Petr Hájek

Problém obecného pojetí metody GUHA

Kybernetika, Vol. 4 (1968), No. 6, (505)--515

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/125459

KYBERNETIKA ČÍSLO 6, ROČNÍK 4/1968

Problém obecného pojetí metody GUHA

PETR HÁJEK

Práce navazuje na články [1], [2], [3], znalost těchto článků však není bezpodmínečně nutná k porozumění práce, kterou má čtenář v rukou. Práce sleduje dva cíle: 1. podat obecnou explikaci pojmů „experimentální materiál" a „hypotéza" prostředky matematické logiky v souvislosti se základním principem metody GUHA a 2. podat podrobný algoritmus jisté parciální realizace tohoto základního principu odlišné od realizací uvedených v citovaných článcích. Práce je určena matematikům; čtenáře — nematematiky, kteří mají zájem o aplikace metody a nikoli o matematické zdůvodnění, odkazuji na svůj článek [4], kde jsou hlavní ideje této práce informativně vyloženy.

Jak je uvedeno v pracích o metodě GUHA (viz např. [2], začátek a konec), je základním principem této metody požadavek získat z daného experimentálního materiálu prostředky matematické logiky, příp. matematické statistiky, a samočinných počítačů *všechny zajímavé hypotézy*. K tomu cíli je pochopitelně nejprve nutno nahradit intuitivní pojmy „experimentální materiál" a „hypotéza", jakož i pojem „verifikace hypotézy na základě experimentálního materiálu" přesnými matematicko-logickými pojmy. Autoři metody GUHA jsou si již delší dobu vědomi toho, že tyto pojmy je možno explikovat různými způsoby (viz opět [2]). Pojem "„experimentální materiál" byl dosud – a bude i v této práci – explikován pojmem *unárního sémantického modelu*, tj. konečné neprázdné množiny M, jejíž prvky nazýváme objekty, na níž je dáno n binárních funkcí (tj. funkcí zobrazujících množinu M do množiny $\{0, 1\}$). Protože je nepodstatné, co jsou prvky množiny M, je možno předpokládat, že to jsou přirozená čísla $1, 2, \ldots, m$; model pak lze ztotožnit s maticí nul a jedniček typu $m \times n$. Je-li na průsečíku i-tého řádku a j-tého sloupce 1, znamená to, že i-tý objekt má j-tou vlastnost. Obecněji je možno předpokládat, že funkce na M nejsou binární, ale reálné, pak odpovídají veličinám, např. tlak, teplota atd.; tímto zobecněním se však zde nebudu zabývat. (Jistým zobecněním tohoto druhu se v současné době zabývá M. Chytil.) Pojem hypotézy byl dosud explikován pojmem *formule* výrokového počtu vytvořené z n výrokových proměnných nebo ekvivalentně pojmem bezkvantifikátorové formule predikátového počtu vytvořené z jedné individuové proměnné a n unárních predikátů. Pro takové formule se definoval pojem pravdivosti a *skoropravdivosti* aj.; tím byla explikována verifikace. Zde předkládám obecnější přístup na základě jistého fragmentu logiky druhého řádu, který má být explikací jazyka výzkumného pracovníka, tj. jazyka, jímž výzkumný pracovník vyslovuje hypotézy o experimentálním materiálu. Tomu je věnována první část práce; ve druhé se omezuji na jistý speciální druh formulí sestrojeného jazyka a popisuji algoritmus pro automatickou verifikaci všech hypotéz tohoto druhu na samočinném počítači. Tento algoritmus není zobecněním algoritmů z [1], [2], [3], nýbrž prostě jinou možností. Algoritmus je prakticky vyzkoušen na programech, které vytvořil I. Havel; jedná se o program pro MINSK 22 a analogický program v jazyce FORTRAN pro IBM 7040.

Děkuji kolegům Havlovi a Chytilovi za cenné diskuse, které přispěly ke vzniku této práce. Obsah práce byl referován na semináři aplikací matematické logiky vedeném autorským kolektivem metody GUHA na katedře matematické logiky MFF KU; také členům tohoto semináře, zvláště Dr. Z. Rencovi vděčím za řadu diskusí. Za konzultace ze statistiky děkuji Dr. V. Malému a Dr. M. Jozífkovi.

