Kybernetika

Stavové rovnice v teorii regulace

VLADIMÍR STREJC

ACADEMIA
PRAHA

1. ÚVOD

Číslicová technika patří nesporně k oněm významným úspěchům lidského ducha, které natrvalo a hluboce zasáhly do nejrůznějších odvětví lidské činnosti. Vzpomeňme jen, kolik nových elektrotechnických prvků bylo již v souvislosti s touto technikou vynalezeno, jakého úsilí bylo zapotřebí k zvládnutí výrobní technologie těchto prvků, kolik bylo vyvinuto nových elektrotechnických i mechanických přístrojů pro spojení a spolupráci s počítači a kolik vzniklo nových továren a podniků zabývajících se výrobou samotných počítačů. Stejně významný je vliv číslicové techniky v aplikační oblasti a to jak v souvislosti s výrobou tak v souvislosti s hromadným zpracováním dat. Číslicová technika, na rozdíl od jiných významných technických pokroků, má ten charakteristický rys, že usnadňuje duševní práci člověka. Slouží k vědecko-technickým výpočtům, k zpracování hromadných dat, k rozhodování a může být úspěšně využívána ke všem formám automatického řízení. Aby tato technika mohla být úspěšně využívána, je třeba mnohé metody práce, výpočetní metody, organizaci práce, způsoby výběru, sběru a třídění dat přizpůsobit tomuto výkonnému nástroji a pomocníku člověka. Jakýkoliv úkol řešený na samočinném počítači je třeba formulovat jako matematickou úlohu a zvolit vhodnou numerickou metodu k jejímu řešení. Není divu, že pro některé druhy výpočtů nám nestačí ta matematika, s kterou jsme se seznamovali v školních lavicích. Také výpočtové metody, které užíváme při řešení různých úkolů s tužkou a papírem jsou často pro samočinný počítač nepoužitelné nebo alespoň nevhodné. Je třeba si osvojovat nové metody. Mimo metody vlastního programování máme zde na mysli též metody numerické, metody analýzy a syntézy, které nám umožňují sestavovat pro výpočet na samočinném počítači programy jednoduché, vhodné pro numerické řešení a pokud možno univerzální. Jednou z takových oblastí matematiky, která se začala prakticky využívat teprve s rozvojem číslicové techniky a která nachází v poslední době řadu zastánců a uplatnění i v oblasti automatického řízení, je vektorově-maticový zápis diferenciálních rovnic. S tím úzce souvisí popis dynamických vlastností jednotlivých částí regulačního obvodu i celého regulačního obvodu pomocí stavových veličin a tzv. teorie stavových prostorů. Je možné hned na tomto místě poznamenat, že tento formální přístup k vyjadřování dynamiky systémů je pro analýzu a syntézu s tužkou a papírem krajně nevhodný a proto zřejmě nebyl zařazen do výuky na vysokých školách takřka nikde na světě. Pro sestavování programů a pro výpočty na samočinných počítačích má však přednosti a výhody, pro které nabývá stále většího uplatnění a popularity.

Tato příloha časopisu Kybernetika je věnována aplikacím stavových rovnic v regulační technice. Má sloužit především inženýrům pracujícím v této oblasti. Ačkoliv se jedná o matematickou disciplínu, budou zde sledovány především technické a aplikační cíle v regulační technice. Snahou autora je ukázat v obecné formě a na konkrétních numerických příkladech řešení úloh, které inženýr pracující v regulační technice umí řešit jinými, dnes již klasickými, metodami teorie regulace. Proto se pro porozumění výkladu předpokládají obvyklé znalosti matematiky absolventa technické vysoké školy, znalosti základů teorie komplexní proměnné, obyčejných lineárních diferenciálních rovnic, Laplaceovy transformace, základů maticového počtu a teorie regulačních obvodů.

Autor si v žádném případě neklade za úkol rozšířit nebo doplnit matematické poučky vztahující se k této oblasti matematiky. Naopak, vzhledem k neobyčejné rozsáhlosti látky bude nutné se omezit jen na některé nejdůležitější otázky a zaměřit se na logické přehledné uspořádání pro inženýry nových poznatků a na zdůraznění vzájemných souvislostí jednotlivých obměn základního matematického přístupu.

Tato příloha je tudíž především míněna jako stručný praktický přehled a úvod k hlubšímu studiu této oblasti.

Protože se však jedná o doplnění dosavadních znalostí inženýrů automatizační techniky, budou zde uvedena ve vzájemné souvislosti jak řešení spojitá tak diskrétní a jak případy jednorozměrových tak mnohorozměrových obvodů. Jednotné matematické zpracování usnadní čtenářům rozšíření poznatků i do těch oblastí, které zde budou vynechány, jako např. řízené markovské procesy, optimální řízení ve smyslu Bellmana a Pontrjagina atp.

Pokud je známo, nebyl zatím přehled podobného zaměření publikován a v českém jazyku je zatím jen skromné množství prací, které používají stavové rovnice pro řešení úkolů regulace. Pokud jsou však některé dílčí otázky řešeny a publikovány v dostupné literatuře, bude čtenář na tyto práce upozorněn odkazem stejně tak jako na případy, kdy pro určité výpočty je již sestaven program pro samočinný počítač.

2. ZÁKLADNÍ POJMY

2.1 Vstup, stav a výstup

Dynamiku *systému* popisujeme matematickým modelem systému. *Matematický model* vyjadřuje matematické vztahy mezi třemi množinami veličin: *vstupními*, *výstupními* a *stavovými veličinami*.

Vstup systému, vyjádřený množinou funkcí času nebo množinou časových posloupností hodnot, představuje vnější síly působící na dynamický systém. *Výstup*, vyjádřený stejně jako vstup, představuje popis přímo pozorovatelného chování systému.

Základní vlastností jakéhokoliv dynamického systému je to, že jeho chování v jakémkoliv okamžiku času závisí nejen na silách, které na něj působí právě v tomto okamžiku, ale též na silách, které působily v minulosti. Můžeme říkat, že systém má „paměť", v níž je zapamatován podíl v minulosti působících sil na chování systému v právě pozorovaném okamžiku. *Stav* systému, vyjádřený jako množina funkcí času nebo jako množina časových posloupností hodnot, představuje okamžitý stav buněk této paměti. Znalost stavu v libovolném okamžiku t_0 a znalost vstupu v jakémkoliv následujícím okamžiku umožňují určit výstup a stav v jakémkoliv okamžiku $t \geqq t_0$.

2.2 Vlastnosti systému

Systém je *fyzikálně realizovatelný*, jestliže jeho výstup a stav v libovolném okamžiku t_0 může být funkcí jen takových vstupů, které působily před okamžikem t_0, tj. v $t < t_0$.

Systém je *deterministický*, můžeme-li jeho výstup a stav v jakémkoliv okamžiku t určit s jistotou pomocí jeho stavu v nějakém okamžiku $t_0 < t$ a ze známého vstupu na polouzavřeném intervalu $\langle t_0, t)$.

Systém je *stochastický*, jestliže znalost jeho stavu v nějakém okamžiku t_0 a vstupu na intervalu $\langle t_0, t)$ umožňuje určit výstup a stav systému v okamžiku $t > t_0$ jen s určitou pravděpodobností nebo jiným statistickým způsobem.

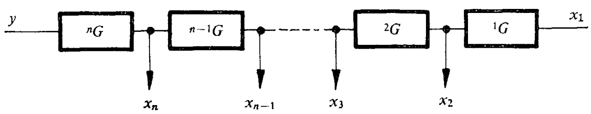
2.3 Vstupní, stavové a výstupní veličiny systému

Protože vstup, stav a výstup jsou tvořeny množinami veličin, vyjadřujeme je jako vektory. Např. vstup m veličin regulované soustavy označíme vektorem

$$(2.1) \qquad \mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_m]^{\mathrm{T}} = [y_i]\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Podobně stav vyjadřujeme vektorem stavových veličin. Např. u lineární regulované soustavy n-tého řádu, která je vytvořena řetězcem n za sebou zapojených členů prvního řádu, mohou být stavovými veličinami veličiny $x_1, x_2, \ldots, x_n$, vyznačené v obr. 2.1. Stavovými veličinami mohou být též např. derivace výstupní veličiny $x_1(t)$, $\mathrm{d}x_1(t)/\mathrm{d}t, \ldots, \mathrm{d}^{n-1}x_1(t)/\mathrm{d}t^{n-1}$ nebo jimi může být jakákoliv funkce, zpravidla lineární kombinace takových veličin soustavy, aby vektor stavových veličin plně popisoval stav soustavy. Z uvedeného je zřejmé, že je neomezená volnost ve volbě veličin stavového vektoru s výhradou, že všechny alternativy plně popisují stav systému. Při volbě veličin stavového vektoru dáváme přednost takovým stavovým veličinám, s nimiž se zjednoduší předpokládané výpočty, nebo máme na zřeteli možnost tyto veličiny měřit atp.

Také výstup vyjadřujeme vektorem výstupních veličin. Vektor výstupních veličin je jednoznačnou funkcí stavového vektoru. Výstupní vektor může být i shodný



Obr. 2.1.

se stavovým vektorem nebo výstupní veličiny jsou přímo některé veličiny stavového vektoru. Např. u regulované soustavy na obr. 2.1. se můžeme zajímat o časový průběh jen veličiny $x_1(t)$, která je jednou z veličin stavového vektoru $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$ i stavového vektoru $\mathbf{x} = [x_1(t), \mathrm{d}x_1(t)/\mathrm{d}t, \ldots, \mathrm{d}^{n-1}x_1(t)/\mathrm{d}t^{n-1}]^{\mathrm{T}}$.

Množinu všech možných vstupů $\mathbf{y}$ systému nazveme *prostorem vstupů* Y. Podobně množinu všech možných stavů $\mathbf{x}$ systému označíme jako *stavový prostor* X a množinu všech možných výstupů $\mathbf{v}$ systému označme jako *prostor výstupů* V.

Jsou-li vstupní, stavové a výstupní vektory definovány pro každé t z nějakého intervalu (spojitý čas), hovoříme o *spojitém systému*, o *spojité regulované soustavě* atp. Jsou-li však vstupní a stavové vektory definovány jen v diskrétních okamžicích času t_k, kde k je posloupnost čísel (zpravidla celých čísel) z nějakého intervalu, hovoříme o *diskrétních systémech*.

2.4 Stavová rovnice

Mějme deterministický systém, který je v okamžiku t_0 v rovnovážném stavu (v klidu) a nechť od tohoto okamžiku působí na systém vstup $\mathbf{y}$. Výstup systému $\mathbf{v}$ v každém okamžiku $t \geqq t_0$ závisí na vstupu $\mathbf{y}$ působícím na polouzavřeném intervalu času $\langle t_0, t)$. To znamená, že pro všechna $\mathbf{y}$ v Y a všechna t a t_0 platí:

(2.2) $$\mathbf{v}(t) = F_1(\mathbf{y}_{\langle t_0, t)}) \, .$$

Definovali jsme tak *výstup systému s přímo pozorovatelným chováním*, jehož výstupní veličiny jsou měřitelné fyzikální veličiny.

