Kybernetika

Baltazár Frankovič; R. Koňakovský

Bang-bang riadenie pre sústavy so spätnými väzbami

Kybernetika, Vol. 2 (1966), No. 6, (494)--507

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/125709`

KYBERNETIKA ČÍSLO 6, ROČNÍK 2/1966

Bang-bang riadenie pre sústavy so spätnými väzbami

B. FRANKOVIČ, R. KOŇAKOVSKÝ

Článek sa zaoberá otázkami optimálneho riadenia lineárnych sústav pomocou počítacích strojov. Zvláštna pozornosť sa venuje optimalizácii prechodu sústavy z jedného stavu do druhého za minimálny čas. Uvedené sú dve výpočtové metódy.

Prvá metóda sa zakladá na spojovaní riešení, druhá na sumácii riešení. Optimálne prepínacie okamžiky sú získané v obidvoch prípadoch minimalizáciou pomocnej funkcie.

ÚVOD

Úlohu optimálneho riadenia zo všeobecného hľadiska pri deterministickom spôsobe riešenia môžeme formulovať nasledovným spôsobom:

Nech statické a dynamické vlastnosti objektu sú opísané sústavou rovníc

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\,, \tag{1}$$

kde $\mathbf{x}$ – n-rozmerný vektor stavu objektu

$\mathbf{A}$ – matica sústavy typu $(n \times n)$

$\mathbf{u}$ – r-rozmerný vektor riadiacich veličín $(r \leqq n)$

$\mathbf{B}$ – matica rozmiestnenia riadiacich veličín typu $(n \times r)$; keď objekt je riaditeľný, treba nájsť:

1. Vektor riadiacich veličín $\mathbf{u}$, pri ktorom vektor stavu objektu $\mathbf{x}$ po ustálení bude mať takú hodnotu, že účelová funkcia E, ktorá charakterizuje celý systém, napr. ekonomická efektívnosť, bude sa rovnať optimálnej hodnote

$$E(\mathbf{x}) = E_{\mathrm{opt}}\,. \tag{2}$$

Tento stav nazývame *optimálnym*.

V tomto prípade hovoríme o statickom optimálnom riadení, kde riadiace veličiny podávame na riadený objekt vo forme jednotkového skoku.

2. Postupnosť vektorov $\boldsymbol{u}(t_0), \boldsymbol{u}(t_1), \ldots, \boldsymbol{u}(t_N)$, pri ktorých vektor stavu objektu $\boldsymbol{x}$ bude mať v každom diskrétnom okamihu t_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ takú hodnotu, že účelová funkcia E, ktorá charakterizuje celý systém, bude v týchto časových okamžikoch sa rovnať optimálnej hodnote, teda

$$E(\boldsymbol{x}_k, t_k) = E_{\mathrm{opt}}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, N\,. \tag{3}$$

V tomto prípade môžeme hovoriť o *statisticko-dynamickom optimálnom riadení.*

Najlepší zpôsob riadenia bude vtedy, ak dosiahneme optimálny stav v každom časovom okamihu. Mnoho úvah o poslednom spôsobe riadenia s teoretickými výsledkami nájdeme v prácach [1], [2], [3], [5]. V dalšom uvedieme syntézu metódy n intervalov a v druhej časti vhodné overené výpočtové metódy ilustrované príkladmi.

Vychádzajme z toho, že ak vektor riadiacich veličín v rovnici (1) sa určí pomocou číslicového počítača, potom pri priamom riadení môže zmeniť svoju hodnotu len v určitých časových okamihoch $t = t_j$, kým medzi týmito okamihami je konštantný (funkcia $\boldsymbol{u}(t)$ je po úsekoch konštantná).

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(t_j)\,, \quad t_j \leqq t < t_{j+1}\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

V tomto prípade rekurentný vzťah pre riešenie rovnice (1) v jednotlivých diskrétnych časových okamihoch je

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{D}(T)\,\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}_k\,, \tag{4}$$

kde $\boldsymbol{D}(T) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}$ – matica typu $n \times n$,

$T = t_{k+1} - t_k$ – konštantná diskrétna perióda,

$\boldsymbol{M} = \int_0^T \mathrm{e}^{T-\tau}\,\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\tau$ – matica $n \times r$.

