

Pane Vidinčev

Identifikace lineárních soustav s násobnými póly

*Kybernetika*, Vol. 1 (1965), No. 1, (37)--46

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/124847>

## Terms of use:

© Institute of Information Theory and Automation AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these

*Terms of use.*



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*  
<http://project.dml.cz>

## Identifikace lineárních soustav s násobnými póly

PANE VIDINČEV

Článek pojednává o zjišťování dynamických vlastností lineárních spojitých soustav s násobnými (obecně komplexními) póly. Uvažuje se zde také vliv šumu, který zkresluje výstupní signál. V článku je také zmínka o způsobu řešení soustav lineárních rovnic typu (20) nebo (30).

Metodika a pojetí problematiky identifikace lineárních soustav je v práci [2] založena na předpokladu, že vyšetřovaná soustava má jednoduché póly. Z této práce není zřejmé, jak celá záležitost vypadá, když toto omezení není splněno, tj. když obecně každý pól analyzované soustavy je nějaké násobnosti.

Bude-li znám postup jak zjišťovat dynamiku lineárních soustav s násobnými póly, bude také zřejmé, jak postupovat, když tyto póly jsou jednoduché, neboť to bude speciální případ je-li násobnost všech pólů stejná a rovná jedné.

V této práci předpokládáme, že přenos  $K(p)$  vyšetřované lineární soustavy se soustředěnými konstantními parametry má obecně komplexní póly  $b_1, b_2, \dots, b_\mu$  postupně s násobnostmi  $N_1, N_2, \dots, N_\mu$ . Obecně potom bude

$$(1) \quad K(p) = \frac{\sum_{n=0}^{\bar{m}} B_n p^n}{\prod_{v=1}^{\mu} (p + b_v)^{N_v}} = \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} \frac{A_{vj}}{(p + b_v)^{N_v+1-j}},$$

kde  $b_v$  a  $A_{vj}$  jsou obecně komplexní čísla;

$$(2) \quad \operatorname{Re} b_v > 0, \quad v = 1, 2, \dots, \mu$$

a kde dále

$$(3) \quad m = \sum_{v=1}^{\mu} N_v \geq \bar{m} + 1$$

je řád vyšetřované lineární soustavy,  $m < \infty$ .

Úkolem je určit číslo  $m$  a komplexní čísla  $b_v$  a  $A_{vj}$ .

Vycházíme z předpokladu, že počáteční podmínky jsou nulové a že vstupní signál  $y(t)$  vyšetřované soustavy je skok velikosti  $C$ , tedy  $y(t) = C$ . Symbolem  $x(t)$  označíme výstupní signál soustavy. Z toho, co bylo uvedeno plyne, že

$$(4) \quad X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{C}{p} \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} \frac{A_{vj}}{(p+b_v)^{N_v+1-j}}.$$

Platí však

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p+b_v)^{N_v+1-j}} \right\} = \frac{1}{b_v^{N_v+1-j}} \left( 1 - e^{-b_v t} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{t^k b_v^k}{k!} \right),$$

takže potom bude

$$(5) \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\} = C \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} \frac{A_{vj}}{b_v^{N_v+1-j}} \left( 1 - e^{-b_v t} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{t^k b_v^k}{k!} \right).$$

Uvážíme-li, že platí vztah (2) (že tedy jde o stabilní soustavu), dostaneme z výrazu (5)

$$(6) \quad x(\infty) = C \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} \frac{A_{vj}}{b_v^{N_v+1-j}}.$$

Ustálenou hodnotu  $x(\infty)$  můžeme z grafu odezvy  $x(t)$  vždy odečíst. Pro usnadnění další práce posuňme počátek souřadnic vztahem  $\bar{x}(t) = x(\infty) - x(t)$ . Podle výrazu (5) a (6) tedy bude

$$(7) \quad \bar{x}(t) = C \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} C_{vj} e^{-b_v t} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{t^k b_v^k}{k!},$$

kde jsme pro jednoduchost zápisu zavedli

$$(8) \quad C_{vj} = \frac{A_{vj}}{b_v^{N_v+1-j}}, \quad v = 1, 2, \dots, \mu; \quad j = 1, 2, \dots, N_v.$$

Úkol, který jsme si postavili – určení čísla  $m$ , komplexních čísel  $b_v$  a  $A_{vj}$  – budeme řešit na začátku této práce takto: vyjdeme z předpokladu, že 1. levá strana (7) je přesně známá a 2. je znám řád  $m$  soustavy.