Nemá-li však systém přímo pozorovatelný výstup, můžeme za jinak stejných podmínek vyjádřit stav systému v okamžiku t a výstup systému jako funkci tohoto stavu

(2.3) $$\mathbf{x}(t) = F_2(\mathbf{y}_{\langle t_0, t)}) \, ,$$

(2.4) $$\mathbf{v}(t) = F_3(\mathbf{x}(t)) \, .$$

Jestliže opustíme předpoklad, že systém byl v rovnovážném stavu v okamžiku t_0, změní se rovnice (2.3) na tvar

(2.5) $$\mathbf{x}(t) = F_4(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{y}_{\langle t_0, t)}) \, .$$

Rovnice (2.4) a (2.5) se označují jako *stavové rovnice systému*. Tyto rovnice plně popisují deterministický systém. Při tom rozměr vektoru $\mathbf{x}$ vyjadřuje *řád* systému.

2.5 Operátory

Operátor značí transformaci, která má být provedena s operandem. Např. je-li ve dvou vektorových prostorech Y a X každému $\mathbf{y} \in Y$ jednoznačně přiřazen prvek $\mathbf{x} \in X$, pak toto přiřazení zapisujeme stručně rovnicí

(2.6) $$\mathbf{x} = A\mathbf{y}$$

a mluvíme o operátoru A definovaném na prostoru Y a zobrazujícím Y do X.

Součet operátorů $A_1 + A_2$ definujeme vztahem

$$(A_1 + A_2)\,\mathbf{y} = A_1\mathbf{y} + A_2\mathbf{y} \tag{2.7}$$

pro všechna $\mathbf{y}$ z prostoru Y.

Protože sčítání ve vektorovém prostoru je komutativní, plynou z (2.7) vztahy

$$(A_1 + A_2)\,\mathbf{y} = (A_2 + A_1)\,\mathbf{y}\,, \tag{2.8}$$

$$[A_1 + (A_2 + A_3)]\,\mathbf{y} = [(A_1 + A_2) + A_3]\,\mathbf{y}\,. \tag{2.9}$$

Součinem operátorů A_1A_2 rozumíme postupné použití operátoru A_2 na $\mathbf{y}$ a A_1 na $A_2\mathbf{y}$.

Pro součin operátorů neplatí komutativní zákon:

$$A_1A_2\mathbf{y} \neq A_2A_1\mathbf{y}\,. \tag{2.10}$$

Je-li $\mathbf{y}$ m-rozměrový vektor rovný součtu m-rozměrových vektorů, např. $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, kde $y_i = y_{1i} + y_{2i}$ pro všechna i, $i = 1, 2, \ldots, m$, neplatí obecně pro transformaci operátorem A distributivní zákon:

$$A(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) \neq A\mathbf{y}_1 + A\mathbf{y}_2\,. \tag{2.11}$$

Násobíme-li m-rozměrový vektor $\mathbf{y}$ libovolnou konstantou a (číslem), dostaneme opět m-rozměrový vektor

$$\mathbf{f} = a\mathbf{y}\,, \tag{2.12}$$

kde $f_i = ay_i$ pro všechna i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Platí-li

$$Aa\mathbf{y} = aA\mathbf{y} \tag{2.13}$$

označuje se operátor A jako *homogenní.*

Zvláštní typy operátorů jsou: *operátor vektorový*, kde

$$f_i = \mathbf{A}(i)\,\mathbf{y}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{2.14}$$

a *operátor maticový*:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1m} \\ A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

kde

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}y_j\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{2.16}$$

nebo

$$f = Ay . \tag{2.17}$$

2.6 Lineárnost

Operátor je *lineární*, splňuje-li požadavek homogenity a distributivního zákona:

$$A(ay_1 + by_2) = aAy_1 + bAy_2 . \tag{2.18}$$

Není-li rovnice (2.18) splněna, jedná se o operátor *nelineární*.

Můžeme-li matematický model systému vyjádřit lineárními diferenciálními rovnicemi, nabývá rovnice (2.5) a (2.4) tvaru

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{y}(t) , \tag{2.19}$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) , \tag{2.20}$$

kde $\mathbf{y}(t)$ je m-rozměrový vektor, $\mathbf{x}(t)$ je n-rozměrový vektor, $\mathbf{v}(t)$ je s-rozměrový vektor a $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou lineární maticové operátory typu $(n; n)$, $(n; m)$ a $(s; n)$.

U diskrétních lineárních systémů máme místo (2.19) a (2.20) rovnice

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}(k)\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\,\mathbf{y}(k) , \tag{2.21}$$

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{C}(k)\,\mathbf{x}(k) . \tag{2.22}$$

2.7 Stacionárnost

Spojitý operátor A je *stacionární*, splňuje-li vztah

$$x(t - t_1) = A[y(t - t_1)] \tag{2.23}$$

pro všechna t a t_1 a pro všechna y z prostoru Y. Systém je stacionární může-li být popsán stacionárními operátory. Jinými slovy, systém popsaný diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty je stacionární a podobně systém vyjádřený rovnicemi (2.19) a (2.20) je stacionární, jsou-li operátory $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ konstantní matice.

Podobně můžeme definovat i stacionárnost diskrétního systému.

2.8 Shodnost systémů

Máme-li dva systémy, jejichž vstupní, stavové a výstupní vektory jsou $\mathbf{y}^1$, $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{v}^1$ a $\mathbf{y}^2$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{v}^2$, pak tyto systémy jsou *pozorovatelně shodné*, jestliže pro všechna $\mathbf{y}$ v Y

a všechna t rovnost

$$\mathbf{y}^1(t) = \mathbf{y}^2(t) \tag{2.24}$$

podmiňuje rovnost

$$\mathbf{v}^1(t) = \mathbf{v}^2(t) \tag{2.25}$$

Z uvedeného je zřejmé, že definice pozorovatelné shody nebere zřetel na stav porovnávaných systémů, ale posuzuje jen vnější veličiny, vstup a výstup. Chceme-li usuzovat na shodu či rozdílnost i vnitřních vlastností systému, je třeba zavést úplnější definici shody zahrnující i stav systémů. Taková definice nesmí však záviset na libovolně volitelném souřadnicovém systému pro stavové veličiny. Jinými slovy, v libovolném okamžiku času t stavové vektory dvou systémů se shodnými stavy se mohou lišit, ale musí být možné transformovat jeden stavový vektor na druhý lineárním konstantním operátorem.

Z této úvahy plyne definice tak zvané *přísné shody*: Dva systémy jsou přísně shodné, je-li splněna podmínka pozorovatelné shody a jestliže (2.24) podmiňuje rovnost

$$\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{F}\,\mathbf{x}^2(t)\,, \tag{2.26}$$

kde $\mathbf{F}$ je nesingulární konstantní matice.

2.9 Řiditelnost a pozorovatelnost

Systém je *řiditelný* v okamžiku t_0, je-li možné vhodně vybranými vstupy změnit jeho jakýkoliv počáteční stav $\mathbf{x}(t_0)$ ze stavového prostoru X na jakýkoliv jiný stav téhož prostoru v konečném časovém intervalu $\langle t_0, t)$.

Systém je *pozorovatelný* v okamžiku t_0, je-li možné jakýkoliv jeho počáteční stav $\mathbf{x}(t_0)$ ze stavového prostoru X určit pozorováním výstupu po dobu konečného časového intervalu $\langle t_0, t)$.

U stacionárních lineárních systémů není definice řiditelnosti a pozorovatelnosti spjata s okamžikem t_0 a obě definice lze modifikovat takto:

Stacionární lineární systém je *řiditelný* není-li jej možné transformovat na přísně shodný systém, u něhož by jedna nebo více stavových veličin bylo nezávislých na vstupu $\mathbf{y}$.

Stacionární linerání systém je *pozorovatelný*, není-li jej možné transformovat na přísně shodný systém, u něhož výstup $\mathbf{v}$ je nezávislý na jedné nebo více stavových veličin x_i.

Jinými slovy říkáme, že stavová veličina, která nezávisí na vstupu, je neřiditelná. Je-li výstup nezávislý na některé stavové veličině, pak tato stavová veličina je nepozorovatelná.

Bližší údaje o řiditelnosti a pozorovatelnosti systémů jsou uvedeny v kap. 9.

3. ODVOZENÍ STAVOVÝCH ROVNIC

3.1 Spojitá verze

3.11 *Postup I – stavové veličiny jsou definovány vztahem* $x_{i+1} = x_i'$

Jednorozměrová soustava

Mějme soustavu, např. regulovanou soustavu, se vstupní veličinou y a výstupní

Obr. 3.1.

veličinou v (viz obr. 3.1), jejíž dynamika je popsána lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty

(3.1) $$\sum_{i=0}^{n} a_i\, v^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j\, y^{(j)}(t)\,, \quad n \geqq m\,.$$

Zavedeme-li operátor

(3.2) $$D^i = \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\,,$$

můžeme rovnici (3.1) formálně přepsat na tvar

(3.3) $$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i\, v(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j D^j\, y(t)\,, \quad n \geqq m\,,$$

(3.4) $$\tilde{A}\, v(t) = \tilde{B}\, y(t)\,,$$

kde zřejmě

(3.5) $$\tilde{A} = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \quad \text{a} \quad \tilde{B} = \sum_{j=0}^{m} b_j D^j\,.$$

Z rovnice (3.4) plyne formálně, že

(3.6) $$v(t) = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}}\, y(t)\,.$$

Zaveďme

(3.7) $$\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}}\, y(t) = \tilde{B}\, x(t)\,,$$

takže

$$\frac{1}{\tilde{A}}\, y(t) = x(t)\,. \tag{3.8}$$

Rovnici (3.4) tudíž nahrazují dva vztahy:

$$\tilde{A}\, x(t) = y(t)\,, \tag{3.9}$$

$$\tilde{B}\, x(t) = v(t)\,. \tag{3.10}$$

Zavedeme-li nyní stavové veličiny

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t)\,,\\ x^{(1)}(t) &= x_2(t) = x_1^{(1)}(t)\,,\\ &\;\vdots\\ x^{(n-1)}(t) &= x_n(t) = x_{n-1}^{(1)}(t)\,, \end{aligned} \tag{3.11}$$

je zřejmě

$$x^{(n)}(t) = x_n^{(1)}(t) \tag{3.12}$$

a rovnici (3.9) můžeme přepsat na tvar

$$x_n^{(1)}(t) = \frac{1}{a_n}\, y(t) - \frac{a_{n-1}}{a_n}\, x_n(t) - \ldots - \frac{a_1}{a_n}\, x_2(t) - \frac{a_0}{a_n}\, x_1(t)\,. \tag{3.13}$$

Rovnice (3.11) a (3.13) můžeme napsat jako jedinou rovnici pomocí konstantních maticových operátorů a vektorů stavových veličin:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t)\\ x_2^{(1)}(t)\\ \vdots\\ x_n^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0\\ 0 & 0 & 1 \ldots 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & \ldots -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ \dfrac{1}{a_n} \end{bmatrix} y(t)\,, \tag{3.14}$$

nebo stručně

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{A}\, \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\, y(t)\,. \tag{3.15}$$