Objekt opísaný sústavou rovníc (1) považujeme za riaditeľný, ak má konečnú dobu prechodového procesu, tj. ak ohraničená postupnosť po úsekoch konštantných riadiacich vektorov prevedie sústavu z ľubovoľného počiatočného stavu do daného stavu za konečný počet diskrétnych krokov.

Z fyzikálneho hľadiska existujú také príčiny, pre ktoré objekt opísaný sústavou rovníc (1) nemusí byť riaditeľný. Napr.:

a) niektoré zložky vektora stavu objektu môžu byť nezávislé od riadiaceho vektoru;
b) sústava môže mať viacnásobné vlastné hodnoty (charakteristické korene) a takú maticu $\boldsymbol{B}$ v rovnici (1), že aspoň dve riešenia odpovedajúce tomu istému koreňu sa riadia jedným a tým istým riadiacim signálom. V tomto prípade sa nedá previesť sústavu z každého počiatočného stavu do ľubovoľného daného stavu.

Vyšetrime túto otázku všeobecnejšie. Nech je daný nejaký stav $\boldsymbol{x}_d$ a treba určiť, či sa ho dá dosiahnuť z ľubovoľného počiatočného stavu za konečný počet krokov.

Dá sa ukázať, že je možné za jednu periódu dosiahnuť $\mathbf{x}_d$ z množiny počiatočných stavov $\{\mathbf{x}^1\}$, ktoré vyhovujú podľa (4) vzťahu:

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{D}(T)\{\mathbf{x}^1\} + \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{\delta}_j u_j^1 , \tag{5}$$

kde $\boldsymbol{\delta}_j$ – sú stĺpce matice $\boldsymbol{M}$

u_j – prvok riadiaceho vektora.

Kvôli zjednodušeniu označenia je vhodnejšie počítať v súradnicovom systéme z, kde $\mathbf{x}_d$ je počiatok. Potom platí:

$$\mathbf{O} = \mathbf{D}(T)\{\mathbf{z}^1\} + \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{\delta}_j u_j^1 , \tag{6}$$

kde $\{\mathbf{z}^1\} = \{\mathbf{x}^1 - [\mathbf{D}(T)]^{-1} \mathbf{x}_d\}$.

Riešením rovnice (6) vzhľadom k $\{\mathbf{z}^1\}$ dostaneme:

$$\{\mathbf{z}^1\} = -\sum_{j=1}^{r} [\mathbf{D}(T)]^{-1} \boldsymbol{\delta}_j u_j^1 . \tag{7}$$

Z toho vidieť, že podpriestor $\{\mathbf{z}^1\}$ se môže zhodovať s r-rozmerným podpriestorom n-rozmerného priestoru stavov len vtedy, ak vektory $[\mathbf{D}(T)]^{-1} \boldsymbol{\delta}_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$ sú lineárne nezávislé.

Položme teraz otázku, že z akého podpriestoru (množiny) počiatočných stavov $\{\mathbf{z}^2\}$ je možné dosiahnuť podpriestor (množinu) stavov $\{\mathbf{z}^1\}$ za T sekúnd, čiže počiatok $\mathbf{x}_d$ za $2T$ sekúnd.

Množina $\{\mathbf{z}^2\}$ sa určí riešením rovnice

$$\{\mathbf{z}^1\} = \mathbf{D}(T)\{\mathbf{z}^2\} + \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{\delta}_j u_j^2 ; \tag{8}$$

po dosadení (7) máme

$$\{\mathbf{z}^2\} = -\sum_{j=1}^{r} ([\mathbf{D}(T)]^{-1})^2 \boldsymbol{\delta}_j u_j^1 - \sum_{j=1}^{r} [\mathbf{D}(T)]^{-1} \boldsymbol{\delta}_j u_j^2 . \tag{9}$$

