Vil'yam V. Kazakevich; Ivan A. Mochalov

Последовательные алгоритмы оптимизации

Kybernetika, Vol. 17 (1981), No. 2, 140--146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124764

KYBERNETIKA — ТОМ 17 (1981), ВЫПУСК 2

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ВИЛЬЯМ В. КАЗАКЕВИЧ, ИВАН А. МОЧАЛОВ

Синтезируются адаптивные алгоритмы поиска экстремума инерционного объекта с последовательным накоплением. Для уменьшения инерционности применяется ускоренный метод прогнозирования установившегося значения выхода. Анализируется сравнительная эффективность разработанных алгоритмов.

ВВЕДЕНИЕ

Точность работы импульсного экстремального регулятора (ИЭР) зависит от уровня помех в канале измерения выхода объекта. Эффективным способом борьбы с ними при экстремальном регулировании инерционного объекта является применение метода накопления измерений его выхода за время протекания переходного процесса с последующей обработкой их по методу наименьших квадратов, предложенным Казакевичем [1]. Большой интерес представляет применение последовательного анализа, разработанного Вальдом [2], для фильтрации помех, так как заданная вероятность правильного решения о направлении поискового смещения достигается с наименьшим в среднем числе измерений.

В настоящей работе исследуются последовательные алгоритмы с прогнозированием по методу наименьших квадратов (МНК) установившегося значения выхода инерционного объекта оптимизации и анализируется их сравнительная эффективность.

СИНТЕЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

Пусть объект можно представить в виде эквивалентной нелинейной части со статической характеристикой

$$y^* = f(x)$$

и эквивалентной линейной части, описываемой дифференциальным уравнением

$$T\dot{y}_{\text{ист}} + y_{\text{ист}} = f(x)\,,$$

где $y_{\text{ист}}$ – истинное значение выходной величины (выход); x – входная величина (вход) объекта регулирования; T – постоянная времени объекта, которая предполагается известной величиной. Относительно помехи $\varphi(t)$, действующей на выходе, предполагается, что она является аддитивным стационарным случайным процессом с математическим ожиданием

$$\mathsf{E}\{\varphi(t)\} = 0$$

и известной дисперсией

$$\mathsf{D}\{\varphi(t)\} = \sigma^2 < \infty\,.$$

Будем рассматривать импульсный способ регулирования с разнесением во времени рабочими Δx_i и пробными $\varDelta$ поисковыми смещениями; здесь

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,; \quad |\Delta x_i| = \text{const}\,, \quad \varDelta = \text{const}\,; \quad i = 1, 2, \ldots, K\,.$$

Рассмотрим промежуток времени $[t_{00}, t_{01}]$ – (нулевой такт нулевого цикла работы ИЭР),

$$t_{01} = t_{00} + (2n - 1)\,\tau\,,$$

где $\tau > \tau_k$ – время корреляции помехи. Если состояние объекта в момент

$$t = t_{00} = 0$$

характеризовалось величинами x_0, $y_0 \neq f(x_0)$ и в этот момент было произведено нулевое мгновенное пробное поисковое смещение $\varDelta$, то с учетом $\varphi(t)$ при $t \geqq 0$ динамика объекта описывается уравнением

$$\mathsf{E}\{y_{00}/\bar{t}_{00}\} = f_0(x_0) - a_{00}\exp\left(-\bar{t}_{00}/T\right),$$

где $\bar{t}_{00} = t - t_{00}$; $\mathsf{E}\{y_{00}/\bar{t}_{00}\}$ – условное математическое ожидание отклика

$$y_{00}(t) = y_{00\,\text{ист}}(t) + \varphi(t)\,;$$

$$a_{00} = f_0(x_0) - y_0\,.$$

Если в момент t_{01} произвести первое пробное смещение

$$\varDelta - 2\varDelta = -\varDelta\,,$$

то в промежутке времени $[t_{01}, t_{02}]$ – (первый такт нулевого цикла работы ИЭР) с учетом $\varphi(t)$ на выходе появится отклик $\mathsf{E}\{y_{01}/\bar{t}_{01}\}$, где $\bar{t}_{01} = t - t_{01}$ и т.д. Рассмотрим промежуток времени $[t_{0j}, t_{0j+1}]$ – (j-й такт нулевого цикла),