Z rovnice (3.10), při použití stavových veličin definovaných v (3.11), dostaneme rovnici definující transformaci stavových veličin $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, na výstupní veličinu $v(t)$

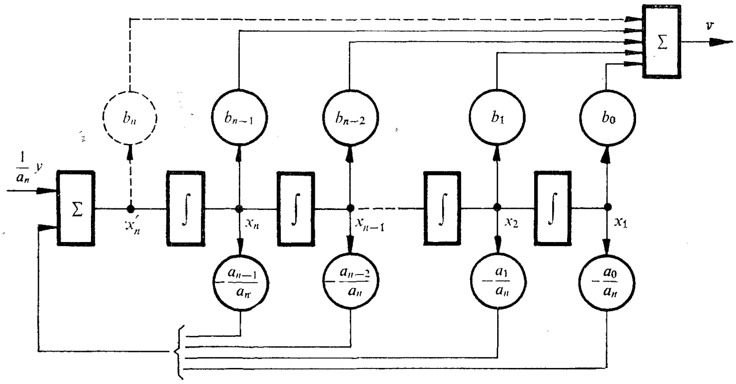
$$b_0\, x_1(t) + b_1\, x_2(t) + \ldots + b_{n-1}\, x_n(t) + b_n\, x_n^{(1)}(t) = v(t)\,, \quad m = n\,, \tag{3.16}$$

nebo

$$(3.17) \qquad v(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + H\,y(t)\,,$$

kde $H = b_n/a_n$ a $\mathbf{C}$ je řádková matice typu $(1;\,n)$

$$(3.18) \qquad \mathbf{C} = \left[b_0 - \frac{a_0}{a_n} b_n,\quad b_1 - \frac{a_1}{a_n} b_n, \ldots, b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} b_n \right].$$



Obr. 3.2.

Rovnice (3.15) a (3.17) jsou stavové rovnice uvažované soustavy. Z obou stavových rovnic jsou patrna zjednodušení nastávající při $b_n = 0$ a při $a_n = 1$.

Stavové rovnice (3.15) a (3.17) můžeme též vyjádřit jediným blokovým schématem stavových rovnic, uvedeným v obr. 3.2 plně pro $m = n - 1$ a čárkovaně je doplněna složka pro $m = n$.

Pokud jsou konstanty $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ nulové a $b_0 = 1$, pak stavové veličiny x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou shodné s výstupní veličinou soustavy a jejími derivacemi; tj. s $v^{(i-1)}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. To je určitá výhoda použité definice stavových veličin.

Příklad. Sestavme stavové rovnice k diferenciální rovnici

$$2v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = y(t) + 5y'(t)\,.$$

Řešení. Podle (3.14) a (3.17) je

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -1, & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} y(t)\,,$$

$$v(t) = [1,\ 5]\,[x_1(t)\,x_2(t)]^{\mathrm{T}}\,.$$

3.12 *Postup II — stavové veličiny jsou lineární kombinací derivací vstupní a výstupní veličiny soustavy*

Jednorozměrová soustava

Dynamiku soustavy nechť opět popisuje diferenciální rovnice n-tého řádu

$$a_n v^{(n)}(t) + a_{n-1} v^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 v^{(1)}(t) + a_0 v(t) = \tag{3.19}$$
$$= b_0 y(t) + b_1 y^{(1)}(t) + \ldots + b_m y^{(m)}(t),$$

kde $m \leqq n$. Mějme případ, kdy $m = n$ a definujme stavové veličiny těmito rovnicemi:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_n v(t) - b_n y(t), \\ x_2(t) &= a_{n-1} v(t) + a_n v^{(1)}(t) - b_n y^{(1)}(t) - b_{n-1} y(t), \\ x_3(t) &= a_{n-2} v(t) + a_{n-1} v^{(1)}(t) + a_n v^{(2)}(t) - \\ &\quad - b_n y^{(2)}(t) - b_{n-1} y^{(1)}(t) - b_{n-2} y(t), \\ &\ \vdots \\ x_n(t) &= a_1 v(t) + a_2 v^{(1)}(t) + \ldots + a_n v^{(n-1)}(t) - \\ &\quad - b_n y^{(n-1)}(t) - b_{n-1} y^{(n-2)} - \ldots - b_1 y(t). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Z první rovnice soustavy rovnic (3.20) vypočteme $v(t)$ a dosadíme do všech ostatních rovnic této soustavy a všechny členy s derivacemi veličin $v(t)$ a $y(t)$ nahradíme první derivací stavové veličiny, definované vždy předcházející rovnicí. Dostaneme:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{a_{n-1}}{a_n} x_1(t) + x_1'(t) - \left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} b_n\right) y(t), \\ x_3(t) &= \frac{a_{n-2}}{a_n} x_1(t) + x_2'(t) - \left(b_{n-2} - \frac{a_{n-2}}{a_n} b_n\right) y(t), \\ &\ \vdots \\ x_n(t) &= \frac{a_1}{a_n} x_1(t) + x_{n-1}'(t) - \left(b_1 - \frac{a_1}{a_n} b_n\right) y(t). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Připojíme-li k rovnici (3.21) původní diferenciální rovnici vyjádřenou pomocí zavedených stavových veličin a to v následujícím uspořádání

$$0 = \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + x_n'(t) - \left(b_0 - \frac{a_0}{a_n} b_n\right) y(t), \tag{3.22}$$

můžeme rovnice (3.21) a (3.22) napsat pomocí maticových operátorů v této formě:

$$(3.23)\quad \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{n-2}}{a_n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} b_n \\ b_{n-2} - \frac{a_{n-2}}{a_n} b_n \\ \vdots \\ b_0 - \frac{a_0}{a_n} b_n \end{bmatrix} y(t)\,,$$

nebo stručně

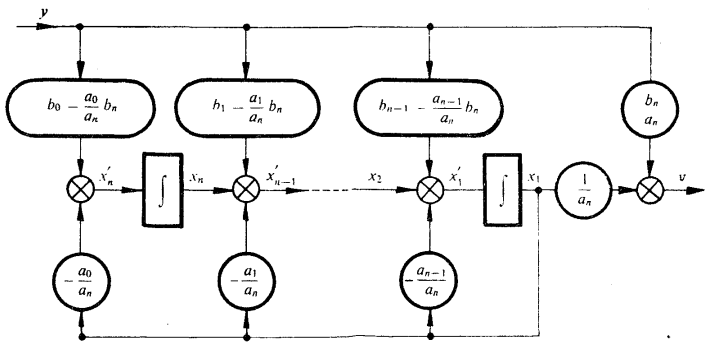
$$(3.24)\qquad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,y(t)\,.$$

Transformace stavových veličin $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ na výstupní veličinu $v(t)$ je v tomto případě triviální. Je definována první rovnicí (3.20). Přepíšeme-li ji pro jednotnost zápisu do maticového tvaru, je

$$(3.25)\qquad v(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + H\,y(t)\,,$$

kde

$$\mathbf{C} = \left[\frac{1}{a_n}, 0, 0, \dots, 0\right] \quad \text{a} \quad H = \frac{b_n}{a_n}\,.$$



Obr. 3.3.

Blokové schéma stavových rovnic (3.24) a (3.25) je uvedeno na obr. 3.3.

Výhodou volby stavových veličin podle postupu uvedeného v tomto odstavci je, že při jakýchkoliv hodnotách konstant $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ a pro $b_n = 0$ a $a_n = 1$ je $x_1(t) = v(t)$.

Při numerických výpočtech nemusíme pak provádět transformaci (3.25), zatímco při postupu podle odstavce 3.11 je při určování výstupní veličiny $v(t)$ transformace podle (3.17) vždy nutná. Proto budeme dále aplikovat převážně postup II uvedený v tomto odstavci.

Příklad. Sestavme stavovou rovnici k diferenciální rovnici

$$2v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = y(t) + 5y'(t) .$$

Řešení. Podle (3.23) a (3.25) je

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}, & 1 \\ -1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) ,$$

$$v(t) = \tfrac{1}{2} x_1(t) .$$

Dělíme-li danou rovnici konstantou $a_n = a_2 = 2$, dostaneme:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}, & 1 \\ -1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} y(t) ,$$

$$v(t) = x_1(t) .$$

3.13 *Stavová rovnice soustavy při působení akční a poruchové veličiny*

Působí-li na vstupu regulované soustavy současně akční veličina y i poruchová veličina u, můžeme pro stacionární lineární soustavu napsat rovnici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, v^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, y^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{p} c_i\, u^{(i)}(t) , \quad m < n , \quad p < n . \tag{3.26}$$

Pro $m = p = n - 1$ a ve shodě s postupem II (odst. 3.12) vypočteme

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{n-2}}{a_n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -\frac{a_0}{a_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} & c_{n-1} \\ b_{n-2} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ b_0 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

nebo stručně

$$\mathbf{x}'(t) = \boldsymbol{A}\, \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\, y(t) + \boldsymbol{C}\, u(t) , \tag{3.28}$$

kde $\boldsymbol{B} = [b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0]^{\mathrm{T}}$ a $\boldsymbol{C} = [c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_0]^{\mathrm{T}}$. Při tom stavové veličiny jsou definované takto:

$$x_1(t) = a_n v(t), \tag{3.29}$$

$$x_2(t) = \frac{a_{n-1}}{a_n} x_1(t) + x_1'(t) - b_{n-1} y(t) - c_{n-1} u(t), \tag{3.30}$$

$$x_3(t) = \frac{a_{n-2}}{a_n} x_1(t) + x_2'(t) - b_{n-2} y(t) - c_{n-2} u(t),$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = \frac{a_1}{a_n} x_1(t) + x_{n-1}'(t) - b_1 y(t) - c_1 u(t).$$

S takto definovanými stavovými veličinami nabývá původní diferenciální rovnice (3.26) tvaru

$$x_n'(t) + \frac{a_0}{a_n} x_1(t) - b_0 y(t) - c_0 u(t) = 0. \tag{3.31}$$

Rovnice (3.30) a (3.31) definují stavovou rovnici (3.27). Rovnice (3.29) představuje transformaci stavových veličin na výstupní veličinu soustavy.

Podobně bychom mohli odvodit stavovou rovnici soustavy, na jejímž vstupu působí kromě akční veličiny větší počet poruchových veličin než jedna.

Působí-li na soustavu jen jedna poruchová veličina a to na výstupu soustavy, jsou v rovnicích (3.26) až (3.31) konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ nulové a $c_0 = 1$.

3.14 *Mnohorozměrová spojitá soustava*

Dynamiku N-rozměrové stacionární lineární spojité soustavy popisuje soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(D)\, v_j(t) = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(D)\, y_j(t), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.32}$$

V rovnici (3.32) je počet akčních veličin roven počtu N regulovaných veličin, $a_{ij}(D)$ a $b_{ij}(D)$ jsou polynomy v D stupně n_{ij} a m_{ij}, $m_{ij} \leqq n_{ij}$ a $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Systém rovnic (3.32) můžeme též napsat v maticové formě

$${}^{s}\mathbf{A}(D)\, \mathbf{v}(t) = {}^{s}\mathbf{B}(D)\, \mathbf{y}(t), \tag{3.33}$$

při čemž $a_{ij}(D)$ a $b_{ij}(D)$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, jsou prvky matic ${}^{s}\mathbf{A}(D)$ a ${}^{s}\mathbf{B}(D)$.