Rozmer podpriestoru $\{\mathbf{z}^2\}$ je väčší ako rozmer $\{\mathbf{z}^1\}$ o toľko, koľko lineárne nezávislých vektorov môžeme pridať k počiatočnému výberu lineárne nezávislých vektorov $[\mathbf{D}(T)]^{-1} \boldsymbol{\delta}_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Celý proces môžeme predĺžiť dotiaľ, kým neobsiahneme celý n-rozmerný priestor, musíme ovšem pridať v každom kroku aspoň jeden lineárne nezávislý vektor (to znamená, že rozmer podpriestoru $\{\mathbf{z}^{j+1}\}$ bude aspoň o jedno väčší ako rozmer $\{\mathbf{z}^j\}$). Na s-tom kroku bude platiť:

$$\{\mathbf{z}^s\} = -\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{r} ([\mathbf{D}(T)]^{-1})^i \boldsymbol{\delta}_j u_j^{s-i+1}\right), \tag{10}$$

pričom $s \leqq n$ je maximálny počet krokov nutných k tomu, aby z ľubovoľného počiatočného stavu sa dosiahol daný stav, kde n je rád sústavy.

Z toho je vidieť, že k tomu, aby sme určili, či je objekt riaditeľný, je dostačujúce stanoviť, či je možné obsiahnuť týmto spôsobom celý n-rozmerný priestor stavov ze n-krokov.

METODA n INTERVALOV

V ďalšom budeme uvažovať prípad prechodu sústavy z jedného stavu do druhého za najkratší čas riešený metódou n-intervalov [1], odvodenej z princípu maxima [2], keď sústava (1) je lineárna, charakteristické čísla matice $\boldsymbol{A}$ sú reálne, rôzne a na riadiace veličiny sú kladené obmedzenia $|u_k| \leqq U$. Pre tento prípad podľa principu maxima adjungovaná sústava k sústave (1) bude:

$$\dot{\Psi}_i = -\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i} \Psi_\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

pre ktorú platí, že charakteristické čísla matice $(a_{\nu i})$ budú reálne. Riešenie sústavy (11) bude:

$$\Psi_i(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, e^{p_j t}, \tag{12}$$

kde p_j – sú reálne korene,
C_{ij} – integračné konštanty.

Keď riadenie $\boldsymbol{u}$ je časovo optimálne, potom podľa princípu maxima maximalizuje funkciu

$$H = \boldsymbol{\Psi}\, \boldsymbol{A x} + \boldsymbol{\Psi}\, \boldsymbol{B u}. \tag{13}$$

Keď vyšetrujeme túto funkciu v oblasti $|u_k| \leqq U$ ako funkciu u vidíme, že dosiahne svojho maxima v tom istom bode ako funkcia:

$$(\boldsymbol{\Psi}\, \boldsymbol{B u}) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i \sum_{k=1}^{r} b_{ik} u_k, \tag{14}$$

ktorá dosahuje maxima keď

$$u_k = \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \Psi_i = \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, e^{p_j t} = \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} D_{kj}\, e^{p_j t}, \tag{15}$$

kde

$$D_{kj} = \sum_{j=1}^{n} b_{ik} C_{ij}, \quad k = 1, 2, \ldots, r. \tag{16}$$

Dá sa dokázať, že výraz $\sum_{j=1}^{n} D_{kj} e^{p_j t}$ prechádza cez nulu najviac $(n - 1)$ ráz, to znamená, že nemá viac ako n intervalov s konštantným znamienkom. Teda aj u má najviac n intervalov, v ktorých je konštantné. To je vlastne teorém o n intervaloch odvodený z princípu maxima.

Keď sústava je jednoparametrová, potom také riadenie, ktoré prevedie sústavu z počiatočného stavu do žiadaného stavu a má najviac n intervalov, v ktorých je konštantné a nadobúda krajné hodnoty, je len jedno a je časove optimálne [4].