I. FORMÁLNÍ JAZYK VÝZKUMNÉHO PRACOVNÍKA

Vyšetřujme modely typu $m \times n$ (o m objektech a n vlastnostech); jazyk, který popíšeme, bude v podstatě zobecnění Carnapova jazyka $\mathscr{L}^n_m$ (viz [5]); jisté symboly, které Carnap užívá, však vypustíme. Definujeme základní symboly našeho jazyka, formule prvního řádu (nazývané vlastnosti) a formule druhého řádu (nazývané hypotézy). Dále definujeme sémantické pojmy „i-tý objekt má vlastnost φ" a „hypotéza $\mathfrak{H}$ je verifikována modelem M". Zatímco sémantika formulí 1. řádu je dána jednou provždy (je-li dán model), je sémantika formulí 2. řádu dána teprve tehdy, je-li dána interpretace predikátů 2. řádu (viz níže).

Definice 1. *Symboly* jazyka $\mathscr{R}^n(k_1, \ldots, k_q)$ (kde $q \geqq 1$ je přirozené číslo, $k_1, \ldots$ $\ldots, k_q \geqq 1$ jsou přirozená čísla) jsou

(a) *predikáty* $P_1, \ldots, P_n$ 1. řádu,
(b) *predikáty* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_q$ 2. řádu,
(c) *logické spojky* &, $\vee$, $\neg$ (konjunkce, disjunkce, negace),
(d) *závorky* ( ).

Definice 2. (a) Každý predikát 1. řádu je *vlastnost* (nazývá se též *základní vlastnost*).

(b) Jsou-li $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ vlastnosti, pak $(\varphi_1 \& \ldots \& \varphi_h)$ je *vlastnost* a $(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_h)$ je *vlastnost*; je-li φ vlastnost, je $\neg \varphi$ *vlastnost*.

(c) Každá vlastnost vznikne ze základních vlastností konečným počtem aplikací pravidla (b).

(d) Vlastnosti, které nejsou základní, se nazývají *derivované.*

Definice 3. Buď dán model $M = \{u_{ij}\}_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}$ $(u_{ij} = 0$ nebo $1)$;

(a) i-tý objekt *má vlastnost* P_j, jestliže $u_{ij} = 1$,

(b) i-tý objekt *má vlastnost* $(\varphi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \varphi_h)$, jestliže má všechny vlastnosti $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$; *má vlastnost* $(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_h)$, jestliže má alespoň jednu z vlastností $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$; *má vlastnost* $\neg\varphi$ jestliže nemá vlastnost φ.

Definice 4. *Charakteristika* vlastnosti φ v modelu M je m-tice čísel $u_1, \ldots, u_m$ takových, že pro každé $i = 1, \ldots, m$ je $u_i = 1$, když i-tý objekt má vlastnost φ, jinak $u_i = 0$.

Poznámka. Tím je obvyklým způsobem definováno splňování formule 1. řádu. Na uvedených definicích je důležité, které formule jsme připustili jako „vlastnosti". Čtenář si jistě povšiml, že jsme neuvedli implikaci dvou formulí 1. řádu jako formuli 1. řádu, totéž pro ekvivalenci. Domnívám se totiž, že každý výzkumník uzná, že „mít současně vlastnosti $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$" resp. „mít alespoň jednu z vlastností $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$" resp. „nemít vlastnost φ" jsou jakési nové vlastnosti a bude vědět, za jakých podmínek objekt takové vlastnosti má, zatímco jen velmi těžko bude chápat implikaci dvou vlastností jako vlastnost a nebude dávat dobrý smysl formulaci „i-tý objekt má vlastnost $\varphi \rightarrow \psi$", ale až formulaci „implikace $\varphi \rightarrow \psi$ je pravdivá v modelu". Tuto druhou formulaci je však možno chápat jako vztah dvou formulí (vzhledem k modelu) a popsat tedy formulí 2. řádu – viz níže. Řečeno v terminologii obvyklého predikátového počtu 1. řádu, nedáváme žádný smysl formuli $P(x) \rightarrow Q(x)$ (vůbec tento nápis za formuli nepovažujeme), ale až formuli $(\forall x)\,(P(x) \rightarrow Q(x))$, kterou však lze např. psát $\mathfrak{Impl}\,(P, Q)$, kde $\mathfrak{Impl}$ je predikát 2. řádu.