Poznámka. Určíme-li k rovnici (3.33) její Laplaceův obraz

$$\mathbf{F}_A(p)\, \mathbf{v}(p) = \mathbf{F}_B(p)\, \mathbf{Y}(p), \tag{3.34}$$

je obraz řešení

$$V(p) = F_A^{-1}(p)\, F_B(p)\, Y(p) = S(p)\, Y(p)\,, \tag{3.35}$$

kde prvky matice $\mathbf{S}(p)$ jsou přenosy $S_{ij}(p)$ jednotlivých částí regulované soustavy.

Matice ${}^{s}\mathbf{A}(D)$ a ${}^{s}\mathbf{B}(D)$ v rovnici (3.33) je možné napsat jako součet matic, kde prvky jednotlivých matic jsou násobeny stejnou mocninou operátoru D. Pro $n = \max(n_{ij})$, $m = \max(m_{ij})$ a pro $n = m$ je

$$\begin{aligned}({}^{s}\mathbf{A}_n D^n + {}^{s}\mathbf{A}_{n-1} D^{n-1} + \ldots + {}^{s}\mathbf{A}_1 D + {}^{s}\mathbf{A}_0)\, \mathbf{v}(t) &= \\ = ({}^{s}\mathbf{B}_n D^n + {}^{s}\mathbf{B}_{n-1} D^{n-1} + \ldots + {}^{s}\mathbf{B}_1 D + {}^{s}\mathbf{B}_0)\, \mathbf{y}(t)\,.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Odtud počínaje může být postup určení stavových rovnic v podstatě shodný s postupem uvedeným v odst. 3.11 nebo 3.12. Rozdíl je však v tom, že pracujeme nyní s maticemi a vektory.

Použijeme postup II, tj. podle odst. 3.12, a dostaneme po zavedení vektorů stavových veličin

$$\mathbf{x}_\nu = [x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \ldots, x_{\nu N}]\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n:$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1(t) \\ \mathbf{x}'_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{n-1}, 1, 0, \ldots, 0 \\ -\mathbf{A}_{n-2}, 0, 1, \ldots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\mathbf{A}_0, \quad 0, 0, \ldots, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n-1} \\ \mathbf{B}_{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t)\,, \tag{3.37}$$

kde

$$\mathbf{A}_{n-l} = {}^{s}\mathbf{A}_{n-l}\, {}^{s}\mathbf{A}_n^{-1}\,, \quad \mathbf{B}_{n-l} = {}^{s}\mathbf{B}_{n-l} - {}^{s}\mathbf{A}_{n-l}\, {}^{s}\mathbf{A}_n^{-1}\, {}^{s}\mathbf{B}_n\,, \quad l = 1, 2, \ldots, n$$

a kde vektor

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \ldots, y_N(t)]^{\mathrm{T}}\,.$$

Transformaci stavových veličin na vektor výstupních veličin provedeme podle rovnice

$$\mathbf{v}(t) = {}^{s}\mathbf{A}_n^{-1}\, x_1(t) + {}^{s}\mathbf{A}_n^{-1}\, {}^{s}\mathbf{B}_n\, \mathbf{y}(t)\,, \tag{3.38}$$

kde vektor

$$\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), \ldots, v_N(t)]^{\mathrm{T}}\,.$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (3.38) je nulový, když $m_{ij} < n_{ij}$ pro všechna ij.

Převedení soustavy diferenciálních rovnic (3.32) na stavové rovnice (3.37) a (3.38) je uvedeným postupem zřejmě možné jen tehdy, pokud je matice ${}^{s}\mathbf{A}_n$ regulární. Je-li matice ${}^{s}\mathbf{A}_n$ singulární, zůstávají v platnosti rovnice definující stavové veličiny podle jednorozměrného vzoru (3.20). Převedení je tudíž možné, ale nelze uvést obecně explicitní řešení. Pro soustavy diferenciálních rovnic se singulární maticí ${}^{s}\mathbf{A}_n$ můžeme proto postup převedení na stavové rovnice naznačit jen na zvláštním příkladu.

Příklad 1. Sestavme stavové rovnice dvourozměrové soustavy, jejíž dynamiku popisují tyto rovnice:

$$3v_1'(t) + v_1(t) + v_2''(t) + 5v_2'(t) + 2v_2(t) =$$
$$= y_1(t) + 2y_1'(t) + 3y_2(t) + 4y_2'(t)\,,$$
$$2v_1''(t) + 2v_1'(t) + v_1(t) + 3v_2''(t) + 6v_2'(t) + 2v_2(t) =$$
$$= 2y_1(t) + 5y_1'(t) + 2y_2(t)\,.$$

Řešení. Sestavme nejdříve matice ${}^s\mathbf{A}_{n-l}$ a ${}^s\mathbf{B}_{n-l}$, $l = 0, 1, 2$:

$${}^s\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{bmatrix}, \quad {}^s\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1, & 3 \\ 2, & 2 \end{bmatrix},$$

$${}^s\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3, & 5 \\ 2, & 6 \end{bmatrix}, \quad {}^s\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 2, & 4 \\ 5, & 0 \end{bmatrix},$$

$${}^s\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 2, & 3 \end{bmatrix}, \quad {}^s\mathbf{B}_2 = 0\,.$$

Matice ${}^s\mathbf{A}_2$ je zřejmě regulární, takže k sestavení stavových rovnic můžeme použít vzorců (3.37) a (3.38):

$${}^s\mathbf{A}_2^{-1} = -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3, & -1 \\ -2, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}, & \frac{1}{2} \\ 1, & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = {}^s\mathbf{A}_1\,{}^s\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 3, & 5 \\ 2, & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}, & \frac{1}{2} \\ 1, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{3}{2} \\ 3, & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_0 = {}^s\mathbf{A}_0\,{}^s\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 2, & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}, & \frac{1}{2} \\ 1, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Podle (3.37) je

$$\begin{bmatrix} x_{11}'(t) \\ x_{12}'(t) \\ x_{21}'(t) \\ x_{22}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{3}{2}, & 1, & 0 \\ 3, & 1, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2, & 4 \\ 5, & 0 \\ 1, & 3 \\ 2, & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

a podle (3.38) určíme

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}, & \frac{1}{2} \\ 1, & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \end{bmatrix}.$$

Příklad 2. Nechť jsou dány diferenciální rovnice dvourozměrové soustavy

$$v_1''(t) + 2v_1'(t) + 2v_1(t) + 3v_2'(t) + v_2(t) = 4y_1(t) + 5y_1'(t) + 3y_2(t)\,,$$
$$7v_1'(t) + 5v_1(t) \qquad\qquad + v_2(t) = 3y_1(t) + \qquad\quad y_2(t)\,.$$

Sestavme stavové rovnice.

Řešení. Protože matice ${}^s\boldsymbol{A}_2$ je singulární, nemůžeme provést převedení na stavové rovnice podle vzorců (3.37) a (3.38). Sestavíme v tomto případě rovnice určující vztahy mezi stavovými a vstupními veličinami soustavy a to podle vzorců (3.21) a (3.22)

$$\boldsymbol{x}_1(t) = {}^s\boldsymbol{A}_2\, \boldsymbol{v}(t)\,, \tag{3.39}$$

$$\boldsymbol{x}_2(t) = {}^s\boldsymbol{A}_1\, \boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{x}_1'(t) - {}^s\boldsymbol{B}_1\, y(t)\,, \tag{3.40}$$

$$0 = {}^s\boldsymbol{A}_0\, \boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{x}_2'(t) - {}^s\boldsymbol{B}_0\, y(t)\,,$$

kde všechny vektory veličin mají v řešeném příkladu dva prvky. Z rovnice (3.39) a ze zadaných diferenciálních rovnic plyne

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix},$$

$$x_{11}(t) = v_1(t)\,,$$

$$x_{12}(t) = 0\,,$$

což je stavová rovnice definující převedení stavových veličin na výstupní veličinu soustavy. Veličina $v_2(t)$ nezávisí na stavových veličinách soustavy a je tudíž neregulovatelná.

Z rovnic (3.40) dostaneme:

$$\begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2, & 3 \\ 7, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11}'(t) \\ x_{12}'(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

$$x_{21}(t) = 2x_{11}(t) + x_{11}'(t) - 5y_1(t)\,,$$

$$x_{22}(t) = 7x_{11}(t) + x_{12}'(t)\,,$$

$$0 = \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 5, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{21}'(t) \\ x_{22}'(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4, & 3 \\ 3, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

$$0 = 2x_{11}(t) + x_{21}'(t) - 4y_1(t) - 3y_2(t)\,,$$

$$0 = 5x_{11}(t) + x_{22}'(t) - 3y_1(t) - y_2(t)\,.$$

Podle odvozených vztahů můžeme nyní sestavit příslušnou stavovou rovnici

$$\begin{bmatrix} x_{11}'(t) \\ x_{12}'(t) \\ x_{21}'(t) \\ x_{22}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2, & 0, & 1, & 0 \\ -7, & 0, & 0, & 1 \\ -2, & 0, & 0, & 0 \\ -5, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5, & 0 \\ 0, & 0 \\ 4, & 3 \\ 3, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

3.2 Diskrétní verze

3.21 *Postup I — stavové veličiny jsou definovány vztahem* $x_i(k+1) = x_{i+1}(k)$

Jednorozměrová soustava

U diskrétní verze odvození stavových rovnic členů regulačního obvodu popsaných lineární diferenční rovnicí s konstantními koeficienty musíme rozlišovat dva případy a to případ diskrétně pracujících členů a případ spojitě pracujících členů. Je-li vstupní veličina členu obvodu y a výstupní veličina v (viz obr. 3.1), můžeme příslušnou diferenční rovnici napsat ve tvaru

$$a_n v(k-n) + a_{n-1} v(k-n+1) + \ldots + a_1 v(k-1) + a_0 v(k) = \\ = b_0 y(k) + b_1 y(k-1) + \ldots + b_n y(k-n) . \tag{3.41}$$

U diskrétně pracujících členů regulačního obvodu, realizovaných např. počítačem, může být konstanta b_0 nenulová, zatímco u spojitě pracujících členů musí být až na triviální případ soustavy nultého řádu, konstanta b_0 rovna nule.