Ďalej uvedené výpočtové metódy boli odvodené pre jednoparametrovú sústavu opísanú diferenciálnou rovnicou n-tého rádu tvaru

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)} . \tag{17}$$

Túto rovnicu môžeme prepísať do sústavy lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_1 , \\ \dot{x}_1 &= x_2 , \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-2} &= x_{n-1} , \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n , \end{aligned} \tag{18}$$

kde

$$x_n = \frac{1}{a_n} \left(-a_{n-1} x_{n-1} - \dots - a_1 x_1 - a_0 x + b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u \right).$$

Keď zavedieme nové premenné $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ definované pomocou lineárnej transformácie

$$\mathbf{Y} = \mathbf{CX} - \mathbf{DU} , \tag{19}$$

kde

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(m)} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{20a}$$

matice $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ sú vytvorené z koeficientov a_i, b_i a sú typu $n \times n$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_n & 0 \\ a_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{20b}$$

$$
\text{(20c)} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix}
b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{m-1} & b_m & 0 & \ldots & 0 \\
b_2 & b_3 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
b_3 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_{m-1} & b_m & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_m & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}.
$$

potom môžeme sústavu (18) prepísať do tvaru:

$$
\text{(21)} \qquad \begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -a_0 a_n^{-1} y_n + b_0 u \,, \\
\dot{y}_2 &= -a_1 a_n^{-1} y_n + b_1 u + y_1 \,, \\
&\;\vdots \\
\dot{y}_{m+1} &= -a_m a_n^{-1} y_n + b_m u + y_m \,, \\
\dot{y}_{m+2} &= -a_{m+1} a_n^{-1} y_n + y_{m+1} \,, \\
&\;\vdots \\
\dot{y}_{n-1} &= -a_{n-2} a_n^{-1} y_n + y_{n-2} \,, \\
\dot{y}_n &= -a_{n-1} a_n^{-1} y_n + y_{n-1} \,,
\end{aligned}
$$

V maticovom tvare to bude

$$
\text{(21a)} \qquad \dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{B}u \,,
$$

kde

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}
0 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_0 \\
1 & 0 & \ldots & \ldots & -a_1 \\
0 & 1 & 0 & \ldots & -a_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1}
\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Tým sme rovnicu (17) pomocou lineárnej transformácie previedli na rovnicu tvaru (1).

Riešenie rovnice (17), tj. sústavu (18) môžeme získať z riešenia sústavy (21a) spätne pomocou vzťahu (19). V sústave (21a) sa nevyskytujú derivácie veličiny u, to je výhodné najmä vtedy, keď u je nespojitá funkcia s konečným počtom bodov nespojitosti, napr. prepínacia funkcia.

Optimálne riadenie $u^*(t)$, ktoré prevedie sústavu opísanú rovnicou (17) z počiatočného stavu $\boldsymbol{X}_p = (x_p, x'_p, \ldots, x_p^{(n-1)})^T$ do žiadaného stavu $X_d = (x_d, x'_d, \ldots, x_d^{(n-1)})^T$ za najkratší čas nájdeme týmto spôsobom.

Označme $\mathbf{X}_u = (x_u, x_u', \ldots, x_u^{(n-1)})^T$ riešenie rovnice (17) v čase $t = t_n$, keď počiatočné podmienky sú $\mathbf{X}_p$ a u je tvaru prepínacej funkcie

$$(22) \qquad u(t) = u_j\,, \quad t_j \leqq t < t_{j+1}\,,$$

kde $|u_j| = U = \text{konst.}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$,
$u_j = -u_{j-1}$.

Zostrojíme funkciu

$$(23) \qquad F(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_u^{(i)} - x_d^{(i)})^2\,.$$

Keď túto funkciu minimalizujeme podľa $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (napr. gradientovou metódou) a nájdeme také $t_1, t_2, \ldots, t_n$, pre ktoré je

$$(24) \qquad F(t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*) = 0\,,$$

potom $x_n^{(i)} = x_d^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ a podľa vyššie ukázaného sú $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_m^*$ optimálne časové okamžiky prepnutia riadiacej veličiny $u^*(t)$ [4].

V rovnici (17) vystupujú na pravej strane derivácie veličiny u, a preto aby sme mohli spočítať $\mathbf{X}_u$, musíme poznať hodnotu $u = u_p$ v čase $t < 0$ a tiež hodnotu $u = u_n = \text{const}$ v čase $t \geqq t_n$. Hodnoty $x_u^{(i)}$ môžeme získať dvojakým spôsobom.

