Jiří Čížek

Об алгебраической независимости значений некоторых E-функций. II.

Mathematica Bohemica, Vol. 116 (1991), No. 4, 360–365

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126034

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ E-ФУНКЦИЙ II

ИРЖИ ЧИЖЕК, Пльзень

(Поступило в редакцию 8. IX. 1989)

Пусть $[\alpha, n] = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$, $\alpha \in C$, и

$$H_0(z) = A_{\lambda,\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\nu, n]}{n!\,[\lambda, n]} z^n , \quad \lambda \neq 0, -1, -2, \dots . \tag{1}$$

Функция (1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \frac{\lambda - z}{z} y' - \frac{\nu}{z} y = 0 . \tag{2}$$

Пусть далее $\mu_k \neq 0, -1, -2, \dots, k = 1, \dots, m$. Обозначим

$$H_k(z) = z^{-\mu_k} e^z \int^z t^{-\mu_k - 1} e^{-t} H_{k-1}(t)\, \mathrm{d}t , \quad k = 1, \dots, m . \tag{3}$$

(Для пояснения символа $\int^z$ см. стр. 190—191 книги [2].) Функции H_0, H_0', $H_1, \dots, H_m$ образуют решение системы дифференциальных уравнений

$$y_0' = \bar{y}_0 , \quad \bar{y}_0' = \frac{\nu}{z} y_0 + \frac{z - \lambda}{z} \bar{y}_0 , \quad y_k' = \frac{z - \mu_k}{z} y_k + \frac{1}{z} y_{k-1} , \tag{4}$$
$$k = 1, \dots, m .$$

Обозначим

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \bar{y}_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + \left(\frac{\nu}{z} y_0 + \frac{z - \lambda}{z} \bar{y}_0\right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_0} + \tag{5}$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{z - \mu_i}{z} y_i + \frac{1}{z} y_{i-1}\right) \frac{\partial}{\partial y_i} ,$$

дифференциальный оператор, связанный с системой (4).

В работе докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \in Q$, $\nu \in Q \setminus Z$, такие, что $-\lambda \notin Z^+$, $\nu - \lambda \notin Z$, пусть $\mu_i \in Q \setminus Z$, $i = 1, \dots, m$, такие, что $\lambda - \nu - \mu_i \notin N$, $\mu_i - \lambda \notin Z^+$, $\mu_i - \mu_j \notin Z \setminus \{0\}$, $i, j = 1, \dots, m$, пусть $\xi, \eta \in A \setminus \{0\}$. Тогда $m + 3$ числа e^η, $H_0(\xi)$, $H_0'(\xi)$, $H_1(\xi), \dots$, $H_m(\xi)$ алгебраически независимы.*

Сначала рассмотрим три вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть* $\lambda, \nu, \mu_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, m$, *такие, что*

$$(6) \qquad -\lambda \notin \mathbb{Z}^+ , \quad \nu \notin \mathbb{Z} , \quad \nu - \lambda \notin \mathbb{Z} ,$$

$$(7) \qquad \mu_i \notin \mathbb{Z} , \quad \mu_i - \lambda \notin \mathbb{Z}^+ , \quad \lambda - \nu - \mu_i \notin \mathbb{N} , \quad \mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\} ,$$
$$i, j = 1, \ldots, m .$$

Пусть оператор D определен равенством (5) *и* $P \in \mathbb{C}[z, y_0, \bar{y}_0, y_1, \ldots, y_m]$, $P \not\equiv 0$. *Тогда многоьлен zDP может делится на мнорочлен P как многочлен от $m + 3$ переменных, тогда и только тогда, когда он имеет вид*

$$(8) \qquad P = cz^b , \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} , \quad b \in \mathbb{Z}^+ .$$