V rovnici (3.41) je vynechána pro stručnost zápisu v argumentu veličin v a y perioda vzorkování T. Správně by mělo být např. $v[T(k-i)]$ místo $v(k-i)$. Zaveďme pro posunutí o i period vzorkování symbol E^{-i}, tj.

$$E^{-i} v(k) = v(k-i) . \tag{3.42}$$

S označením (3.42) můžeme rovnici (3.41) přepsat na tvar

$$\sum_{i=0}^{n} a_i E^{-i} v(k) = \sum_{i=0}^{n} b_i E^{-i} y(k) , \tag{3.43}$$

$$\hat{A}\, v(k) = \hat{B}\, y(k) , \tag{3.44}$$

kde zřejmě

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^{n} a_i E^{-i} \quad \text{a} \quad \hat{B} = \sum_{i=0}^{n} b_i E^{-i} . \tag{3.45}$$

Stejně jako v odst. 3.11 můžeme rovnici (3.44) vyjádřit dvěma vztahy:

$$\hat{A}\, x(k) = y(k) , \tag{3.46}$$

$$\hat{B}\, x(k) = v(k) . \tag{3.47}$$

Zavedeme-li nyní stavové veličiny

$$x(k-n) = x_1(k) , \\ x(k-n+1) = x_1(k+1) = x_2(k) , \tag{3.48}$$

$$x(k - n + 2) = x_2(k + 1) = x_3(k)\,,$$
$$\vdots$$
$$x(k - 1) = x_{n-1}(k + 1) = x_n(k)\,,$$
$$x(k) = x_n(k + 1)\,, \tag{3.49}$$

můžeme rovnici (3.46) přepsat na tvar

$$x_n(k + 1) = \frac{1}{a_0}\left[y(k) - a_1\, x_n(k) - a_2\, x_{n-1}(k) - \ldots - a_n\, x_1(k)\right]. \tag{3.50}$$

Rovnice (3.47) je nyní se stavovými veličinami (3.48) a (3.49)

$$v(k) = b_0\, x_n(k + 1) + b_1\, x_n(k) + \ldots + b_n\, x_1(k)\,. \tag{3.51}$$

Dosadíme-li v (3.52) za $x_n(k + 1)$ z (3.50), dostaneme

$$\begin{aligned} v(k) = {} & \frac{b_0}{a_0}\left[y(k) - a_1\, x_n(k) - a_2\, x_{n-1}(k) - \ldots - a_n\, x_1(k)\right] + \\ & + b_1\, x_n(k) + \ldots + b_n\, x_1(k)\,, \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned} v(k) = {} & \frac{b_0}{a_0}\, y(k) + \left(b_1 - \frac{b_0 a_1}{a_0}\right) x_n(k) + \left(b_2 - \frac{b_0 a_2}{a_0}\right) x_{n-1}(k) + \ldots \\ & \ldots + \left(b_n - \frac{b_0 a_n}{a_0}\right) x_1(k)\,. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Rovnice (3.48) a (3.50) určují první stavovou rovnici

$$\begin{bmatrix} x_1(k + 1) \\ x_2(k + 1) \\ \vdots \\ x_n(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} & \ldots & & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{a_0} \end{bmatrix} y(k) \tag{3.54}$$

a rovnice (3.53) určuje druhou stavovou rovnici

$$v(k) = \left[\left(b_n - \frac{b_0 a_n}{a_0}\right), \ldots, \left(b_1 - \frac{b_0 a_1}{a_0}\right)\right] \left[x_1(k), \ldots, x_n(k)\right]^{\mathrm{T}} + \frac{b_0}{a_0}\, y(k)\,. \tag{3.55}$$

Obě rovnice můžeme stručně napsat takto:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \boldsymbol{A}\, \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{B}\, y(k)\,, \tag{3.56}$$
$$\mathbf{v}(k) = \boldsymbol{C}\, \mathbf{x}(k) + H\, y(k)\,. \tag{3.57}$$

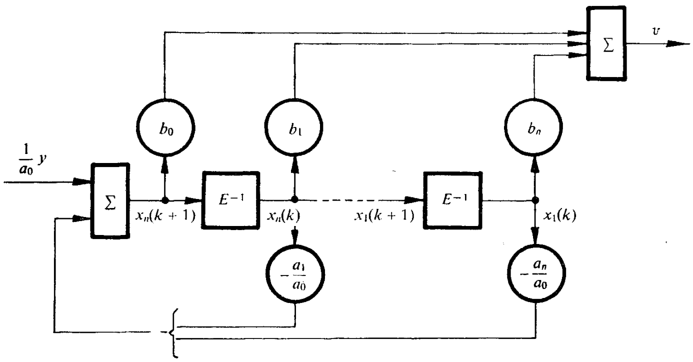
Význam jednotlivých maticových operátorů a vektorů vyplývá z porovnání s rovnicemi (3.54) a (3.55). Jedná-li se o regulovanou soustavu, kdy $b_0 = 0$, zjednoduší se stavová rovnice (3.55). Z (3.54) a (3.55) je zřejmé, že je účelné upravit původní diferenční rovnici (3.41) tak, aby $a_0 = 1$.

Blokové schéma stavových rovnic je uvedeno v obr. 3.4.

Příklad. Přenos číslicového korekčního členu v transformaci Z je dán výrazem

$$P(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{2 + 3{,}6z^{-1} - 0{,}8z^{-2}}{1 + 0{,}7z^{-1} + 0{,}1z^{-2}}.$$

Sestavme příslušné stavové rovnice.



Obr. 3.4.

Řešení. Daný přenos přepišme na tvar odpovídající rovnici (3.41)

$$0{,}1e_2(k-2) + 0{,}7e_2(k-1) + e_2(k) =$$
$$= 2e_1(k) + 3{,}6e_1(k-1) - 0{,}8e_1(k-2).$$

První stavovou rovnici sestavíme podle vzoru (3.54)

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -0{,}1, & -0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(k)$$

a druhou stavovou rovnici podle vzoru (3.55)

$$v(k) = [-1, 2{,}2]\,[x_1(k)\, x_2(k)]^{\mathrm{T}} + 2y(k).$$

3.22 *Postup II — stavové veličiny jsou lineární kombinací hodnot vstupní a výstupní veličiny soustavy*

Jednorozměrová soustava

Napišme rovnici (3.41) v tomto uspořádání

$$a_n v(k) + a_{n-1} v(k+1) + \ldots + a_1 v(k+n-1) + a_0 v(k+n) = \tag{3.58}$$
$$= b_0 v(k+n) + b_1 v(k+n-1) + \ldots + b_n y(k)$$

a zaveďme tyto stavové veličiny

$$x_1(k) = a_0 v(k) - b_0 y(k)\,, \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} x_2(k) &= a_1 v(k) + a_0 v(k+1) - b_0 y(k+1) - b_1 y(k) \\ x_3(k) &= a_2 v(k) + a_1 v(k+1) + a_0 v(k+2) - \\ &\quad - b_0 y(k+2) - b_1 y(k+1) - b_2 y(k)\,, \\ &\vdots \\ x_n(k) &= a_{n-1} v(k) + a_{n-2} v(k+1) + \ldots + a_0 v(k+n-1) - \ldots \\ &\quad \ldots - b_0 y(k+n-1) - \ldots - b_{n-2} y(k+1) - b_{n-1} y(k)\,. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Z rovnice (3.59) vypočteme $v(k)$ a dosadíme do všech rovnic (3.60) a v těchto rovnicích nahradíme všechny veličiny $v(k+i)$ a $y(k+i)$, $i = 1, 2, \ldots, k+n-1$ stavovými veličinami $x_\nu(k+1)$. Dostaneme

$$v(k) = \frac{1}{a_0} x_1(k) + \frac{b_0}{a_0} y(k)\,, \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned} x_2(k) &= \frac{a_1}{a_0} x_1(k) + x_1(k+1) - \left(b_1 - \frac{a_1}{a_0} b_0\right) y(k)\,, \\ x_3(k) &= \frac{a_2}{a_0} x_1(k) + x_2(k+1) - \left(b_2 - \frac{a_2}{a_0} b_0\right) y(k)\,, \\ &\vdots \\ x_n(k) &= \frac{a_{n-1}}{a_0} x_1(k) + x_{n-1}(k+1) - \left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_0} b_0\right) y(k)\,. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Původní diferenční rovnici (3.58) můžeme nyní vyjádřit pomocí stavových veličin takto:

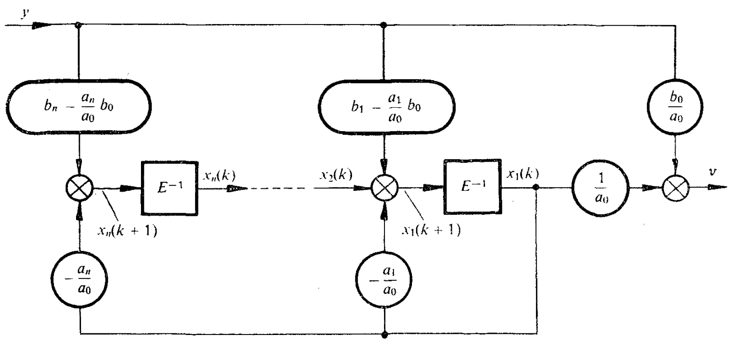
$$0 = \frac{a_n}{a_0} x_1(k) + x_n(k+1) - \left(b_n - \frac{a_n}{a_0} b_0\right) y(k)\,. \tag{3.63}$$

Rovnice (3.62) a (3.63) určují první stavovou rovnici

$$(3.64)\quad \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{a_0}, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ -\frac{a_2}{a_0}, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_n}{a_0}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - \frac{a_1}{a_0} b_0 \\ b_2 - \frac{a_2}{a_0} b_0 \\ \vdots \\ b_n - \frac{a_n}{a_0} b_0 \end{bmatrix} y(k) .$$

Druhou stavovou rovnici vyjadřuje vztah (3.61). Rovnice (3.64) a (3.61) ve vektorově maticovém zápisu jsou

$$(3.65)\quad \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,y(k) , \\ \mathbf{v}(k) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\,\mathbf{y}(k) , \end{aligned}$$



Obr. 3.5.

kde význam jednotlivých maticových operátorů a vektorů vyplývá z porovnání s rovnicí (3.64). S $b_0 = 0$ se zjednoduší rovnice (3.64) i (3.61). Z těchto rovnic je též patrno, že je účelné upravit původní diferenční rovnici (3.58) tak, aby $a_0 = 1$.

Blokové schéma stavových rovnic je uvedeno na obr. 3.5.

Příklad 1. Sestavme stavové rovnice k příkladu odst. 3.21!