Definice 5. (a) Buď $\mathfrak{B}_i$ predikát 2. řádu, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k_i}$ vlastnosti; pak $\mathfrak{B}_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k_i})$ je *hypotéza* (řekněme, *základní hypotéza*);

(b) Buďte $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_h$ hypotéza, pak $\mathfrak{H}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{H}_h$ a $\mathfrak{H}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{H}_h$ jsou hypotézy; je-li $\mathfrak{H}$ hypotéza, je $\neg\mathfrak{H}$ hypotéza.

(c) Každá hypotéza vznikne ze základních hypotéz konečným počtem aplikací pravidla (b).

(d) Hypotéza, které nejsou základní, se nazývají *derivované.*

Definice 6. *Interpretace* jazyka $\mathscr{R}^n(k_1, \ldots, k_q)$ je funkce přiřazující každému predikátu 2. řádu $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, \ldots, q)$ množinu modelů typu $m \times k_i$; o modelech z této množiny říkáme, že *verifikují* $\mathfrak{B}_i$.

Definice 7. (a) Buď $\mathfrak{B}_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k_i})$ základní hypotéza; buď dána interpretace jazyka $\mathscr{R}^n(k_1, \ldots, k_q)$. Model M (typu $m \times n$) verifikuje hypotézu $\mathfrak{B}_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k_i})$, jestliže model, jehož sloupce jsou charakteristiky vlastností $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$, verifikuje $\mathfrak{B}_i$.

(b) Buď $\mathfrak{H}$ hypotéza $\mathfrak{H}_1 \& \ldots \& \mathfrak{H}_h$; M verifikuje $\mathfrak{H}$, jestliže verifikuje všechny hypotézy $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_h$.

(c) Buď $\mathfrak{H}$ hypotéza $\mathfrak{H}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{H}_h$; M verifikuje $\mathfrak{H}$, jestliže verifikuje alespoň jednu z hypotéz $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_h$.

(d) M verifikuje hypotézu $\neg\mathfrak{H}$, jestliže neverifikuje $\mathfrak{H}$.

Příklady

(a) *Logické predikáty*

(1) *Pravdivost.* Model M verifikuje $\mathfrak{T}(\varphi)$ (čti „*φ je pravdivé*"), jestliže každý objekt v M splňuje φ. Tj. interpretace predikátu $\mathfrak{T}$ obsahuje jediný model typu $m \times 1$, skládající se ze samých jedniček.

(2) *Implikace.* M verifikuje $\mathfrak{Impl}(\varphi, \psi)$ (čti „*φ implikuje ψ*"), jestliže každý objekt splňující φ splňuje ψ. Tj. interpretace predikátu $\mathfrak{Impl}$ obsahuje všechny modely typu $m \times 2$ neobsahující žádný řádek 0 1. Místo $\mathfrak{Impl}(\varphi, \psi)$ píšeme též $\varphi \rightarrow \psi$.

(3) *Ekvivalence.* M verifikuje $\mathfrak{Eq}(\varphi, \psi)$ (čti „*φ je ekvivalentní ψ*"), jestliže každý objekt splňuje φ právě tehdy, když splňuje ψ. Tj. interpretace predikátu $\mathfrak{Eq}$ obsahuje všechny modely typu $m \times 2$ obsahující pouze řádky 0 0 a 1 1. Místo $\mathfrak{Eq}(\varphi, \psi)$ píšeme též $\varphi \equiv \psi$.

(4) *Disjunkce.* M verifikuje $\mathfrak{Disj}_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_j)$, jestliže každý objekt splňuje alespoň jednu z vlastností $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$. $\mathfrak{Disj}_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_j)$ čteme „*$\varphi_1, \ldots, \varphi_j$ tvoří pokrytí*". Interpretace obsahuje právě všechny modely typu $m \times j$ neobsahující řádek $0 \ldots 0$.