Доказательство. Начало доказательства Леммы 1 пройдет дословным повторением доказательства Леммы 9, [1], стр. 311, вплоть до тождества (126) и равенства (127), если только во всех формулах заменить число r на m, число $-\mu_l$ на выражение $z - \mu_l$ а в равенствах (114) положить $\sigma_l = 1$ при $l = 1$ в соответствии с чем в выражения (123)–(126) вместо скобки $(y_0 - \mu_1 - 1)$ войдет y_0. Вместо Леммы 8, [1], стр. 310, надо применять Лемму 2, [3]. Итак, предположив, что многочлен zDP делится на многочлен P, а P содержит хотя бы одну из переменных $y_1, \ldots, y_m$, мы приходим к тождеству

$$(9) \qquad c_1 z^{p_{r_1} - p_0} y_0 + zDQ + (\mu_{r_1} - z + p_0 - p_{r_1}) Q \equiv 0 , \quad c_1 \neq 0 ,$$

где $p_{r_1} - p_0 \in \mathbb{Z}^+$, $Q \in \mathbb{C}[z, y_0, \bar{y}_0]$ такой, что $z \nmid Q$ а затем убеждаемся в том, что Q имеет вид

$$(10) \qquad Q = R_1 y_0 + R_2 \bar{y}_0 + R_0 ,$$

где $R_0, R_1, R_2 \in \mathbb{C}[z]$, из которых хотя бы один не делится на z. Сравнивая в соотношении (9) члены, не содержащие y_0 и $\bar{y}_0$ получим тождество

$$zR_0' + (\mu_{r_1} - z + p_0 - p_{r_1}) R_0 \equiv 0 ,$$

из которого следует, что $R_0 = 0$. Тогда хотя бы один из многочленов R_1, R_2 не делится на z. Из равенства (10) имеем

$$(11) \qquad zDQ = (zR_1' + \nu R_2) y_0 + [zR_1 + zR_2' + (z - \lambda) R_2] \bar{y}_0 .$$

После сравнения коэффициентов при y_0 и $\bar{y}_0$ в тождестве (9), ввиду равенств (10) и (11) приходим к соотношениям

$$(12) \qquad (z - \mu_{r_1} + p_{r_1} - p_0) R_1 - zR_1' - \nu R_2 = c_1 z^{p_{r_1} - p_0} , \quad c_1 \neq 0 ,$$

$$(13) \qquad zR_1 + zR_2' + (\mu_{r_1} - \lambda - p_{r_1} + p_0) R_2 = 0 ,$$

где $z \nmid R_1$ или $z \nmid R_2$. Из (7) и (13) вытекает $z \mid R_2$. Если в соотношениях (12),

(13) поставить zR_2 вместо R_2, то (12), (13) примут вид

(14) $$(z - \mu_{r_1} + p_{r_1} - p_0) R_1 - zR_1' - \nu z R_2 = c_1 z^{p_{r_1} - p_0},$$

(15) $$R_1 + zR_2' + (\mu_{r_1} - \lambda - p_{r_1} + p_0 + 1) R_2 = 0.$$

Имеет место $p_{r_1} = p_0$. Если $p_{r_1} - p_0 > 0$, то, так как следуя (7) $-\mu_{r_1} + p_{r_1} - p_0 \neq 0$, из соотношения (14) вытекает $z \mid R_1$. Это противоречие. Итак, уравнения (14), (15) можно записать в виде

(16) $$(z - \mu_{r_1}) R_1 - zR_1' - \nu z R_2 = c_1$$

(17) $$R_1 + zR_2' + (\mu_{r_1} - \lambda + 1) R_2 = 0.$$

Следуя (17), $R_2 \not\equiv 0$. Так как $\nu \neq 0$, из (16) получим $\deg R_1 = \deg R_2$. Пусть $R_1(z) = a_m z^m + \ldots$, $R_2(z) = b_m z^m + \ldots$, $a_m . b_m \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Приравнением коэффициентов старших степеней z в уравнениях (16), (17) получим $a_m - \nu b_m = 0$, $a_m + (m + \mu_{r_1} - \lambda + 1) b_m = 0$, откуда вытекает $\mu_{r_1} - \lambda + \nu + m + 1 = 0$. Это противоречит предположению $\lambda - \nu - \mu_i \notin \mathbb{N}$ Леммы 1. Это доказывает, что соотношение (9) всегда противоречиво и многочлен P не содержит переменных $y_1, \ldots, y_m$ и Лемма 1 справедлива.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (6) *и* (7) *Леммы* 1 *и оператор* D *определен равенством* (5). *Пусть далее* $P \in \mathbb{C}[z, y_{00}, y_0, \bar{y}_0, y_1, \ldots, y_m]$, $P \not\equiv 0$, $D_1 = D + \alpha y_{00} (\partial/\partial y_{00})$, *где* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Тогда многочлен* zD_1P *может делиться на многочлен* P *тогда и только тогда, когда* P *имеет вид*