V dalších částech této práce ukážeme (na základě závěrů první části), jak postupovat, když tyto dva předpoklady nejsou splněny, tj. když levá strana vztahu (7) obsahuje šum a když neznáme číslo  $m$ , které je třeba určit.

Zavedme si

$$(9) \quad t = \alpha h, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots,$$

kde  $h$  je velikost korku dělení na ose  $t$ .

V lineární kombinaci

$$(10) \quad L_1(D_s) = \sum_{s=0}^m D_s \bar{x}(\alpha h + s h)$$

hledíme neznámé  $D_s$ , tak, aby byla splněna podmínka

$$(11) \quad L_1(D_s) = 0.$$

Napřed najdeme postačující podmínku k tomu, aby byla splněna rovnost (11). Dosazením do výrazu (10) za  $\bar{x}(zh + sh)$  ze vztahu (7) dostaneme

$$(12) \quad \begin{aligned} L_1(D_s) &= C \sum_{s=0}^m D_s \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} C_{vj} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{b_v^k}{k!} (\alpha h + sh)^k e^{-b_v(\alpha h + sh)} = \\ &= C \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} C_{vj} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{b_v^k}{k!} \sum_{s=0}^m D_s (\alpha h + sh)^k e^{-b_v(\alpha h + sh)}. \end{aligned}$$

Uvědomíme-li si, že

$$(13) \quad (\alpha h + sh)^k e^{-b_v(\alpha h + sh)} = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial b_v^k} e^{-b_v(\alpha h + sh)},$$

nabude potom vztah (12) tento tvar:

$$(14) \quad L_1(D_s) = C \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} C_{vj} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{b_v^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial b_v^k} e^{-zhb_v} \sum_{s=0}^m D_s e^{-shb_v}.$$

Z výrazu (14) plyne, že k tomu, aby byla splněna podmínka (11), stačí, aby

$$(15) \quad \sum_{s=0}^m D_s e^{-shb_v} = 0, \quad v = 1, 2, \dots, \mu.$$

Označme si

$$(16) \quad e^{-hb_v} = z_v, \quad v = 1, 2, \dots, \mu.$$

Pro  $D_0 = 1$  dostaneme z výrazu (15), dosadíme-li do něj výraz (16), tuto soustavu rovnic

$$(17) \quad 1 + \sum_{s=1}^m D_s z_v^s = 0, \quad v = 1, 2, \dots, \mu.$$

Soustavě rovnic (17) vyhovuje řešení rovnice

$$(18) \quad 1 + \sum_{s=1}^m D_s z^s = 0,$$

která má  $m$  kořenů

$$(19) \quad z = z_n, \quad n = 1, 2, \dots, m,$$

z nichž podle předpokladu jen  $\mu$  je navzájem různých.



nabude soustava rovnic (22) tohoto tvaru

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \bar{x}(t_\beta) &= C \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} \operatorname{Re} C_{vj} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{t_\beta^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t_\beta^k} e^{-t_\beta \operatorname{Re} b_v} \cdot \cos t_\beta \operatorname{Im} b_v + \\
 &+ C \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} \operatorname{Im} C_{vj} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{t_\beta^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t_\beta^k} e^{-t_\beta \operatorname{Re} b_v} \cdot \sin t_\beta \operatorname{Im} b_v, \\
 0 &= \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} \operatorname{Im} C_{vj} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{t_\beta^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t_\beta^k} e^{-t_\beta \operatorname{Re} b_v} \cdot \cos t_\beta \operatorname{Im} b_v - \\
 &- \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} \operatorname{Re} C_{vj} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{t_\beta^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t_\beta^k} e^{-t_\beta \operatorname{Re} b_v} \cdot \sin t_\beta \operatorname{Im} b_v,
 \end{aligned}$$

přítom v soustavě rovnic (23) je  $\beta = 1, 2, \dots, m$ .