I. Metóda spojovania riešení

a) *Pomocou transformácie rovnice* (17) *do sústavy* (21*a*)

Vychádzame z počiatočnej podmienky $\mathbf{X}_p$, u_p a podľa (19), dostaneme počiatočnú podmienku $\mathbf{Y}_p$. Riešenie sústavy (21) v prvom intervale keď $u = u_0$ označíme $\mathbf{Y}_1(t)$. Hodnotu v čase t_1 pokladáme za nové počiatočné podmienky $\mathbf{Y}_1(t_1)$ pre druhý interval. Ďalej označme $\mathbf{Y}_2(t)$ riešenie sústavy (21) v druhom intervale pri počiatočných podmienkach $\mathbf{Y}_2(t_1) = \mathbf{Y}_1(t_1)$ keď $u = u_1$. Hodnotu v čase t_2 pokladáme za nové počiatočné podmienky $\mathbf{Y}_2(t_2)$ pre tretí interval. Tento postup opakujeme dovtedy, kým získame $\mathbf{Y}_n(t_n)$.

Podľa (19) určíme potom $\mathbf{X}(t_n)$, a to už je vlastne riešenie, ktoré sme označili $\mathbf{X}_u$.

b) *Pomocou transformácie počiatočných podmienok*

Nech na konci $(j - 1)$-ho intervalu v časovom okamžiku $t = t_j$ rešenie rovnice (17) je $\mathbf{X}_{j-1}(t_j)$ a veličina u sa mení skokom z hodnoty u_{j-1} na u_j, potom riešenie rovnice (17) v j-tom intervale, kde $u = u_j$ pri počiatočných podmienkach

$$\mathbf{X}_j(t_j) = \mathbf{X}_{j-1}(t_j)$$

je rovné riešeniu rovnice (17) bez derivácii u

$$(25) \qquad \sum_{i=0}^{u} a_i x^{(i)} = b_0 u.,$$

kde $u = u_j$ pri počiatočných podmienkach transformovaných podľa vzťahu

$$X_j(t_j) = M^{-1}[M X_{j-1}(t_j) + N(u_j - u_{j-1})], \tag{26}$$

kde

$$M = \begin{pmatrix} a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ . & a_n & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_2 & a_3 & . & . & . \\ a_1 & a_2 & . & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ b_m \\ . \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Teda riešenie rovnice (17) v prvom intervale pri počiatočných podmienkach X_p, u_p keď $u = u_0$ prevedieme na riešenie rovnice (25) pri počiatočných podmienkach transformovaných podľa (26)

$$X_0(t_0) = M^{-1}[M X_p + N(u_0 - u_p)],$$

kde $X_{-1}(t_0) = X_p$, $u_{-1} = u_p$.

Riešenie v čase t_1 pokladáme za nové počiatočné podmienky $X_0(t_1)$. Podľa vzťahu (26) určíme $X_1(t_1)$ a opäť môžeme miesto riešenia rovnice (17) riešiť rovnicu (25), kde $u = u_1$. Tento postup opakujeme dovtedy, kým nezískame $X_n(t_n)$, a to je vlastne riešenie, ktoré sme označili X_u.

II. Metóda sumácie riešení

Prepínaciu funkciu $u(t)$ nahradíme sumáciou skokových funkcí posunutých o časy t_i vpravo

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n} s_i(t), \tag{28}$$

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad t < t_i, \\ A_i & \text{pre} \quad t \geqq t_i, \end{cases}$$

kde $A_i = \text{const.}$

Označme $X_1(t)$ riešenie rovnice (17), keď u je tvaru jednotkového skoku pri nulových počiatočných podmienkach a označme $X_0(t)$ riešenie rovnice (17) pri počiatočných podmienkach X_p, keď u sa mení skokom v čase $t = 0$ z hodnoty u_p na nulu. Potom pre $t \geqq t_n$ bude:

$$X(t) = X_0(t) + \sum_{i=0}^{n} A_i X_1(t - t_i). \tag{29}$$

Riešenie $X(t)$ v čase $t = t_n$ je vlastne riešenie, ktoré sme označili X_u.