(18) $$P = cz^b y_{00}^a, \quad c \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{Z}^+.$$

Доказательство. Если $P = cz^b y_{00}^a$, то $zD_1P = (\alpha a z + b) P$. Наоборот: пусть

(19) $$P = Q_k y_{00}^k + \ldots + Q_1 y_{00} + Q_0, \quad Q_i \in \mathbb{C}[z, y_0, \bar{y}_0, y_1, \ldots, y_m],$$
$$i = 0, \ldots, k, \quad Q_k \not\equiv 0,$$

и $P \mid zD_1P$. Сравнением степеней по переменным $z, y_{00}, y_0, \bar{y}_0, y_1, \ldots, y_m$ получим

(20) $$zD_1P \equiv (az + b) P, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Из равенства (19) вытекает

(21) $$zD_1P = (zDQ_k + kzQ_k) y_{00}^k + \ldots + (zDQ_1 + zQ_1) y_{00} + zDQ_0.$$

Если допустить, что при некотором значении n, где $0 \leqq n < k$, многочлен Q_n отличен от нуля, то, сравнивая в тождестве (20) члены, содержащие y_{00}^n, получим при помощи (19) и (21) соотношение

(22) $$zDQ_n + \alpha n z Q_n \equiv (az + b) Q_n,$$

из которого следует, что zDQ_n делится на Q_n а по Лемме 1 $Q_n = c_n z^{b_n}$, $c_n \neq 0$,

$b_n \in \mathbb{Z}^+$. Разделив тождество (22) на Q_n, получим

$$b_n + \alpha n z \equiv b + az\,. \tag{23}$$

Это тождество справедливо для $n = k$. Допустив что оно справедливо также для некоторого n, $0 \leqq n < k$, получим противоречие $\alpha k = \alpha n = a$. Итак, $Q_i \equiv 0$, $i = 0, \ldots, k-1$, и $P = Q_k y_{00}^k = c_k z^{b_k} y_{00}^k$, что и требовалось доказать. (По поводу Леммы 2 см. [1], стр. 319, Лемма 12, и [2], стр. 223, Лемма 7.)

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (6), (7), $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *и функции* H_k, $k = 0, \ldots, m$, *определены равенствами* (1) *и* (3). *Тогда функции* $e^{\alpha z}$, $H_0(z)$, $H_0'(z)$, $H_1(z), \ldots, H_m(z)$ *алгебраически независимы над* $\mathbb{C}(z)$.

Доказательство. Применим индукцию по m. Если $m = 0$, то по Лемме 3 из [3] функции $e^{\alpha z}$, $H_0(z)$ и $H_0'(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, т.е. утверждение настоящей леммы справедливо. Предположим, что Лемма 3 выполняется при $m-1$, но не для m. Тогда существует неприводимый многочлен $P \in \mathbb{C}[z, y_{00}, y_0, \bar{y}_0, y_1, \ldots, y_m]$, содержащий y_m и такой, что

$$P(z, e^{\alpha z}, H_0(z), H_0'(z), H_1(z), \ldots, H_m(z)) = 0\,.$$

По Лемме 4, гл. 5 книги [2], стр. 191, $P \mid zD_1P$, где D_1 определен в Лемме 2. По Лемме 2 многочлен P не содержит переменных $y_0, \bar{y}_0, y_1, \ldots, y_m$. Это противоречие доказывает справедливость Леммы 3.

Доказательство Теоремы 1. Положим $\alpha = \eta/\xi \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. При условиях теоремы функции $e^{\alpha z}$, $H_0(z)$, $H_0'(z)$, $H_1(z), \ldots, H_m(z)$ очевидно E-функции и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (4), для которой общий наименьший знаменатель $T(z) = z$. По Лемме 3 функции $e^{\alpha z}$, $H_0(z)$, $H_0'(z)$, $H_1(z), \ldots, H_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ и $\xi\, T(\xi) = \xi^2 \neq 0$. Итак, по второй основной теореме книги [2], стр. 127, имеет место утверждение Теоремы 1.