### PŘÍTOMNOST ŠUMU

Při praktické analýze dynamiky soustav není splněn ani jeden ze dvou předpokladů, na jejichž platnosti byl vybudován tento teoretický model.

V praxi tedy předem neznáme ani řád  $m$  soustavy, kterou vyšetřujeme, ani přesné hodnoty levé strany vztahu (7). Napřed si všimneme poslední skutečnosti a nakonec se vrátíme k problematice určení řádu  $m$ .

V praxi ve skutečnosti nepracujeme s přesným výstupním signálem  $x(t)$ , ale se signálem

$$\xi(t) = x(t) + \delta(t),$$

tedy také se signálem

$$(24) \quad \xi(t) = \bar{x}(t) + \bar{\delta}(t),$$

kde  $\delta(t)$  je chybová funkce, šum. O funkci  $\bar{\delta}(t)$  předpokládáme, že její funkční hodnoty v bodech vzájemně dostatečně vzdálených jsou navzájem nezávislé, že dále střední hodnota funkce  $\bar{\delta}(t)$  v dostatečně dlouhém intervalu konverguje k nule. Má-li funkce  $\bar{\delta}(t)$  tyto vlastnosti (při měření bez poruch a bez systematických chyb jsou splněny tyto vlastnosti), je možno ukázat způsob, jak určit dynamiku soustav.

Rozdělme si základní interval  $h$  na  $B$  stejných podintervalů. V každém bodě takto provedeného dělení najdeme funkční hodnotu a hledejme, čemu se rovná střední hodnota těchto funkčních hodnot. Označme tuto střední hodnotu symbolem  $\bar{\xi}(\alpha h)$ . Bude tedy

$$(25) \quad \bar{\xi}(\alpha h) = \frac{1}{B} \sum_{\gamma=0}^{B-1} \bar{\xi} \left( \alpha h + \frac{\gamma}{B} h \right), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots$$

Protože budeme mít dán průběh  $\bar{\xi}(t)$ , operaci (25) můžeme vždy provést, tj. připravit si střední hodnoty  $\bar{\xi}(0)$ ,  $\bar{\xi}(h)$ ,  $\bar{\xi}(2h)$ , ... na úsecích o velikosti  $h$ .



Postup při určování komplexních čísel  $b_v$  ( $v = 1, 2, \dots, \mu$ ) v případě přítomnosti šumu je tedy následující: ze soustavy rovnic (30) se určí čísla  $D_1, D_2, \dots, D_m$ . Tato čísla se dosadí do vztahu (18), ze kterého se řešením určí kořeny (19). Těchto kořenů je jen  $\mu$  různých, tedy  $z_v$  ( $v = 1, 2, \dots, \mu$ ). Ze vztahu (16) se pak určí neznámé  $b_v$  ( $v = 1, 2, \dots, \mu$ ).

K určení neznámých  $A_{vj}$  v případě přítomnosti šumu je třeba výraz (25) poněkud upravit; především je

$$(32) \quad \hat{\xi}(\alpha h) = \frac{C}{B} \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} C_{vj} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{b_v^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial b_v^k} e^{-\alpha h b_v} \sum_{\gamma=0}^{B-1} e^{-(\gamma h/B) b_v}.$$

Platí ovšem

$$(33) \quad \sum_{\gamma=0}^{B-1} e^{-(\gamma h/B) b_v} = \frac{1 - e^{-h b_v}}{1 - e^{-(h/B) b_v}} = f(b_v),$$

$$(34) \quad \frac{\partial^k}{\partial b_v^k} f(b_v) e^{-\alpha h b_v} = e^{-\alpha h b_v} \left( \frac{\partial}{\partial b_v} - \alpha h \right)^k f(b_v)$$