Odvodené výpočtové metódy sme overili na sústave 3. rádu, ktorá je opísaná lineárnou diferenciálnou rovnicou:

$$a_3x + a_2x'' + a_1x' + a_0x = b_1u' + b_0u\,, \tag{30}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 1\,, & b_1 &= 0{,}12\,,\\ a_2 &= 2{,}05\,, & b_0 &= 0{,}156\,,\\ a_1 &= 1{,}15\,, & &\\ a_0 &= 0{,}156\,, & & \end{aligned}$$

ohraničenie je $|u| \leqq 1$, počiatočné hodnoty $u_p = -1$, $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

žiadaný stav $\mathbf{X}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rovnica (23) bude tvaru:

$$F(t_1, t_2, t_3) = x_u^2 + x_u'^2 + x_u''^2\,. \tag{31}$$

Hodnoty x_u, x_u', x_u'' sme počítali obidvoma spôsobmi.

I. Metoda spojovania riešení

Podľa (27) máme

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix}; \tag{32}$$

z rovnice (26) dostaneme

$$\mathbf{MX}_j = \mathbf{MX}_{j-1} + \mathbf{N}(u_j - u_{j-1})\,;$$

po rozpísání dostaneme

$$\begin{aligned} a_3x_j &= a_3x_{j-1}\,,\\ a_2x_j + a_2x_j' &= a_jx_{j-1} + a_3x_{j-1}'\,,\\ a_1x_j + a_2x_j' + a_3x_j'' &= a_1x_{j-1} + a_2x_{j-1}' + a_3x_{j-1}'' +\\ &\quad + b_1(u_j - u_{j-1})\,; \end{aligned} \tag{33}$$

po úprave

$$\begin{aligned} x_j &= x_{j-1}\,,\\ x_j' &= x_{j-1}'\,,\\ x_j'' &= x_{j-1}'' + 0{,}12(u_j - u_{j-1})\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Rovnica (25) má tvar

$$x''' + 2{,}05x'' + 1{,}15x' + 0{,}156x = 0{,}156u \,. \tag{35}$$

Prevedieme transformáciu počiatočných podmienok pre prvý interval podľa (34)

$$\mathbf{X}_0(t_0) = \begin{pmatrix} x_p \\ x'_p \\ x''_p + 0{,}24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}.$$

Riešenie rovnice (35) keď $u = u_0 = 1$ pri počiatočných podmienkach $\mathbf{X}_0(t_0)$ v čase t_1 bude $\mathbf{X}_0(t_1)$, a to sú počiatočné podmienky pre druhý interval. Prevedieme znovu transformáciu počiatočných podmienok podľa (34). Riešenie rovnice (35) keď $u = u_1 = -1$ pri počiatočných podmienkach $\mathbf{X}_1(t_1)$ v čase t_2 bude $\mathbf{X}_1(t_2)$, a to sú zase počiatočné podmienky pre tretí interval, ktorý opäť transformujeme podľa (34) a dostaneme $\mathbf{X}_2(t_2)$. Riešenie rovnice (35) keď $u = u_2 = 1$ pri počiatočných podmienkach $\mathbf{X}_2(t_2)$ v čase t_3 bude $\mathbf{X}_2(t_3)$. Pretože na konci riadenia v čase t_3 sa mení hodnota u skokom z hodnoty u_2 na hodnotu $u_3 = 0$, musíme znovu použiť vzťah (34)

$$\mathbf{X}_3(t_3) = \begin{pmatrix} x_2(t_3) \\ x'_2(t_3) \\ x''_2(t_3) - 0{,}12 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathbf{X}_u \,.$$

Po dosadení týchto hodnôt do (31) dostaneme $F(t_1, t_2, t_3)$. Túto funkciu sme minimalizovali gradientovou metódou až do presnosti 10^{-4}. Prevedené iteračné kroky sú v tab. 1., kde

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= t_1 \,, \\ \Delta t_2 &= t_2 - t_1 \,, \\ \Delta t_3 &= t_3 - t_2 \,. \end{aligned} \tag{36}$$

II. Metóda sumácie riešení

Keď u je tvaru jednotkového skoku, potom riešenie rovnice (30) pri nulových počiatočných podmienkach má tvar:

$$x_1(t) = C_0 + \sum_{i=1}^{3} C_i \exp\left[p_i t\right] \tag{37}$$

kde p_1, p_2, p_3 sú korene charakteristickej rovnice,
C_0, C_1, C_2, C_3 sú konštanty.