Řešení. Podle (3.65) a (3.63) je

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}7, & 1 \\ -0{,}1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2{,}2 \\ -1 \end{bmatrix} y(k) ,$$

$$v(k) = x_1(k) + 2y(k) .$$

Příklad 2. Je dán diskrétní přenos spojité části regulačního obvodu

$$G_1(z, 0) = \frac{0{,}1306z^{-1} + 0{,}4094z^{-2} + 0{,}0792z^{-3}}{1 - 2{,}2130z^{-1} + 1{,}5809z^{-2} - 0{,}3679z^{-3}},$$

který v sobě zahrnuje tvarovací člen nultého řádu, integrační servomotor s regulačním orgánem a regulovanou soustavu. Vypočtěme odezvu na jednotkový skok vstupního signálu $y(k) = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Řešení. Příklad můžeme řešit tak, že přenos $G_1(z, 0)$ vynásobíme obrazem vstupního signálu $Y(z) = 1/(1 - z^{-1})$ a provedeme pak dělení výsledných polynomů. Můžeme však též napsat stavové rovnice podle (3.65) a odezvu vypočítat na číslicovém počítači

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}2130, & 1, & 0 \\ -1{,}5809, & 0, & 1 \\ 0{,}3679, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}1306 \\ 0{,}4094 \\ 0{,}0792 \end{bmatrix} y(k),$$

$$v(k) = x_1(k).$$

Pro $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$ vypočteme:

k	0	1	2	3	4	5
$v(k)$	0	0,1306	0,8290	2,2474	4,3300	6,9537

3.23 *Stavová rovnice diskrétní soustavy při působení akční a poruchové veličiny*

Diferenční rovnici soustavy, na jejímž vstupu působí akční veličina y i poruchová veličina u, napišme ve shodě s (3.58) ve tvaru

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\, v(k+i) = \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}\, y(k+i) + \sum_{i=0}^{n} c_{n-i}\, u(k+i). \tag{3.66}$$

Shodným postupem jako v odstavci 3.22 dospějeme k řešení

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{a_0}, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ -\frac{a_2}{a_0}, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_n}{a_0}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - \frac{a_1}{a_0} b_0, & c_1 - \frac{a_1}{a_0} c_0 \\ b_2 - \frac{a_2}{a_0} b_0, & c_2 - \frac{a_2}{a_0} c_0 \\ \vdots & \vdots \\ b_n - \frac{a_n}{a_0} b_0, & c_n - \frac{a_n}{a_0} c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k) \end{bmatrix}, \tag{3.67}$$

$$v(k) = \frac{1}{a_0} x_1(k) + \frac{b_0}{a_0} y(k) + \frac{c_0}{a_0} u(k) . \tag{3.68}$$

Stavové veličiny jsou definovány takto:

$$x_1(k) = a_0\, v(k) - b_0\, y(k) - c_0\, u(k) , \tag{3.69}$$

$$x_2(k) = a_1\, v(k) + x_1(k + 1) - b_1\, y(k) - c_1\, u(k) , \tag{3.70}$$

$$\vdots$$

$$x_n(k) = a_{n-1}\, v(k) + x_{n-1}(k + 1) - b_{n-1}\, y(k) - c_{n-1}\, u(k) .$$

Rovnice (3.66) se stavovými veličinami (3.69) a (3.70) nabývá tvaru

$$0 = a_n\, v(k) + x_n(k + 1) - b_n\, y(k) - c_n\, u(k) . \tag{3.71}$$

3.24 *Mnohorozměrová diskrétní soustava*

Dynamiku N-rozměrové stacionární lineární diskrétní soustavy popisuje soustava lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(E)\, v_j(k) = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(E)\, y_j(k) , \quad i = 1, 2, \ldots, N . \tag{3.72}$$

Počet akčních veličin je podle rovnice (3.72) roven počtu regulovaných veličin, $a_{ij}(E)$ a $b_{ij}(E)$ jsou polynomy v E stupně n_{ij} a E znamená posunutí ve smyslu vztahu (3.42). Systém rovnic (3.72) můžeme též napsat v maticové formě

$$^{d}\mathbf{A}(E)\, \mathbf{v}(k) = {^{d}\mathbf{B}}(E)\, \mathbf{y}(k) , \tag{3.73}$$

přičemž $a_{ij}(E)$ a $b_{ij}(E)$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, jsou prvky matic $^{d}\mathbf{A}(E)$ a $^{d}\mathbf{B}(E)$.

Rozveďme matice $^{d}\mathbf{A}(E)$ a $^{d}\mathbf{B}(E)$ na součet matic tak, aby prvky jednotlivých matic po provedení rozkladu byly násobeny stejnou mocninou operátoru E:

$$\begin{aligned} &({^{d}\mathbf{A}_n} + {^{d}\mathbf{A}_{n-1}}E + \ldots + {^{d}\mathbf{A}_1}E^{n-1} + {^{d}\mathbf{A}_0}E^{n})\, \mathbf{v}(k) = \\ &= ({^{d}\mathbf{B}_0}E^{n} + {^{d}\mathbf{B}_1}E^{n-1} + \ldots + {^{d}\mathbf{B}_{n-1}}E + {^{d}\mathbf{B}_n})\, \mathbf{y}(k) . \end{aligned} \tag{3.74}$$

Rovnice (3.74) je obdobná jako rovnice (3.58) až na to, že v (3.74) se vyskytují místo konstant a_ν a b_ν matice konstant $^{d}\mathbf{A}_\nu$ a $^{d}\mathbf{B}_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ a místo veličin v a y vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{y}$.

Obdobně jako v odstavci 3.22 dostaneme po zavedení vektorů stavových veličin

$$\mathbf{x}_\nu = [x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \ldots, x_{\nu N}] , \quad \nu = 1, 2, \ldots, n :$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1, & 1, & 0, \ldots, 0 \\ -\mathbf{A}_2, & 0, & 1, \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\mathbf{A}_n, & 0, & 0, \ldots, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix} \mathbf{y}(k) , \tag{3.75}$$

kde

$$A_l = {}^{\mathrm{d}}A_l {}^{\mathrm{d}}A_0^{-1}\,, \quad l = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{3.76}$$

$$B_l = {}^{\mathrm{d}}B_l - {}^{\mathrm{d}}A_l {}^{\mathrm{d}}A_0^{-1} {}^{\mathrm{d}}B_0\,, \quad l = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{3.77}$$

$$\mathbf{v}(k) = {}^{\mathrm{d}}A_0^{-1}\, \mathbf{x}_1(k) + {}^{\mathrm{d}}A_0^{-1} {}^{\mathrm{d}}B_0\, \mathbf{y}(k)\,. \tag{3.78}$$

Ve stavových rovnicích (3.75) a (3.78) je

$$\mathbf{y}(k) = [y_1(k), \ldots, y_N(k)]^{\mathrm{T}} \quad \text{a} \quad \mathbf{v}(k) = [v_1(k), \ldots, v_N(k)]^{\mathrm{T}}\,.$$

Ze vztahů (3.76) až (3.78) je zřejmé, že převedení soustavy diferenčních rovnic na stavové rovnice můžeme provádět naznačeným postupem jen v případě, kdy matice ${}^{\mathrm{d}}A_0$ je regulární. Je-li singulární, můžeme uvést ze stejných důvodů jako v kapitole 3.14 jen postup bez obecného explicitního řešení.

Protože s regulární maticí ${}^{\mathrm{d}}A_0$ je řešení prostým dosazením do výsledných rovnic (3.75) a (3.78), uvedeme dále jen příklad řešení se singulární maticí ${}^{\mathrm{d}}A_0$.

Příklad. Je dána dvourozměrová soustava diferenčními rovnicemi

$$\begin{aligned}
&0{,}1v_1(k-2) + 0{,}7v_1(k-1) + v_1(k) - 0{,}09v_2(k-2) + v_2(k) = \\
&= 0{,}5y_1(k-1) + 0{,}6y_1(k-2) + 2y_2(k-1) + y_2(k-2)\,, \\
&0{,}3v_1(k-2) - 1{,}1v_1(k-1) + v_1(k) + 0{,}2v_2(k-1) + v_2(k) = \\
&= 4y_1(k-1) + 2y_1(k-2) + 0{,}2y_2(k-1) - 0{,}5y_2(k-2)\,.
\end{aligned}$$

Sestavme příslušné stavové rovnice!

Řešení. Podle zadaných diferenčních rovnic je

$${}^{\mathrm{d}}A_0 = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{bmatrix},$$

tj. singulární matice, takže nemůžeme použít vzorců (3.75) a (3.78). Převedení dané soustavy diferenčních rovnic můžeme však provést eliminací veličin $v_1(k)$ a $v_2(k)$ z rovnic definujících stavové veličiny

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(k) &= {}^{\mathrm{d}}A_0\, \mathbf{v}(k)\,, \\
\mathbf{x}_2(k) &= {}^{\mathrm{d}}A_1\, \mathbf{v}(k) + \mathbf{x}_1(k+1) - {}^{\mathrm{d}}B_1\, \mathbf{y}(k)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

a z původní soustavy diferenčních rovnic vyjádřených pomocí definovaných stavových veličin

$$0 = {}^{\mathrm{d}}A_2\, \mathbf{v}(k) + \mathbf{x}_2(k+1) - {}^{\mathrm{d}}B_2\, \mathbf{y}(k)\,. \tag{3.80}$$

Z první rovnice (3.79) plyne

$$\begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix},$$

$$x_{11}(k) = v_1(k) + v_2(k) = x_{12}(k)\,. \tag{3.81}$$

Z druhé rovnice (3.79) dostaneme

$$\begin{bmatrix} x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7, & 0 \\ -1{,}1, & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{11}(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5, & 2 \\ 4, & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix},$$

(3.82) $$x_{21}(k) = 0{,}7v_1(k) + x_{11}(k+1) + 0{,}5y_1(k) + 2y_2(k)\,,$$
$$x_{22}(k) = -1{,}1v_1(k) + 0{,}2v_2(k) + x_{11}(k+1) + 4y_1(k) + 0{,}2y_2(k)\,.$$

Odečtením rovnic (3.82) vyloučíme $x_{11}(k+1)$ a dostaneme

(3.83) $$x_{11}(k) - x_{22}(k) = 1{,}8v_1(k) - 0{,}2v_2(k) + 3{,}5y_1(k) - 1{,}8y_2(k)\,.$$

Z rovnic (3.81) a (3.83) určíme nyní $v_1(k)$ a $v_2(k)$:

(3.84) $$v_1(k) = 0{,}1x_{11}(k) + 0{,}5x_{21}(k) - 0{,}5x_{22}(k) - 1{,}75y_1(k) + 0{,}9y_2(k)\,,$$
$$v_2(k) = 0{,}9x_{11}(k) - 0{,}5x_{21}(k) + 0{,}5x_{22}(k) + 1{,}75y_1(k) - 0{,}9y_2(k)\,.$$

Rovnice (3.80) je po vyjádření matic

$$0 = \begin{bmatrix} 0{,}1, & -0{,}09 \\ 0{,}3, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{21}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}6, & 1 \\ 2\,, & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix},$$

(3.85) $$0 = 0{,}1v_1(k) - 0{,}09v_2(k) + x_{21}(k+1) - 0{,}6y_1(k) - y_2(k)\,,$$
$$0 = 0{,}3v_1(k) \qquad + x_{22}(k+1) - 2y_1(k) + 0{,}5y_2(k)\,.$$

Dosadíme-li nyní do kterékoliv z rovnic (3.82) a do rovnic (3.85) za $v_1(k)$ a $v_2(k)$ vztahy (3.84), můžeme explicitně vyjádřit $x_{11}(k+1)$, $x_{21}(k+1)$ a $x_{22}(k+1)$ a sestavit první stavovou rovnici

$$\begin{bmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{21}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}07, & 0{,}65, & 0{,}35 \\ 0{,}071, & -0{,}095, & +0{,}095 \\ -0{,}03, & -0{,}15, & +0{,}15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}725, & 1{,}37 \\ 0{,}9325, & 0{,}829 \\ 2{,}52, & -0{,}527 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}.$$
(3.86)

Druhá stavová rovnice vyjadřující převedení stavových veličin na veličiny $v_1(k)$ a $v_2(k)$ je definována vztahy (3.84)