(vztah (34) je možno dokázat úplnou indukcí), takže potom bude

$$(35) \quad \hat{\xi}(\alpha h) = \frac{C}{B} \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} C_{vj} e^{-\alpha h b_v} \sum_{k=0}^{N_v-j} (-1)^k \frac{b_v^k}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial b_v} - \alpha h \right)^k f(b_v).$$

Ze soustavy rovnic

$$\hat{\xi}(\alpha h) = \frac{C}{B} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} C_{vj} e^{-\alpha h b_v} \sum_{k=0}^{N_v-j} (-1)^k \frac{b_v^k}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial b_v} - \alpha h \right)^k f(b_v) \right\},$$

$$\alpha = 0, 1, 2, \dots, (m-1),$$

$$0 = \operatorname{Im} \left\{ \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} C_{vj} e^{-\alpha h b_v} \sum_{k=0}^{N_v-j} (-1)^k \frac{b_v^k}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial b_v} - \alpha h \right)^k f(b_v) \right\}$$

určíme neznámé  $C_{vj}$  a pak podle vztahu (8) určíme komplexní čísla  $A_{vj}$ .

Je ovšem možné při určování  $A_{vj}$  užít rovněž metody nejmenších čtverců, tj. zvolit si na ose času libovolnou posloupnost

$$t_1, t_2, \dots, t_M, \quad M > m,$$

které přísluší posloupnost funkčních hodnot

$$\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_M),$$

a požadovat, aby funkce

$$F(\operatorname{Re} A_{vj}, \operatorname{Im} A_{vj}) = \sum_{\beta=1}^M \delta^2(t_\beta)$$

měla minimum. Touto variantou se zde nebudeme zabývat.



- 44 Na závěr této části poznamenáváme, že místo středních hodnot  $\xi(zh)$  daných výrazem (25) je možno při určování komplexních čísel  $b$ , použít integrálů

$$\xi(\alpha h) = \int_{\alpha h}^{h+\alpha h} \xi(t) dt, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, (2m-1),$$

jejichž hodnoty určíme planimetrováním.

#### URČENÍ ŘÁDU VYŠETŘOVANÉ SOUSTAVY

V tom případě, kdy je znám řád analyzované soustavy, platí soustava rovnic (20) resp. (30), tudíž také vztah (18). Určíme-li ze soustavy rovnic (20) neznámé  $D_1, D_2, \dots, D_m$  a dosadíme-li je do kterékoli následující rovnice, platí

$$(36) \quad \bar{x}(\alpha h + mh + \varrho h) + \sum_{s=1}^m D_s \bar{x}(\alpha h + mh + sh + \varrho h) = 0, \quad \varrho = 0, 1, 2, \dots,$$

nebo v případě soustavy rovnic (30)

$$(37) \quad \xi(\alpha h + mh + \varrho h) + \sum_{s=1}^m D_s \xi(\alpha h + mh + sh + \varrho h) = 0, \quad \varrho = 0, 1, 2, \dots$$

Platnost vztahu (36) resp. (37) plyne z platnosti vztahu (18); skutečně, je např.

$$\begin{aligned} & \bar{x}(\alpha h + mh + \varrho h) + \sum_{s=1}^m D_s \bar{x}(\alpha h + mh + sh + \varrho h) = \\ & = C \left\{ \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} C_{vj} e^{-b_v(\alpha h + mh + \varrho h)} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{(\alpha h + mh + \varrho h)^k}{k!} b_v^k + \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^m D_s \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} C_{vj} e^{-b_v(\alpha h + mh + sh + \varrho h)} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{(\alpha h + mh + \varrho h + sh)^k}{k!} b_v^k \right\} = \\ & = C \left\{ \sum_{v=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{N_v} C_{vj} \sum_{k=0}^{N_v-j} \frac{b_v^k}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial b_v^k} e^{-b_v(\alpha h + mh + \varrho h)} \left[ 1 + \sum_{s=1}^m D_s e^{-sh b_v} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Ovšem výraz v hranaté závorce v posledním vztahu není nic jiného než výraz (18).

Podobně se dokáže i vztah (37).