Работа [3] посвящена функциям $A_0, A_0', A_1, \ldots, A_m$, где $A_0(z) = H_0(z)$ определена равенством (1) и

$$A_k(z) = z^{-\mu_k} \int^z t^{\mu_k - 1} A_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad k = 1, \ldots, m\,, \tag{24}$$

где $-\mu_k \notin \mathbb{Z}^+$, $k = 1, \ldots, m$. Ползуясь методом настоящей работы можно улучшить Теорему работы [3].

Теорема 2. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\nu \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, *такие, что* $-\lambda \notin \mathbb{Z}^+$; $\nu - \lambda \notin \mathbb{Z}$, *пусть* $\mu_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, m$, *такие, что* $\nu - \mu_i \notin \mathbb{N}$, $\mu_i - \lambda \notin \mathbb{Z}^+$, $\mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, i, $j = 1, \ldots, m$, *пусть* $\xi, \eta \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. *Тогда* $m + 3$ *числа* e^η, $A_0(\xi)$, $A_0'(\xi)$, $A_1(\xi), \ldots, A_m(\xi)$ *алгебраически независимы.*

Доказательство Теоремы 2. Доказательство совпадает с доказательством

Теоремы 1, только оператор D определен равенством

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \bar{y}_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + \left(\frac{\nu y_0}{z} + \frac{z-\lambda}{z}\bar{y}_0\right)\frac{\partial}{\partial \bar{y}_0} + \sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{\mu_i}{z}y_i + \frac{1}{z}y_{i-1}\right)\frac{\partial}{\partial y_i}, \tag{25}$$

и вместо условия $\lambda - \nu - \mu_i \notin \mathbb{N}$ Леммы 1 надо поставить условие $\nu - \mu_i \notin \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, m$. Заменивая назад число μ_l на выражение $\mu_l + z$, получаем вместо уравнений (12), (13)

$$(p_{r_1} - p_0 - \mu_{r_1}) R_1 - zR_1' - \nu R_2 = c_1 z^{p_{r_1} - p_0}, \quad c_1 \neq 0, \tag{26}$$

$$zR_1 + zR_2' + (z + \mu_{r_1} - \lambda - p_{r_1} + p_0) R_2 = 0, \tag{27}$$

где $z \nmid R_1$ или $z \nmid R_2$. Покажем, что в предположениях Леммы 1 (с описанными выше изменениями) эта система противоречива. Из уравнения (27) вытекает, что $\deg R_1 = \deg R_2$, и, так как $\mu_{r_1} - \lambda - p_{r_1} + p_0 \neq 0$, $z \mid R_2$. Из уравнения (26) получим $p_{r_1} - p_0 = 0$, так как в противном случае ($p_{r_1} - p_0 - \mu_{r_1} \neq 0$) $z \mid R_1$, что невозможно. Итак, $\deg R_1 = \deg R_2 \geqq 1$ и $p_{r_1} = p_0$. Приравнивая коэффициенты старших степеней z в уравнениях (26), (27), получим $a_m(-\mu_{r_1} - m) - \nu b_m = 0$, $a_m + b_m = 0$, откуда $a_m(\nu - \mu_{r_1} - m) = 0$, что противоречит условию $\nu - \mu_i \notin \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, m$. Доказательства Лема 2 и 3 пройдут без изменений.

Замечания. 1. Так как доказательства Лемм 2 и 3 не зависит от конкретного вида оператора D а только от того, если из соотношения $P \mid zDP$ вытекает $P = cz^b$, $b \in \mathbb{Z}^+$, то при сохранении всех условий можно в Теореме 4 работы [1] утверждать даже, что $r + 3$ числа e^η, $K_\lambda(\alpha)$, $K_\lambda'(\alpha)$, $K_{1,\lambda}(\alpha)$, $l = 1, \ldots, r$, алгебраически независимы, и в Теореме 5 той же работы, что $r + 3$ числа e^η, $K_\lambda(\alpha)$, $K_\lambda'(\alpha)$, $H_{l,\lambda}(\alpha)$, $l = 1, \ldots, r$, алгебраически независимы для любого $\eta \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$.