$$t_{0j+1} = t_{0j} + (2n - 1)\,\tau\,.$$

Если в момент t_{0j} было произведено j-е пробное поисковое смещение

$$x_0 + (-1)^j \Delta ,$$

то с учетом $\varphi(t)$ на выходе появится j-й отклик

$$\mathsf{E}\{y_{0j}/\bar{t}_{0j}\} = f_0[x_0 + (-1)^j \Delta] - a_{0j} \exp(-\bar{t}_{0j}/T) , \tag{1}$$

где

$$j = 1, 2, \ldots, m ; \quad \bar{t}_{0j} = t - t_{0j} ;$$

$$a_{0j} = f_0[x_0 + (-1)^j \Delta)] - y^*_{0j-1} ;$$

y^*_{0j-1} — значение отклика

$$\mathsf{E}\{y_{0j-1}/\bar{t}_{0j-1}\} \quad \text{в момент времени} \quad \bar{t}_{0j-1} = (2n - 1)\,\tau .$$

Если в j-м такте нулевого цикла в моменты времени

$$\bar{t}_{0j} = 0,\ \bar{t}_{0j} = \tau, \ldots, \bar{t}_{0j} = (2n - 1)\,\tau$$

произвести $n > 2$ измерений отклика y_{0j}, то с помощью МНК можно найти две оценки

$$\hat{f}_0^{1,2}[x_0 + (-1)^j \Delta] = \hat{f}_{0j}^{1,2}$$

неизвестного параметра

$$f_0[x_0 + (-1)^j \Delta]$$

уравнения регрессии (1). Так как при $n > 2$ определитель информационной матрицы Фишера строго больше нуля, то получим соответствующие пропорциональные величины

$$\bar{f}_{0j}^{1,2} = d \,.\, \hat{f}_{0j}^{1,2} .$$

Таким образом, на каждое пробное поисковое смещение входа по результатам измерений соответствующих откликов по МНК определяются величины

$$\bar{f}_{01}^{1,2}, \bar{f}_{02}^{1,2}, \ldots, \bar{f}_{0j}^{1,2}, \ldots, \bar{f}_{0m}^{1,2} .$$

Здесь $\bar{f}_{0j}^1$ получена по четным замерам, а $\bar{f}_{0j}^2$ по нечетным.

Рассмотрим случайную величину W_{0j}

$$W_{0j} = \begin{cases} 1 , & \text{если} \quad (-1)^{j+1} (\bar{f}_{0j}^2 - \bar{f}_{0j+1}^1) > 0 , \\ 0 , & \text{если} \quad (-1)^{j+1} (\bar{f}_{0j}^2 - \bar{f}_{0j+1}^1) \leqq 0 , \quad j = 1, 2, \ldots, m - 1 . \end{cases} \tag{2}$$

Тогда получится последовательность случайных величин

$$W_0 = \{W_{0j}\} ,$$

в которой W_{0j} принимает значение 1 и 0 с вероятностями p соответственно, величины которых не изменяются при изменении индекса j. Поэтому W_0 имеет биномиальное распределение. Для определения направления рабочего поискового смещения ИЭР производит статистический анализ последовательности W_0. С этой целью используется последовательный критерий отношения вероятностей для проверки сложных конкурирующих гипотез H_0, H_1 о величине неизвестного параметра p биномиального распределения

$$H_0 : p \leqq p_0 ; \quad H_1 : p > p_1 ,$$

где p_0, p_1 — заданные числа;

$$p_0 + p_1 = 1 ; \quad p_0 < p_1 .$$

Пусть характеристика

$$y^* = f(x)$$

является унимодальной зависимостью, имеющей максимум; ИЭР совершает смещения входа относительно рабочей точки x_n по закону