(b) *Predikáty logicko-statistické*

Zvolme pevné p, $0 < p < 100$.

(1) *Skoropravdivost.* M verifikuje $\mathfrak{T}_p(\varphi)$ (čti „φ je skoropravdivé"), jestliže alespoň $p\%$ objektů z M splňuje φ.

(2) *Skoroimplikace.* M verifikuje $\varphi \xrightarrow{\vee}_p \psi$, jestliže alespoň $p\%$ z objektů splňujících φ splňuje ψ. (Odpovídá pojmu relativní skoropravdivosti implikace z [2] a [3].)

Podobně by bylo možno definovat skoroekvivalenci a skoropokrývání.

Souvislost. Buď dáno číslo σ_0, $0 < \sigma_0 \leqq 1$. Nechť a objektů z M splňuje $\varphi \,\&\, \psi$, b splňuje $\varphi \,\&\, \neg\psi$, c splňuje $\neg\varphi \,\&\, \psi$, d splňuje $\neg\varphi \,\&\, \neg\psi$. Označme $r = a + b$, $s = c + d$, $k = a + c$, $l = b + d$ tj. $a + b + c + d = r + s = k + l = m$, viz tabulku T1.

Tab. T1.

	ψ	$\neg\psi$	
φ	a	b	r
$\neg\varphi$	c	d	s
	k	l	m

Definujeme: φ je vzhledem k M *relativně více v* ψ *než v* $\neg\psi$, jestliže $a/m > (k/m) \,.\, (r/m)$, tj. jestliže $a/r > k/m$, čili když frekvence $\varphi \,\&\, \psi$ je vyšší než frekvence očekávaná na základě frekvencí φ a ψ za předpokladu nezávislosti φ a ψ. Buď $\sigma(a, r, k, m)$ pravděpodobnost rozložení popsaného tabulkou T1 při známých r, k, m za předpokladu nezávislosti φ a ψ. (Zřejmě čísly a, r, k, m je určena celá tabulka.) Jednoduchým výpočtem dostáváme

$$\sigma(a, r, k, m) = \frac{\binom{k}{a}\binom{l}{b}}{\binom{m}{r}} = \frac{r!\, s!\, k!\, l!}{m!\, a!\, b!\, c!\, d!}\,.$$

Buď $\Delta(a, r, k, m) = \sum_{i=a}^{\min(k,r)} \sigma(i, r, k, m)$. To je pravděpodobnost, že frekvence vlastnosti $\varphi \,\&\, \psi$ bude nejméně a; maximálně může být $\min(r, k)$. φ je vzhledem k M *relativně signifikantně více v* ψ *než v* $\neg\psi$, jestliže $a/r > k/m$ a přitom $\Delta(a, r, k, m) \leqq \sigma_0$ (riziko je menší než σ_0). K této definici viz [6] odst. 12.16; jedná se o tzv. exaktní Fisherův test.

Konečně definujeme: M verifikuje $\mathfrak{Ass}(\varphi, \psi)$ (čti „φ *souvisí* s ψ"), jestliže φ je vzhledem k M relativně signifikatelně více v ψ než v $\neg\psi$. Místo $\mathfrak{Ass}(\varphi, \varphi)$ píšeme též $\varphi \sim_{\sigma_0} \psi$.

Podobně lze definovat predikát $\mathfrak{Corr}$ („φ koreluje s ψ") atd.

Příklady predikátů 2. řádu sub (a), (b) byly použity v článcích [1], [2], [3]. Predikátem $\mathfrak{Ass}$ se budeme zde zabývat v části II. Uvedené predikáty 2. řádu jsou definovány sémanticky, tj. je dána jejich interpretace. Naskýtá se dvojí problém: (1) definovat co možná nejvíce takovýchto predikátů 2. řádu, které odpovídají prakticky používaným nebo použitelným způsobům verifikace hypotéz; (2) budovat logiku takovýchto predikátů, tj. nacházet vztahy mezi nimi, platné pro všechny modely. Tyto problémy nejsou zdaleka řešeny a mohly by být velice zajímavé. Uvedeme několik příkladů k predikátům sub (2).

