2.2). *Тогда уравнение* (0.1) *обладает свойством* $\tilde{A}$.

Следствие 2.2. *Писть выполняются неравенства* (1.16), (1.17), (1.21), (1.34) *и* (2.1), *где* $p_i \in L_{loc}(R_+; R_+)$ $(i = 1, \ldots, m)$, *а функции* δ_i $(i = 1, \ldots, m)$ *определяются равенствами* (2.2). *Тогда уравнение* (0.1) *обладает свойством* $\tilde{A}$.

Теорема 2.2. *Пусть*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\tau_i(t)}{t} > 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{2.5}$$

выполняются неравенства (1.36), (2.1) *и для некоторого* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ *соблюдаются условия* (1.18), (1.19). *Пусть кроме того, если* $k = 0$, *то при нечетном (четном)* n *для любого* $\lambda \in [n-2, n-1[$ *(для любого* $\lambda \in [n-3, n-2[$*) существует* $\varepsilon \in (0, 1)$ *такое, что*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{n-1-\lambda} \int_t^{+\infty} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\, \tau_i^{\lambda}(s)\, ds > \prod_{i=0}^{n-2} |\lambda - i| + \varepsilon, \tag{2.6}$$

$$\Big(\lim_{t \to +\infty} t^{n-2-\lambda} \int_t^{+\infty} s \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\, \tau_i^{\lambda}(s)\, ds > \prod_{i=0;\, i \neq n-2}^{n-1} |\lambda - i| + \varepsilon \Big), \tag{2.7}$$

где $p_i \in L_{loc}(R_+; R_+)$ $(i = 1, \ldots, m)$, *функции* δ_i $(i = 1, \ldots, m)$ *определяются давенствами* (2.2). *Тогда уравнение* (0.1) *обладает свойством* $\tilde{A}$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (0.1) имеет правильное неколеблющееся решение u. Тогда согласно (2.1) и лемме 1.1, существуют четное число $l \in \{0, \ldots, n-1\}$ и $t_0 \in R_+$ такие, что соблюдаются неравенства (2.3).

Пусть $k \neq 0$. Тогда согласно (1.18), (2.1), (2.5) и теоремам 8.4 и 8.6 [2] $l \notin \{2, \ldots, n-1\}$. Если же $k = 0$, то согласно (2.1), (2.5), (2.6), (2.7) и теоремам 2.2 и 2.4 [14] $l \notin \{2, \ldots, n-1\}$. Следовательно, при любом $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ $l \notin \{2, \ldots, n-1\}$. С другой стороны, ввиду (1.18), (1.19), (1.36), (2.1), (2.5) и предложения 1.2, как и при доказательстве теоремы 2.1, легко покажем, что $l \neq 0$. Следовательно, n четно и $l = n$. Поэтому в силу (1.18), (2.1) и (2.3) легко показать, что соблюдается условие (0.4), т.е. уравнение (0.1) обладает свойством $\tilde{A}$. Теорема доказана.

Следствие 2.3. *Пусть совлюдаются условия* (1.41), (2.1), (2.5) *и для некоторого* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ *выполняются неравенства* (1.18), (1.19). *Пусть, кроме того, если* $k = 0$, *то при нечетном* (*четном*) n *для любого* $\lambda \in [n-2, n-1[$ (*для любого* $\lambda \in [n-3, n-2[$) *существует* $\varepsilon \in (0, 1)$ *такое, что соблюдается* (2.6) (*соблюдается* (2.7)), *то уравнение* (0.1) *обладает свойством* $\tilde{A}$.

Частным случаем следствий 2.1 и 2.3 являются теоремы 1 и 2 [7].

Литература

[1] *А. Д. Мышкис:* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., Наукал 1972.

[2] *Р. Г. Коплатадзе, Т. А. Чантурия:* Об осцилляционных свойствах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тбилиси, изд-во Тбил. ун-та, 1977.

[3] *В. Н. Шевело:* Осцилляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Киев, Наук. думка, 1978.

[4] *М. И. Трамов:* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом. Изв. бузов. математики, Но 3 (1975), 92—96.

[5] *G. Ladas:* Sharp coditions for oscillatiions consed by delays. Appl. Anal., *9*, 2 (1979), 93—98.

[6] *Ю. И. Домшлак:* Теоремы сравнения типа Штурма для дифференциальных уравнений первого и второго порядков со знакопеременными отклонениями аргумента .Укр. мат. журн., *34*, Но 2 (1982), 158—163.

[7] *Т. А. Чантурия:* О специфических признаках колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Укр. мат. журн., *38*, Но 5 (1986), 662—665.

[8] *B. R. Hunt, J. A. Yorke:* When all solutions of $x' = -\sum q_i(t)\, x(t - T_0(t))$ oscillate. J. Differential Equations, *53* (1984), 139—145.

[9] *I. Gyori:* Oscillations in scalar linear delay differential equation. Bull. austral. math. soc. *34*, N1 (1986), 1—9.

[10] *Р. Г. Коплатадзе, Т. А. Чантурия:* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом. Дифференц. уравнения, *18*, Но 8 (1982), 1463—1465.

[11] *Р. Г. Коплатадзе:* О нулях решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументон. Труды Ин-та прик. мат. им. И. Н. Векуа, *14* (1983), 128—134.

[12] *И. Т. Кигурадзе:* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, изд-во Тбил. ун-та 1975.

[13] *В. А. Надарейшвили:* О существовании монотонных решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков с отклоняющимся аргументом. Труды Ин-та прик. мат. им. И. Н. Векуа, *22* (1987), 180—193.

[14] *Р. Г. Коплатадзе:* О дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом, обладающих свойствами *А* и *В*. Дифференц. уравнения (в печати).

Адресс автора: ул. Октябрьская, 2ой микрораион, 2ой корпус, кв. 184, 380080 Тбилиси-80, СССР.

Summary

ON MONOTONE AND OSCILLATORY SOLUTIONS OF n-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RETARDED ARGUMENTS

R. G. Koplatadze

The sufficient conditions are given under which the high-order delay nonlinear differential equation has no solutions of the Kneser type. The oscillation conditions specific for equations with delay are established.