(3.87) $$\begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1, & 0{,}5, & -0{,}5 \\ 0{,}9, & -0{,}5, & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1{,}75, & 0{,}9 \\ +1{,}75, & -0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}.$$

4. TRANSFORMACE SOUŘADNIC

Mějme dva vektorové prostory ${}^1X$ a ${}^2X$ a maticový operátor $\mathbf{F}$ jímž můžeme přiřadit každému prvku ${}^1\mathbf{x} \in {}^1X$ jednoznačně prvek ${}^2\mathbf{x} \in {}^2X$ podle vztahu

(4.1) $${}^2\mathbf{x} = \mathbf{F}\,{}^1\mathbf{x}\,.$$

Pro vektor ${}^1\mathbf{x}(t)$ můžeme psát

$$ {}^1\mathbf{x}'(t) = {}^1\mathbf{A}\,{}^1\mathbf{x}(t) + {}^1\mathbf{B}\,y(t)\,, \tag{4.2} $$

$$ v(t) = {}^1\mathbf{C}\,{}^1\mathbf{x}(t) + {}^1H\,y(t)\,. \tag{4.3} $$

a pro vektor ${}^2\mathbf{x}(t)$

$$ {}^2\mathbf{x}'(t) = {}^2\mathbf{A}\,{}^2\mathbf{x}(t) + {}^2\mathbf{B}\,y(t)\,, \tag{4.4} $$

$$ v(t) = {}^2\mathbf{C}\,{}^2\mathbf{x}(t) + {}^2H\,y(t)\,. \tag{4.5} $$

Z rovnice (4.1) plyne

$$ {}^1\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}^{-1}\,{}^2\mathbf{x}(t)\,. \tag{4.6} $$

Po dosazení (4.6) do (4.2) a (4.3) dostaneme

$$ \mathbf{F}^{-1}\,{}^2\mathbf{x}'(t) = {}^1\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\,{}^2\mathbf{x}(t) + {}^1\mathbf{B}\,y(t)\,, \tag{4.7} $$

$$ v(t) = {}^1\mathbf{C}\mathbf{F}^{-1}\,{}^2\mathbf{x}(t) + {}^1H\,y(t)\,. \tag{4.8} $$

Rozšíříme-li rovnici (4.7) maticovým operátorem $\mathbf{F}$ zleva, je

$$ {}^2\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}\,{}^1\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\,{}^2\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}\,{}^1\mathbf{B}\,y(t)\,. \tag{4.9} $$

Porovnáme-li nyní (4.4) s (4.9) a (4.5) s (4.8), je zřejmě

$$ \begin{aligned} {}^2\mathbf{A} &= \mathbf{F}\,{}^1\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\,, \\ {}^2\mathbf{B} &= \mathbf{F}\,{}^1\mathbf{B}\,, \\ {}^2\mathbf{C} &= {}^1\mathbf{C}\mathbf{F}^{-1}\,, \\ {}^2H &= {}^1H\,. \end{aligned} \tag{4.10} $$

O čtvercových maticích ${}^1\mathbf{A}$ a ${}^2\mathbf{A}$ n-tého stupně říkáme, že jsou podobné, existuje-li taková regulární matice $\mathbf{F}$ n-tého stupně, že

$$ {}^2\mathbf{A} = \mathbf{F}\,{}^1\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}\,. $$

Prvky matic ${}^1\mathbf{A}$, ${}^2\mathbf{A}$ a $\mathbf{F}$ mohou být reálná nebo komplexní čísla.

Zvláštní význam má transformace matice $\mathbf{A}$. Napíšeme-li k matici $\mathbf{A}$ typu $(n;\,n)$ tzv. *charakteristickou matici*

$$ \mathbf{A}(\lambda) = \lambda\mathbf{E} - \mathbf{A} \tag{4.11} $$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice, je determinant charakteristické matice tzv. *charakteristickým mnohočlenem matice*. Položíme-li tento mnohočlen rovný nule, dostáváme charakteristickou rovnici původní diferenciální rovnice n-tého řádu.

Kořeny charakteristického polynomu nazýváme *vlastní čísla matice* $\mathbf{A}$. Jsou-li vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jednoduchá $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, pak existuje vždy taková transformace, že

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{J}_0\,; \quad \mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & \lambda_s \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Matice (4.12) je tzv. *Jordanova matice*, která má s polí prvního stupně. *Jordanovým polem* k-tého stupně nazýváme matici k-tého stupně tvaru

$$\begin{bmatrix} \lambda_i, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda_i, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & \lambda_i, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & \lambda_i \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

kde λ_i je reálné nebo komplexní číslo.

Celkový tvar Jordanovy matice je pak

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \mathbf{J}_1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & \mathbf{J}_v \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

kde jednotlivá pole $\mathbf{J}_i$, $i = 1, 2, \ldots, v$, jsou vyššího jak prvního stupně, tj. tvaru (4.13), avšak vlastní čísla jednotlivých polí $\mathbf{J}_i$ nemusí být nutně různá. K jednoznačnému určení tvaru Jordanovy matice je třeba určit tzv. *elementární dělitele* matice $\mathbf{A}(\lambda)$. Je-li matice $\mathbf{A}(\lambda)$ n-tého stupně a hodnosti h, určíme nejdříve *největší společné dělitele* $D_r(\lambda)$ všech subdeterminantů r-tého stupně matice $\mathbf{A}(\lambda)$ pro $r = 1, 2, \ldots, h$, $D_0(\lambda) = 1$ a sestavíme *invariantní faktory* (mnohočleny)

$$E_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, \quad r = 1, 2, \ldots, h\,, \tag{4.15}$$

které jsou prvky tzv. kanonické diagonální matice (normální diagonální matice) tvaru

$$\begin{bmatrix} E_1(\lambda), & 0, & \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\ 0, & E_2(\lambda), & \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, E_h(\lambda), & 0, \ldots, 0 \\ 0, & 0, & \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Matice (4.16) je ekvivalentní s maticí $\boldsymbol{A}(\lambda)$ n-tého stupně a hodnosti h. Invariantní faktory $E_r(\lambda)$, pokud jsou nenulové, mají u nejvyšších mocnin koeficient 1 a polynom $E_{r+1}(\lambda)$ je dělitelný polynomem $E_r(\lambda)$. Součin

$$E_1(\lambda)\, E_2(\lambda), \ldots, E_h(\lambda) \neq 0\,, \quad E_{h+1}(\lambda) = E_{h+2}(\lambda) = \ldots = E_n(\lambda) = 0\,.$$

Faktory $E_r(\lambda)$ se nazývají invariantními z následujícího důvodu. Jsou-li $\boldsymbol{A}(\lambda)$ a $\boldsymbol{B}(\lambda)$ dvě ekvivalentní matice můžeme transformovat jednu na druhou pomocí elementárních operací. Při tom se nemění největší společní dělitelé $D_r(\lambda)$ a tudíž ani polynomy $E_r(\lambda)$. Říkáme proto, že $E_r(\lambda)$, $r = 1, 2, \ldots, h$ jsou faktory (polynomy) neměnné tj. invariantní při přechodu od jedné matice k druhé s ní ekvivalentní.

Z rovnice (4.15) plyne, že

$$D_r(\lambda) = c\, E_1(\lambda)\, E_2(\lambda), \ldots, E_r(\lambda)\,, \tag{4.17}$$

kde c je nějaké nenulové reálné nebo komplexní číslo.

Rozložíme-li nyní každý (nenulový) invariantní faktor $E_r(\lambda)$ v součin mocnin různých kořenových činitelů $(\lambda - \alpha)^m$, pak každý takový činitel $(\lambda - \alpha)^m$ se nazývá *elementární dělitel* matice $\boldsymbol{A}(\lambda)$ a přísluší mu v Jordanově matici jedno pole.

Je možné dokázat, že aby dvě matice např. matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{J}$ byly podobné, $(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{FJF}^{-1})$, je nutné a postačující, aby měly tytéž invariantní faktory nebo, což je totéž, tytéž elementární dělitele.

Tuto vlastnost využijeme k sestavení Jordanovy matice k matici $\boldsymbol{A}$. Vezměme nějaký polynom

$$g(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\,.$$

Pak můžeme sestavit matici stupně m

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} -a_{m-1}, & 1, & 0, \ldots, 0 \\ -a_{m-2}, & 0, & 1, \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_1, & 0, & 0, \ldots, 1 \\ -a_0, & 0, & 0, \ldots, 0 \end{bmatrix}$$

a ověřit, že charakteristickým polynomem matice $\boldsymbol{L}$ je

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{m-1} + \lambda, & -1, & 0, \ldots, & 0 \\ a_{m-2}, & \lambda, & -1, \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1, & 0, & 0, \ldots, & -1 \\ a_0, & 0, & 0, \ldots, & \lambda \end{vmatrix} = g(\lambda)\,.$$

Je patrno, že minor k prvku a_0 charakteristické matice je ± 1 a proto největší společný dělitel

$$D_{m-1}(\lambda) = 1$$

a

$$E_m(\lambda) = D_m(\lambda)/D_{m-1}(\lambda) = D_m(\lambda) = g(\lambda),$$
$$E_1(\lambda) = \ldots = E_{m-1}(\lambda) = 1\,.$$

Rozložíme-li invariantní faktor $E_m(\lambda)$ na součin elementárních dělitelů $\prod_{i=1}^{m} (\lambda - \alpha_i)$, můžeme sestavit k matici **L** Jordanovu matici, která podle násobnosti vlastních čísel α_i je sestavena z polí typu (4.12) a (4.13). Provedeme-li naznačeným způsobem rozklad všech invariantních faktorů $E_r(\lambda)$, $r = 1, 2, \ldots, h$ matice **A**, pak Jordanova matice příslušná k matici **A** se sestaví ze všech Jordanových matic J_r, $r = 1, 2, \ldots, h$ příslušných jednotlivým invariantním faktorům $E_r(\lambda)$. Jestliže se elementární dělitelé v některých invariantních faktorech opakují, musí se nutně opakovat i v Jordanově matici **A**, aby byly splněny podmínky podobnosti.

Příklad 1. Nechť matice **A** je stupně $n = 10$ a hodnosti $h = 10$ a nechť její invariantní faktory jsou $E_1(\lambda) = \ldots = E_7(\lambda) = 1$, $E_8(\lambda) = \lambda + 2$, $E_9(\lambda) = (\lambda + 2)^2 (\lambda + 3)^2$ a $E_{10}(\lambda) = (\lambda + 2)^2 \cdot (\lambda + 3)^3$. Soustava elementárních dělitelů je tudíž $(\lambda + 2)$, $(\lambda + 2)^2$, $(\lambda + 2)^2$, $(\lambda + 3)^2$ a $(\lambda + 3)^3$. Příslušná Jordanova matice má tvar

$$\begin{bmatrix}
\boxed{-2} & \cdots & & & & & & & & 0 \\
0 & -2 & 1 & \cdots & & & & & & 0 \\
0 & 0 & -2 & \cdots & & & & & & 0 \\
0 & \cdots & & -2 & 1 & \cdots & & & & 0 \\
0 & \cdots & & 0 & -2 & \cdots & & & & 0 \\
0 & \cdots & & & & -3 & 1 & \cdots & & 0 \\
0 & \cdots & & & & 0 & -3 & \cdots & & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & -3 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & 0 & -3 & 1 \\
0 & \cdots & & & & & & 0 & 0 & -3
\end{bmatrix}$$

Jednotlivá pole jsou pro názornost ohraničena.