Definice 8. Hypotéza $\mathfrak{H}$ je *ekvivalentní* hypotéze $\mathfrak{H}'$, jestliže pro každý model platí, že verifikuje $\mathfrak{H}$ právě tehdy, když verifikuje $\mathfrak{H}'$. Značíme $\mathfrak{H} \Leftrightarrow \mathfrak{H}'$.

Věta 1. (1) $$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathfrak{T}(\neg \varphi \vee \psi)\,,$$

(2) $$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg \psi \to \neg \varphi)\,,$$

(3) $$(\varphi \equiv \psi) \Leftrightarrow (\psi \equiv \varphi)\,,$$

(4) $$(\varphi \equiv \psi) \Leftrightarrow (\neg \varphi \equiv \neg \psi)\,.$$

Důkazy odpovídají běžným matematicko-logickým důkazům a nebudou zde prováděny.

Věta 2. *Jestliže model M verifikuje* $\varphi \xrightarrow{V}_p \psi$, *pak verifikuje* $\mathfrak{T}_p(\neg \varphi \vee \psi)$.

Důkaz viz [2] nebo [3].

Věta 3. (1) $$(\varphi \sim_{\sigma_0} \psi) \Leftrightarrow (\psi \sim_{\sigma_0} \varphi)\,,$$

(2) $$(\varphi \sim_{\sigma_0} \psi) \Leftrightarrow (\neg \varphi \sim_{\sigma_0} \neg \psi)\,.$$

Důkaz. Označení viz tabulku T1.

(a) Je-li φ relativně více v ψ než v $\neg \psi$, je ψ relativně více ve φ než v $\neg \varphi$. Vskutku, $a/k > r/m$ plyne z $a/r > k/m$. Viz tabulku T2.

(b) $\sigma(a, r, k, m) = \sigma(a, k, r, m)$. Plyne evidentně dle tabulek T1, T2.

Tab. T2.

	φ	$\neg\varphi$	
ψ	a	c	k
$\neg\psi$	b	d	l
	r	s	m

(c) $\Delta(a, r, k, m) = \Delta(a, k, r, m)$, neboť $min\,(r, k) = min\,(k, r)$. Tedy (1) je dokázáno.

(d) Jestliže $a/r > k/m$, pak $d/s > l/m$ (srv. tabulku T3). Neboť následující nerovnosti jsou ekvivalentní:

$$d/s > l/m\,, \quad (m - r - k + a)/(m - r) > (m - k)/m\,,$$

$$m^2 - mr - mk + ma > m^2 - mk - mr + rk\,, \quad ma > rk\,, \quad a/r > k/m\,.$$

Tab. T3.

	$\neg\psi$	ψ	
$\neg\varphi$	d	c	s
φ	b	a	r
	l	k	m

(e) $\sigma(a, r, k, m) = \sigma(d, s, l, m)$ plyne z T1, T3;

(f) $\sigma(a + i, r, k, m) = \sigma(d + i, s, l, m)$.

Neboť čísla r, k, a s, l se vzájemně jednoznačně určují; při pevných r, s, k, l, m vypadá tabulka pro $a + i$ jak ukazuje T4.

Tab. T4.

	$a + i$	$b - i$	r
	$c - i$	$d + i$	s
	k	l	m

(g) $\min(r, k) = a$ právě tehdy, když $\min(s, l) = d$.

Vskutku, $a = \min(r, k)$ znamená buď $b = 0$, pak $d = l = \min(s, l)$, nebo $c = 0$, pak $d = s = \min(s, l)$. Podobně obráceně. Tedy $\Delta(a, r, k, m) = \Delta(d, s, l, m)$ a (2) je dokázáno.

Poznámka. Lze ukázat, že M může verifikovat $\varphi_1 \sim_{\sigma_0} \psi$ a též $\varphi_2 \sim_{\sigma_0} \psi$, ale nemusí verifikovat $(\varphi_1 \& \varphi_2) \sim_{\sigma_0} \psi$, podobně nemusí verifikovat $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \sim_{\sigma_0} \psi$.