2. Теоремы 1 и 2 настоящей работы строго отвечают Теореме 4 работы [1]. Теорема 5 работы [1] на много красивее.

Литература

[1] *А. Б. Шидловский:* О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых функций, Тр. Моск. мат. о-ва, 1959, Т. 8, стр. 283—320.

[2] *А. Б. Шидловский:* Трансцендентные числа, Москва, Наука 1987.

[3] *И. Чижек:* Об алгебраической независимости значений некоторых E-функций, Časopis pěst. mat. *115* (1990), 283—289.

Souhrn

O ALGEBRAICKÉ NEZÁVISLOSTI HODNOT NĚKTERÝCH E-FUNKCÍ II

JIŘÍ ČÍŽEK

Buďte dána čísla $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\nu \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\mu_i \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, m$, taková, že $-\lambda \notin \mathbb{Z}^+$, $\nu - \lambda \notin \mathbb{Z}$, $\nu - \mu_i \notin \mathbb{N}$ (resp. $\lambda - \nu - \mu_i \notin \mathbb{N}$), $\mu_i - \lambda \in \mathbb{Z}^+$, $\mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Označme $A_0 = H_0$ Kummerovu funkci

$$A_0(z) = H_0(z) = A_{\lambda,\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\nu, n]}{n! \, [\lambda, n]} z^n$$

a dále

$$A_k(z) = z^{-\mu_k} \int^z t^{\mu_k - 1} A_{k-1}(t) \, dt \,, \quad k = 1, \ldots, m$$

$$(\text{resp. } H_k(z) = z^{-\mu_k} e^z \int^z t^{\mu_k - 1} e^{-t} H_{k-1}(t) \, dt, \; k = 1, \ldots, m) \,,$$

kde $[\alpha, n] = \alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)$. Užitím známé základní věty o algebraické nezávislosti hodnot E-funkcí je ukázáno, že pro každá dvě algebraická čísla $\xi, \eta \neq 0$ jsou čísla e^η, $A_0(\xi)$, $A'_0(\xi)$, $A_1(\xi), \ldots, A_m(\xi)$ (resp. e^η, $H_0(\xi)$, $H'_0(\xi)$, $H_1(\xi), \ldots, H_m(\xi)$) algebraicky nezávislá.

Summary

ON THE ALGEBRAIC INDEPENDENCE
OF THE VALUES OF SOME E-FUNCTIONS II

JIŘÍ ČÍŽEK

Let λ, ν, μ_i, $i = 1, \ldots, m$, be rational numbers such that $\nu \notin \mathbb{Z}$, $\mu_i \notin \mathbb{Z}$, $-\lambda \notin \mathbb{Z}^+$, $\nu - \lambda \notin \mathbb{Z}$, $\nu - \mu_i \notin \mathbb{N}$ (resp. $\lambda - \nu - \mu_i \notin \mathbb{N}$), $\mu_i - \lambda \notin \mathbb{Z}^+$, $\mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Let $A_0 = H_0$ be the Kummer's function

$$A_0(z) = H_0(z) = A_{\lambda,\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\nu, n]}{n! \, [\lambda, n]} z^n$$

and let

$$A_k(z) = z^{-\mu_k} \int^z t^{\mu_k - 1} A_{k-1}(t) \, dt \,, \quad k = 1, \ldots, m$$

$$(\text{resp. } H_k(z) = z^{-\mu_k} e^z \int^z t^{\mu_k - 1} e^{-t} H_{k-1}(t) \, dt, \; k = 1, \ldots, m) \,,$$

where $[\alpha, n] = \alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)$. Using the well-known fundamental theorem on the algebraic independence of the values of E-functions, it is proved that for every pair of algebraic numbers $\xi, \eta \neq 0$, the numbers e^η, $A_0(\xi)$, $A'_0(\xi)$, $A_1(\xi), \ldots, A_m(\xi)$ (resp. e^η, $H_0(\xi)$, $H'_0(\xi)$, $H_1(\xi), \ldots, H_m(\xi)$ are algebraically independent.

Author's address: Katedra matematiky, VŠSE, Nejedlého sady 14, 306 14 Plzeň.