$$\Delta_n = (-1)^{n+1} |\Delta| , \quad n = 1, \ldots, m ,$$

анализируется накопленная статистика и по результатам анализа принимается решение о направлении очередного рабочего смещения и т.д. В i-м цикле алгоритм работы управляющей части ИЭР получается по общей методике последовательной проверки статистических гипотез, примененной к частному случаю: задаче о проверке среднего значения биномиального распределения, рассмотренной Вальдом [2]. Вычисляя по этой методике отношение вероятностей, преобразовывая его с учетом

$$p_0 + p_1 = 1 ,$$

получим алгоритм работы ИЭР в виде

$$\Delta x_i = C \operatorname{sign} V_i , \tag{3}$$

где C — некоторая константа, причем $C > 0$, если

$$y^* = f(x)$$

имеет максимум;

$$V_i = \begin{cases} 1 , & \text{если } 2h - m + 1 \geqq A \\ 0 , & \text{если } B < 2h - m + 1 < A \\ -1 , & \text{если } 2h - m + 1 \leqq B \end{cases}$$

$$A = \frac{\ln [(1 - \beta)/\alpha]}{\ln (p_1/p_0)} ; \quad B = \frac{\ln [\beta/(1 - \alpha)]}{\ln (p_1/p_0)} ;$$

α, β — вероятности ошибок I и II рода соответственно (в данном случае вероятность ложного рабочего поискового смещения); h — количество единиц в W_i.

Выбор четырех величин: p_0, p_1, α, β определяется из практических соображений.

Представляет интерес сравнение (3) — последовательного алгоритма с прогнозированием по МНК установившегося значения выхода (Алгоритм 1) с последовательным алгоритмом, в котором в каждом такте производится 4 измерения соответствующего отклика, т.е. без использования накоплений и последующей обработки их по МНК (Алгоритм 2). Пусть

$$y^* = |x - a|, \quad a > 0,$$

тогда в качестве критерия сравнения используем величину среднего времени поиска на одно рабочее поисковое смещение $\hat{T}_0^*$. Если поиск начинается на левой ветви характеристики, то величина

$$\hat{T}_0^* = \frac{\hat{T}_0}{N_0 T} = \frac{2\tau n \hat{m}}{T[1 - 2L(p)]}, \tag{4}$$

где $\hat{T}_0$ — среднее время поиска; N_0 — число рабочих поисковых смещений от начального состояния до окрестности экстремума; n — число измерений в каждом такте; $\hat{m}$ — среднее число тактов (пробных поисковых смещений); $L(p)$ — оперативная характеристика.

Для зависимости

$$y^* = |x - a|$$

можно положить

$$\alpha = \beta.$$

В работе Вальда [2] получены выражения для величин $L(p)$, $\hat{m}$. После их преобразования с учетом

$$\alpha = \beta$$

соответственно получим

$$L(p) = \left[1 + \left(\frac{p}{1 - p}\right)^A\right]^{-1}; \tag{5}$$

$$A = \frac{1 - 2L(p)}{2p - 1} + 1. \tag{6}$$

После подстановки (5), (6) в (4) и преобразований получим при $p = p_1$

$$\hat{T}_0^* = \frac{2\tau}{T} n \left[\frac{A}{2p_1 - 1} + \frac{\exp[A \ln p_1(1 - p_1)] + 1}{\exp[A \ln p_1(1 - p_1)] - 1}\right]. \tag{7}$$

Предположим, что помеха $\varphi(t)$ имеет нормальное распределение:

$$\varphi(t) \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2),$$

где σ^2 является известной величиной, тогда согласно работе Казакевича [1] имеем

$$p_1 = p\{W_{ij} = 1\} = 1 - \Phi^*(U)\,, \tag{8}$$

где $\Phi^*(U)$ — интеграл вероятности;

$$U = \frac{f(x_i + \Delta) - f(x_i - \Delta)}{2^{1/2}\sigma}.$$

$$\left\{n - \frac{[1 - \exp(-n\tau/T)]\,[1 + \exp(-\tau/T)]}{[1 + \exp(-n\tau/T)]\,[1 - \exp(-\tau/T)]}\right\}^{1/2}.$$

При расчетах по (7), (8) выбирались следующие исходные данные: $\Delta = 0{,}5$; $\tau/T = 0{,}01$; $\sigma = 0{,}5$; $1{,}0$; ...; $2{,}5$. Для примера зависимость $\hat{T}_0^*(n, \sigma)$ изображена на Рис. 1. Анализ результатов расчетов показал преимущество Алгоритма 1 перед Алгоритмом 2. Действительно Алгоритму 2 соответствуют те точки кривых Рис. 1, которые получаются при $n = 2$. Из представленных кривых видно, что во всех случаях можно указать такое n, при котором Алгоритм 1 дает меньшую величину среднего времени поиска $\hat{T}_0^*$ на одно рабочее поисковое смещение.