II. ALGORITMUS ZALOŽENÝ NA PREDIKÁTU SOUVISLOSTI

Algoritmus zpracovává model M s m objekty a n vlastnostmi označenými $P_1, \ldots, P_{n-1}, Q$. Frekvence vlastnosti Q je k, předpokládáme $0 < k < m$. Vlastnost Q je *vytčená vlastnost*, $P_1, \ldots, P_n$ jsou *příznaky*. K je libovolná elementární konjunkce vytvořená z vlastností P. Frekvenci K označíme r, frekvenci konjunkce $K \& Q$ označíme a; ostatní frekvence označíme b, c, d, s, l, m dle tabulky T1. Čísla k, m jsou pro další úvahy pevná, pišme tedy

$$\sigma(a, r) = \frac{r!\, s!\, k!\, l!}{m!\, a!\, b!\, c!\, d!};$$

$$\Delta(a, r) = \sum_{i=a}^{\min(r,k)} \sigma(i, r).$$

Lemma 1. *Δ je klesající v a* (zřejmé).

Lemma 2. (a) $\sigma(a, r + 1) = \sigma(a, r) \cdot \dfrac{(r + 1)\, d}{s(b + 1)}$,

(b) $\sigma(a + 1, r + 1) = \sigma(a, r) \cdot \dfrac{(r + 1)\, c}{s(a + 1)}$,

$$(c) \quad \sigma(a + 1, r) = \sigma(a, r) \, . \, \frac{b \, . \, c}{(a + 1)(d + 1)}$$

pokud mají všechny výrazy smysl.

Důkaz. Ověří se triviálně z příslušných tabulek.

Lemma 3. *Jestliže* $a/(r + 1) > k/m$, *pak* $\sigma(a, r) < \sigma(a, r + 1)$. *Jestliže* $a/r > k/m$, *pak* $\sigma(a, r) > \sigma(a + 1, r + 1)$.

Důkaz. 1. Dokážeme $(r + 1) d > s(b + 1)$, čili $(r + 1)(m - k - r + a) > (r - a + 1)(m - r)$, čili $ma + a > kr + k$, k čemuž stačí $a/(r + 1) > k/m$.

2. Dokážeme $(r + 1) c < s(a + 1)$, tj. $(r + 1)(k - a) < (m - r)(a + 1)$, čili $rk + c < ma + s$, což plyne z $rk < ma$ vzhledem k zřejmému vztahu $c \leqq s$.

Věta 1. (1) *Jestliže* $a/(r + 1) > k/m$, *pak* $\Delta(a, r) < \Delta(a, r + 1)$.

(2) *Jestliže* $a/r > k/m$, *pak* $\Delta(a, r) > \Delta(a + 1, r + 1)$.

Důkaz. (1) Je-li $r + 1 \leqq k$, je $\Delta(a, r) = \sigma(a, r) + \ldots + \sigma(r, r)$, $\sigma(a, r + 1) = \sigma(a, r + 1) + \ldots + \sigma(r, r + 1) + \sigma(r + 1, r + 1)$. Každý z prvních r členů v druhém součtu je větší než příslušný člen z prvního součtu (a ještě je tam navíc jeden). Obdobně pro $r + 1 > k$, pak mají oba součty stejný počet členů.

(2) Je-li $r + 1 \leqq k$, je $\Delta(a + 1, r + 1) = \sigma(a + 1, r + 1) + \ldots + \sigma(r + 1, r+1)$, tj. oba součty mají týž počet členů a každý člen z $\Delta(a + 1, r + 1)$ je menší než příslušný člen z $\Delta(a, r)$. Je-li $r + 1 > k$, je dokonce v $\Delta(a + 1, r + 1)$ o poslední člen méně.