Riešenie rovnice (30) pri počiatočných podmienkach x_p, u_p a keď u sa v čase $t = 0$ zmení skokom z hodnoty u_p na $u = 0$, bude

$$x_0(t) = +\left(\sum_{i=1}^{3} C_i \exp\left[p_i t\right]\right)(-u_p) + (x_p - C_0 u_p) \sum_{i=1}^{3} D_i \exp\left[p_i t\right], \tag{38}$$

kde D_i sú konštanty.

Tabuľka 1.

krok	Δt_1	Δt_2	Δt_3	$10^{-3} F(t_1 t_2 t_3)$
0	3,0000	1,0000	0,3000	108,44
1	3,4632	1,0909	0,4005	62,07
2	3,9178	1,1467	0,4595	32,34
3	4,1836	1,1749	0,4531	14,75
4	4,3572	1,2000	0,4210	7,62
5	4,4772	1,2231	0,3806	4,18
6	4,5626	1,2426	0,3409	2,27
7	4,6240	1,2579	0,3064	1,21
8	4,6682	1,2690	0,2785	0,622
9	4,7000	1,2764	0,2573	0,308
10	4,7227	1,2810	0,2416	0,148
11	4,7388	1,2835	0,2303	0,069
12	4,7450	1,2842	0,2259	0,0323
13	4,757	1,2846	0,2170	0,022

Tabuľka 2.

krok	Δt_1	Δt_2	Δt_3	$10^{-3} F(t_1 t_2 t_3)$
0	3,0000	1,0000	0,3000	109,78
1	3,6872	1,1637	0,4702	35,06
2	4,0184	1,1843	0,5034	17,07
3	4,2263	1,199	0,4951	9,686
4	4,3694	1,2175	0,4680	5,906
5	4,4725	1,2362	0,4326	3,695
6	4,5496	1,2544	0,3959	2,302
7	4,6078	1,2701	0,3614	1,412
8	4,6522	1,2829	0,3312	0,848
9	4,6860	1,2929	0,3061	0,500
10	4,7309	1,3050	0,2705	0,169
11	4,7560	1,3100	0,2499	0,059
12	4,7698	1,3110	0,2383	0,024
13	4,7770	1,3102	0,2316	0,019

Potom podľa (29) dostaneme pre $t \geqq t_3$

$$x(t) = C_0\left(\sum_{i=0}^{3} A_i\right) + \tag{39}$$

$$+ C_1 \exp\left[p_i t\right]\left(A_0 + \sum_{i=1}^{3} A_i \exp\left[-p_1 t_i\right]\right) +$$

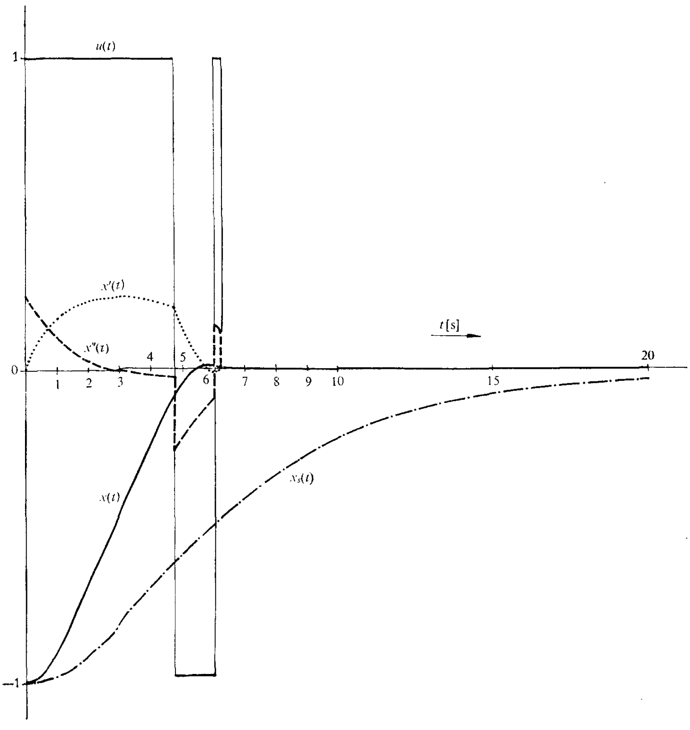
$$+ C_2 \exp[p_2 t] \left(A_0 + \sum_{i=1}^{3} A_i \exp[-p_2 t_i]\right) +$$