Skutečností, že platí vztah (36), resp. (37), využijeme k určení řádu analyzované lineární soustavy. Při řešení soustavy lineárních rovnic (20) resp. (30) dostaneme hodnoty neznámých  $D_1, D_2, \dots, D_m$  s chybami, takže, když tato řešení dosadíme zpět do soustavy rovnic (20) resp. (30), nedostaneme na pravé straně nulu, ale určitou množinu čísel blízkých nule. Z toho ovšem plyne, že totéž nastane, když čísla  $D_1, D_2, \dots, D_m$  dosadíme do výrazu (36) v případě soustavy rovnic (20), resp. do výrazu (37) v případě soustavy rovnic (30) – to znamená, že nedostaneme přesně

nulu, ale určité číslo, které je blízké nule. Bude tedy ve skutečnosti

$$(38) \quad \bar{x}(zh + mh + \varrho h) + \sum_{s=1}^m D_s \bar{x}(zh + mh + sh + \varrho h) = \hat{r}_m, \quad \varrho = 0, 1, 2, \dots$$

po případě při řešení soustavy lineárních rovnic (30) bude

$$(39) \quad \hat{\xi}(zh + mh + \varrho h) + \sum_{s=1}^m D_s \hat{\xi}(zh + mh + sh + \varrho h) = r_m, \quad \varrho = 0, 1, 2, \dots$$

Právě to  $m$ , pro něž bude

$$(40) \quad \min |r_m|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

po případě

$$(41) \quad \min |\hat{r}_m|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

budeme považovat za řád analyzované soustavy. Toto číslo  $m$  nemusí být přesný řád vyšetřované soustavy; jde prostě o prakticky nejučelnější řád, který dává aproximační matematický model.

Na závěr je třeba upozornit na jednu závažnou skutečnost; při řešení soustavy rovnic (20) resp. (30) nějakou iterační metodou obvykle vznikají potíže numerického charakteru — konvergence k správnému řešení může být velmi pomalá. Příčina spočívá v jedné zvláštnosti, která je charakteristická pro soustavy rovnic typu (20) nebo (30). Označme symbolem  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) vektor, jehož komponenty jsou prvky  $j$ -tého řádku matice soustavy rovnic (20) nebo (30). Úhel mezi libovolnými dvěma takto definovanými vektory může být velmi malý, což má za následek špatnou řešitelnost takových soustav iteračními metodami. (Kosinus úhlu mezi dvěma vektory zde chápeme jako poměr skalárního součinu těchto dvou vektorů k součinu jejich norem.)

Tuto potíž, tj. že vektory mohou být skoro kolineární, je možno odstranit tím, že se daná matice soustavy (20) nebo (30) ortogonalizuje.

Je třeba také podotknout, že v rovnicích (20) a (30) je nutno položit  $\alpha = 0$ , jinak obecně můžeme ztratit informaci o charakteru přechodové charakteristiky v okolí počátku.

(Došlo dne 10. března 1964.)

#### LITERATURA

- [1] Smirnov V. I.: Kurs vyšší matematiky, Tom III, část 1. Moskva 1956.  
 [2] Vidinčev P.: Identifikace lineárních spojitéch soustav. Automatizace (1963), č. 7.

## Investigation of Linear Systems with Lumped Parameters

PANE VIDINČEV

Essential presupposition of the control systems synthesis is the knowledge of dynamic properties of the controlled plant. They are these properties, which are taken into consideration when computing the transfer function of the correcting element to fulfil the chosen criterion depending upon the plant.

This paper deals with the determination of dynamic properties of linear systems with constant lumped parameters. The dynamic properties can be fully described by the transfer function (1). The problem consists in determining the numbers (generally complex)  $b$ , and  $A_{vj}$  and the order (3), provided some characteristic of the investigated plant is given. For the purposes of this paper the step response of the investigated plant is supposed to be known and is used for the computing of original controlled plant transfer function (1). The method given takes also into consideration the noise, which distorts the controlled plant output signal.

*Inž. Pane Vidinčev, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vršehradská 49, Praha 2.*