Definice 1.
$$r_{\min} = \min\,(r \leqq k; \Delta(r, r) \leqq \sigma_0)\,,$$
$$r_{\max} = \max\,(r \geqq k; \Delta(k, r) \leqq \sigma_0)\,.$$

Poznámka. Značme $(t)_n = t(t - 1) \ldots (t - n + 1)$; pak zřejmě $\Delta(r, r) = (k)_r/(m)_r$, pokud $r \leqq k$, $\Delta(k, r) = (r)_k/(m)_k$ pro $r \geqq k$. Tato čísla mají jako funkce r společné minimum pro $r = k$. Tj. je-li $(k)_k/(m)_k \leqq \sigma_0$, lze najít čísla $r_{\min}$ a $r_{\max}$; platnost poslední nerovnosti nadále předpokládáme.

Definice 2. $\boldsymbol{As}\,(a, r)$ značí, že libovolná vlastnost K o frekvenci r taková, že frekvence K & Q je a, souvisí s Q. (na hladině σ_0).

$A(r)$ pro $r_{\min} \leqq r \leqq {}_{\max}$ je nejmenší a takové, že $\boldsymbol{As}\,(a, r)$.

Věta 2. *Jestliže* $a + 1 \leqq \min\,(r, k)$ *a* $\boldsymbol{As}\,(a, r)$, pak $\boldsymbol{As}\,(a + 1, r)$.

Důkaz. $a/r > k/m$ implikuje $(a + 1)/r > k/m$; dle věty 1 jest $\Delta(a + 1, r) < \Delta(a, r) \leqq \sigma_0$.

Věta 3. *Je-li* $r_{min} \leqq r, r + 1 \leqq r_{max}$, *je buď* $A(r + 1) = A(r)$ *nebo* $A(r + 1) = A(r) + 1$.

Důkaz. Buď $A(r) = a$, ukážeme: 1. není $\boldsymbol{As}(a - 1, r + 1)$, tj. $A(r + 1) \geqq A(r)$, 2. je $\boldsymbol{As}(a + 1, r + 1)$, tj. $A(r + 1) \leqq A(r) + 1$.

Ad 1. Zřejmě není $As(s - 1, r)$, tj. buďto $(a - 1)/r \leqq k/m$ a pak ovšem $(a - 1) : (r + 1) \leqq k/m$, tj. není $\boldsymbol{As}(a - 1, r + 1)$, nebo $\Delta(a - 1, r) > \sigma_0$, pak buďto $(a - 1)/r + 1 \leqq k/m$ nebo lze užít větu 1 a jest $\Delta(a - 1, r + 1) > \sigma_0$ tj. jistě není $\boldsymbol{As}(a - 1, r + 1)$.

Ad 2. Jest $a/r > k/m$, tj. $(a + 1)/(r + 1) > k/m$, tedy z věty 1 plyne $\Delta(a + 1, r + 1) \leqq \sigma_0$ a tedy $\boldsymbol{As}(a + 1, r + 1)$.

Lemma 4. $A(r_{min}) = r_{min}$.

Důkaz. Je-li $\Delta(r, r) > \sigma_0$, je dle věty 1 $\Delta(r, r + 1) > \Delta(r, r) > \sigma_0$ pokud $r/(r + 1) > k/m$; pokud tomu tak není, stejně není $\boldsymbol{As}(r, r + 1)$. Tedy je-li r minimální takové, že $\boldsymbol{As}(r, r)$, pak není $\boldsymbol{As}(r - 1, r)$.

Lemma 5. $A(r_{min}) = k$.

Důkaz. Nechť $A(r) < k$; z $\boldsymbol{As}(A(r), r)$ plyne dle věty 1 $\boldsymbol{As}(A(r) + 1, r + 1)$, tj. je-li $A(r) < k$, je $r < r_{max}$.

Funkce $A(r)$ je tedy neklesající na svém definičním oboru roste-li pro nějaké r, roste o jedničku. To dává tento plán pro strojový program:

I. *Příprava*: zjisti m, k, r_{min}, r_{max}, $A(r)$ pro r z příslušného intervalu (funkci $A(r)$ nazývejme „tabulka").

II. *WORK*: postupně generuj konjunkce jednočlenné, dvojčlenné, trojčlenné atd., zjisti od každé hodnoty a, r, nahlédni do „tabulky", zda souvisí s Q. Jestliže ne, přejdi k další konjunkci; jestliže ano, dále zpracovávej.