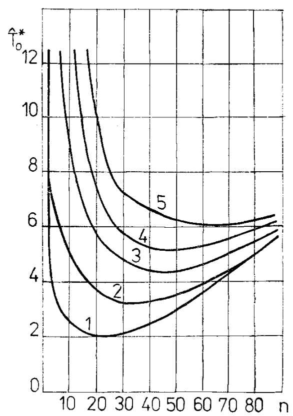

Рис. 1. Зависимость среднего времени поиска $\hat{T}_0^*$ на одно рабочее поисковое смещение от количества измерений n в каждом такте при различных значениях σ: 1 — 0,5; 2 — 1,0; 3 — 1,5; 4 — 2,0; 5 — 2,5.

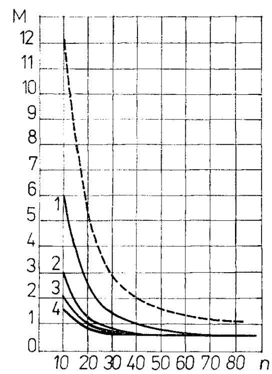

Рис. 2. Зависимость точности M поддержания экстремума от количесва n измерений в каждом такте при $\tau/T = 0{,}01$; $\sigma = 1{,}5$ Кривые 1 — А = 1; 2 — А = 2; 3 — А = 3; 4 — А = 4. (— — —) Алгоритм 2. (———) Алгоритм 1.

В работе Казакевича [3] анализируется алгоритм, в котором установившееся значение определеяется по МНК, без использования пробных поисковых смещений (Алгоритм 2). Сравним Алгоритм 1 (3) с Алгоритмом 2 по величине точности M, поддержания экстремума. Для (3) при $p = p_1$ величина M равняется

$$M = \Delta\left\{1 + \frac{0{,}5\,L(p_1)}{1 - 3\,L(p_1) + 2\,L^2(p_1)}\right\}. \tag{9}$$

Для Алгоритма 2 M имеет вид

$$M = \Delta x_i\left\{1 + \frac{0{,}5(1 - p_1)}{1 - 3(1 - p_1) + 2(1 - p_1)^2}\right\}. \tag{10}$$

При расчетах по (9), (10) величины Δx_i и пробных Δ поисковых смещений определялись из условия равенства приращений качества в обоих алгоритмах. Это позволило поставить их в равные условия по размерам исследуемой области в окрестности рабочей точки — $\Delta x_i = 1$; $\Delta = 0{,}5$. На Рис. 2 представлена зависимость $M(n)$, которая показывает преимущество Алгоритма 1 перед Алгоритмом 2. С увеличением порога A это преимущество увеличивается.

(Поступило в редакцию 8 ноября 1978.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Казакевич, И. Мочалов: О количестве измерений при экстремальном управлении инерционными объектами первого порядка. Автоматика и телемеханика (1973), 10, 109—115.

[2] А. Вальд: Последовательный анализ. Физматгиз, Москва 1960.

[3] В. Казакевич, И. Мочалов: Статистическое исследование некоторых алгоритмов управления инерционными объектами оптимизации при наличии дрейфа. Автоматика и телемеханика (1974), 11, 49—56.

Проф. В. В. Казакевич, д.т.н., Всесоюзный заочный машиностроительный институт Министерства Высшего образования РСФСР. Москва 5, ул. Бабаевская д. 3а. СССР.

И. А. Мочалов, д.т.н., 113208 Москва М-208, Сумская ул., д. 6, корп. 2, кв. 241. СССР.