$$+ C_3 \exp[p_3 t] \left(A_0 + \sum_{i=1}^{3} A_i \exp[-p_3 t_i]\right) +$$

$$+ (-u_p) \sum_{i=1}^{3} C_i \exp[p_i t] +$$

$$+ (x_p - C_0 u_p) \sum_{i=1}^{3} D_i \exp[p_i t] .$$

V našom prípade je $A_0 = 1$, $A_1 = -2$, $A_2 = 2$, $A_3 = -1$.



Obr. 1.

Keď dosadíme $t = t_3$ do (39), dostaneme x_u, ďalej derivovaním x'_u a x''_u a po dosadeni do (31) môžeme vypočítať funkciu F. Minimalizovaním tejto funkcie dostaneme hodnoty uvedené v tab. 2. Časové priebehy veličín $u(t)$, $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ a prechodová charakteristika x_s sú na obr. 1.

ZÁVER

Podľa prevedených iterácií uvedených v tab. 1 a 2 vidíme, že sa obidve metódy z hľadiska presnosti výpočtu nelíšia. Výhodou metódy sumácie riešení je to, že nie je potrebné prevádzať transformácie ako u metódy spojovania riešení.

Tieto metódy sa dajú aplikovať hlavne pre jednoparametrové sústavy so spätnou väzbou, u ktorých v čitateli prenosu je polynom najmenej prvého rádu, tj. sú opísané lineárnou diferenciálnou rovnicou tvaru (17). Takouto sústavou je napr. absorbčná kolona [6].

(Došlo dňa 10. februára 1966.)

LITERATÚRA

[1] Фельдваум А. А.: Основы теории оптимальных автоматических систем. Физматгиз, Москва 1963.

[2] Pontrjagin L. S., Boltjanskij V. G., Gamkrelidze R. V., Miščenko E. F.: Matematická teorie optimálních procesů. SNTL, Praha 1964.

[3] Bertram J. E., Sarachik J. E.: On Optimal Computer Control. Proc. 1st Internat. Congress on Automatic Control, Butterworth Scientific Publications, London 1961, vol. 1, 419–422.

[4] Růžička J.: O bang-bang řízení lineárních systémů. Problémy kybernetiky. NČSAV, Praha 1965.

[5] Desoer C. A., Wing J.: The Multiple – Input Minimal Time Regulator Problem (General Theory). IEEE Transactions on Automatic Control *AC-8* (1963), 4, 125–136.

[6] Ceaglske N. H.: Dynamics and Control of a Buble-cap Absorption Column. Automatic an Remote Control, Proceedings of the first IFAC Congress. Moscow 1960, Butterworths, London 1961, Volume 4, 288–294.

Bang-Bang Control for Feedback Systems

B. FRANKOVIČ, R. KOŇAKOVSKÝ

The paper deals with questions of the optimum control of linear controlled systems by means of computing machines. Special attention is given to the optimization of the system's changeover from one state to another in minimum time.

There are introduced two computing methods generalized for an equation of the n-th order of the form:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}.$$

The first method is based upon the connection of solutions, the second upon the addition of solutions. Optimum switching moments are selected in both cases in a similar way by minimization of the auxiliary function.

Further an example is given for a system of the third order applying both methods with results and graphs.

Ing. B. Frankovič, CSc., Ing. R. Koňakovský, Ústav technickej kybernetiky SAV, Dúbravská cesta, Bratislava.