Definice 3. Konjunkce je *prostá* v M, není-li v M implikována žádnou svou podkonjunkcí.

Evidentně, jestliže K_0 je vlastní podkonjunkce K a M verifikuje $K_0 \to K$, pak M verifikuje $K_0 \equiv K$ a tedy $K \sim A$ právě tehdy, když $K_0 \sim Q$ na téže hladině signifikance; tedy K pro nás nemá cenu. Požadujeme tedy na výstupu počítače jen prosté konjunkce modelu M takové, že M verifikuje $K \sim Q$. U každé takové konjunkce požadujeme kromě údajů o frekvencích a, r a hodnoty $\Delta(a, r)$ ještě seznam všech P_i nevystupujících v K takových, že M verifikuje $K \to P_i$.

Při práci počítače jsou možné některé optimalizace podobně jako v projektech článků [1], [2], [3].

1. Je-li frekvence konjunkce K (tj. číslo r) menší než r_{min}, lze hledat nejmenší jádro K_0 (škrtáním členů konjunkce K počínaje od nejpravějšího) takové, že frekvence K_0

je ještě stále menší než $r_{\min}$; pak lze přeskočit při vyšetřování sérii konjunkcí, které obsahují K_0 jako část, podobně jako v [1] str. 42.

2. Jestliže M verifikuje $K \sim Q$, ale K není prostá, lze hledat nejmenší jádro K_0 (škrtáním členů konjunkce K počínaje od nejpravějšího) takové, že K_0 je neprostá konjunkce; pak lze přeskočit sérii konjunkcí, které obsahují K_0 jako část podobně jako v [1] str. 42. Neboť zřejmě každá konjunkce obsahující neprostou podkonjunkci je neprostá.

(Došlo dne 22. dubna 1968.)

LITERATURA

[1] P. Hájek, I. Havel, M. Chytil: GUHA — metoda systematického vyhledávání hypotéz. Kybernetika *2* (1966), 1, 31—47.

[2] P. Hájek, I. Havel, M. Chytil: GUHA — metoda systematického vyhledávání hypotéz II. Kybernetika *3* (1967), 5, 430—437.

[3] P. Hájek, I. Havel, M. Chytil: The GUHA method of automatic hypotheses determination. Computing *1* (1966), 4, 293—308.

[4] P. Hájek: O metodě GUHA automatického vyhledávání hypotéz. Československá fyziologie (v tisku).

[5] R. Carnap: The Continuum of Inductive Methods. The University of Chicago Press.

[6] M. G. Kendall: The Advanced Theory of Statistics, Vol. I. London 19554.

SUMMARY

The Problem of a General Conception of the GUHA Method

PETR HÁJEK

The main principle of the GUHA method can be stated as the aim to obtain automatically all the interesting hypotheses verifiable on the basis of some experimental material. The means of mathematical logic, mathematical statistics and computers are used. For the purpose of possible generalizations of the algorithm described in [3], a new formal language (an appropriate fragment of the predicate calculus of second order) is constructed as an explicans for the language in which the research worker formulates his hypotheses. Formulae of the first and second order are defined; the former ones are called properties, the latter ones are called hypotheses. Semantical notions „the i-th object possesses the property φ“ and „the model M verifies the hypothesis $\mathfrak{H}$“ are defined; practical examples of useful predicates of second order (divided into logical, logico-statistical and statistical ones) are given. E. g. semantical interpretation of the predicate $\mathfrak{Ass}$ ($\mathfrak{Ass}(\varphi, \psi)$ means „φ is associated with ψ“)

is defined on the basis of the statistical exact Fisher's test. In the second part of the present paper, a particular algorithm dealing with the predicate $\mathfrak{Ass}$ is described. Suppose, we have a model with n basic properties $P_1, \ldots, P_{n-1}, Q$; Q is called the *preferred porperty*, P's are *symptoms*. The algorithm looks for all elementary conjunctions K formed from the P's such that the given model verifies the hypothesis „K is associated with Q". Several optimalizations for a real programme are described. (There exist programmes for the computers MINSK 22 and IBM 7040 writen by I. Havel realizing the algorithm described here.)

Dr. Petr Hájek, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.