Příklad 2. Stanovme Jordanovu matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
-4, & -1, & -18, & 0, & 0, & 0 \\
16, & 4, & 65, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 4, & 1, & 5 \\
0, & 0, & 0, & -6, & -1, & -14 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 2
\end{bmatrix}.$$

Řešení. Matice $\mathbf{A}$ je quasidiagonální se dvěma poli, která označme $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{A}_2$, takže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1, & 0 \\ 0, & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}.$$

V takovém případě můžeme určit elementární dělitele každého pole odděleně. Pro pole $\mathbf{A}_1$ je charakteristická matice

$$\mathbf{A}_1(\lambda) = \lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \lambda + 4, & 1, & 18 \\ -16, & \lambda - 4, & -65 \\ 0, & 0, & \lambda - 1 \end{bmatrix}.$$

Snadno si ověříme, že největší společní dělitelé jsou $D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = 1$ a $D_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$. Invariantní faktory vypočteme podle (4.15). Dostaneme $E_3(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$, $E_2(\lambda) = E_1(\lambda) = 1$. Soustava elementárních dělitelů pro pole $\mathbf{A}_1$ je zřejmě λ^2, $(\lambda - 1)$.

Pro pole $\mathbf{A}_2$ je charakteristická matice

$$\mathbf{A}_2(\lambda) = \lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \lambda - 4, & -1, & -5 \\ 6, & \lambda + 1, & 14 \\ 0, & 0, & \lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

Největší společní dělitelé jsou $D_1(\lambda) = 1$, $D_2(\lambda) = 1$ a $D_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ a invariantní faktory jsou $E_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$, $E_2(\lambda) = 1$ a $E_1(\lambda) = 1$. Pro pole $\mathbf{A}_2$ je soustava elementárních dělitelů $(\lambda - 2)^2$ a $(\lambda - 1)$.

Nyní sestavíme Jordanovu matici pomocí elementárních dělitelů obou polí $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{A}_2$.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jiné možnosti určení Jordanovy matice jsou uvedeny v lit. [2].

Maticový operátor v rovnici (4.12) určíme pomocí tzv. *vlastních vektorů matice* $\mathbf{A}$. Pro jednoduchá vlastní čísla λ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ vyhovují vlastní vektory q_i rovnici

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, s\,. \tag{4.18}$$

Vlastní vektory $\mathbf{q}_{s+j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, příslušné m-násobenému vlastnímu číslu λ_{s+1} vyhovují vztahům

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{q}_{s+1} &= \lambda_{s+1}\mathbf{q}_{s+1}\,, \\ \mathbf{A}\mathbf{q}_{s+2} &= \mathbf{q}_{s+1} + \lambda_{s+1}\mathbf{q}_{s+2}\,, \\ \mathbf{A}\mathbf{q}_{s+m} &= \mathbf{q}_{s+m-1} + \lambda_{s+1}\mathbf{q}_{s+m}\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Podobně by bylo možné uvést vztahy pro určení vlastních vektorů příslušných dalším násobným vlastním číslům matice $\mathbf{A}$. Vztahy uvedené zde v souvislosti s transformací stavových rovnic příslušných diferenciálním rovnicím platí i pro stavové rovnice příslušné diferenčním rovnicím.

Příklad 3. Mějme stavovou rovnici

$$\mathbf{x}'(t) = {}^1\mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + {}^1\mathbf{B}\,y(t)\,, \quad v(t) = {}^1\mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)$$

kde

$${}^1\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -7, & 1 \\ -10, & 0 \end{vmatrix}, \quad {}^1\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad {}^1\mathbf{C} = [1,\ 0]\,.$$

Transformujme matici ${}^1\mathbf{A}$ na Jordanovu matici a proveďme též odpovídající transformaci matic ${}^1\mathbf{B}$ a ${}^1\mathbf{C}$.

Řešení. Charakteristická matice k matici ${}^1\mathbf{A}$ je

$$\begin{bmatrix} \lambda + 7, & -1 \\ 10, & \lambda \end{bmatrix}$$

a charakteristická rovnice je tudíž

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0\,,$$

jejíž kořeny jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$. Kořeny jsou jednoduché a proto podle (4.18) můžeme určit vlastní vektory q_1 a q_2.

Z rovnosti

$${}^1\mathbf{A}\mathbf{q}_1 = \lambda_1\mathbf{q}_1$$

plyne

$$\begin{aligned} -\ 7q_{11} + q_{21} &= -2q_{11}\,, \\ -10q_{11} \qquad &= -2q_{21}\,. \end{aligned}$$

Prvek q_{11} můžeme volit libovolně a prvek $q_{21} = 5q_{11}$. Podobně z rovnosti

$${}^1\mathbf{A}\mathbf{q}_2 = \lambda_2\mathbf{q}_2$$

zjistíme, že prvek q_{12} můžeme volit libovolně a pak prvek $q_{22} = 2q_{12}$. Zvolme $q_{11} = q_{12} = 1$, takže maticový operátor $\mathbf{Q}$ je

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 5, & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}, & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3}, & \frac{1}{3} \end{bmatrix};$$

$${}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2, & 0 \\ 0, & -5 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}\,{}^1\mathbf{A}\mathbf{Q}\,.$$

Podle (4.10) vypočteme nyní ${}^2\mathbf{B}$ a ${}^2\mathbf{C}$. Z porovnání první rovnice (4.10) s rovnicí (4.12) je zřejmě $\mathbf{F} = \mathbf{Q}^{-1}$ a $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{Q}$.

$${}^2\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\,{}^1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}, & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3}, & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix},$$

$${}^2\mathbf{C} = {}^1\mathbf{C}\mathbf{Q} = [1,\ 0]\begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 5, & 2 \end{bmatrix} = [1,\ 1]\,.$$

Příklad 4. Mějme stavovou rovnici

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= {}^1\mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + {}^1\mathbf{B}\,y(t)\,, \\ \mathbf{v}(t) &= {}^1\mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)\,, \end{aligned}$$

kde

$${}^1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\ 7, & 1, & 0 \\ -16, & 0, & 1 \\ -12, & 0, & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{C} = [1,\ 0,\ 0]\,.$$

Transformujme stavové rovnice tak, aby po transformaci matice ${}^2\mathbf{A}$ byla maticí Jordanovou.

Řešení. Nejdříve sestavíme charakteristickou rovnici podle (4.11)

$$\begin{vmatrix} \lambda + 7, & -1, & 0 \\ 16, & \lambda, & -1 \\ 12, & 0, & \lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 = 0$$

a vypočteme kořeny $\lambda_{1,2} = -2$, $\lambda_3 = -3$. Vzhledem k tomu, že jeden kořen je dvojnásobný, zjistíme nejdříve největší společné dělitele subdeterminantů matice $\mathbf{A}(\lambda)$, která je v daném příkladu stupně $n = 3$ a hodnosti $h = 3$. Zřejmě je $D_1(\lambda) = 1$, $D_2(\lambda) = 1$ a $D_3(\lambda) = (\lambda + 2)^2\,(\lambda + 3)$. Podle (4.15) jsou invariantní faktory

$$E_1(\lambda) = 1\,, \quad E_2(\lambda) = 1 \quad \text{a} \quad E_3(\lambda) = (\lambda + 2)^2\,(\lambda + 3)$$

a elementární dělitelé jsou $(\lambda + 2)^2$ a $(\lambda + 3)$. Jordanova matice je tedy tvaru

$$\mathbf{J} = {}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2, & 1, & 0 \\ 0, & -2, & 0 \\ 0, & 0, & -3 \end{bmatrix}.$$

Nyní vypočteme vlastní vektory $\mathbf{q}_1$ až $\mathbf{q}_3$. Podle (4.19) je

$$\begin{array}{rcl|rcl} {}^1\mathbf{A}\mathbf{q}_1 &=& -2\mathbf{q}_1\,, & {}^1\mathbf{A}\mathbf{q}_2 &=& \mathbf{q}_1 - 2\mathbf{q}_2\,, \\ -\ 7q_{11} + q_{12} &=& -2q_{11}\,, & -\ 7q_{21} + q_{22} &=& q_{11} - 2q_{21}\,, \\ -16q_{11} + q_{13} &=& -2q_{12}\,, & -16q_{21} + q_{23} &=& q_{12} - 2q_{22}\,, \\ -12q_{11} &=& -2q_{23}\,, & -12q_{21} &=& q_{13} - 2q_{23}\,. \end{array}$$

Vypočteme

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{q}_1 = [q_{11},\ 5q_{11},\ 6q_{11}]^{\mathrm{T}} & \mathbf{q}_2 = [q_{21},\ 5q_{21} + 1,\ 6q_{21} + 3]^{\mathrm{T}} \\ \quad = [1,\ 5,\ 6]^{\mathrm{T}}\,, & \quad = [0,\ 1,\ 3]^{\mathrm{T}}\,, \end{array}$$

jestliže jsme zvolili $q_{11} = 1$ a $q_{21} = 0$. Podle (4.18) je

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{A}\mathbf{q}_3 &= -3\mathbf{q}_3\,, \\ -\ 7q_{31} + q_{32} &= -3q_{31}\,, \\ -16q_{31} + q_{32} &= -3q_{32}\,, \\ -12q_{31} &= -3q_{33}\,. \end{aligned}$$

Vypočteme

$$\boldsymbol{q}_3 = [q_{31}, 4q_{31}, 4q_{31}]^T = [1, 4, 4]^T$$

s $q_{31} = 1$. Vlastní vektory $\boldsymbol{q}_1$ až $\boldsymbol{q}_3$ jsou vektory maticového operátoru $\boldsymbol{Q}$ k němuž určíme $\boldsymbol{Q}^{-1}$:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 5, & 1, & 4 \\ 6, & 3, & 4 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -8, & 3, & -1 \\ 4, & -2, & 1 \\ 9, & -3, & -1 \end{bmatrix}.$$

Podle (4.10) nyní vypočteme ${}^2\boldsymbol{B}$ a ${}^2\boldsymbol{C}$, při čemž $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}^{-1}$ a $\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{Q}$.

$${}^2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\,{}^1\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -8, & 3, & -1 \\ 4, & -2, & 1 \\ 9, & -3, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$${}^2\boldsymbol{C} = {}^1\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q} = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1 \\ 5, & 1, & 4 \\ 6, & 3, & 4 \end{bmatrix} = [1, 0, 1].$$

5. SPOJITÉ ŘEŠENÍ STAVOVÉ ROVNICE

5.1 Řešení v časové oblasti

Mějme stavovou rovnici regulované soustavy

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{u}(t), \tag{5.1}$$

kde $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou konstantní matice typu $(n; n)$ a $(n; m)$. Počáteční vektor $\boldsymbol{x}(t_0)$ v časovém okamžiku t_0 je známý stejně tak jako vstupní signál $y(t)$ pro $t \geqq t_0$. Úkolem je vypočítat vektor $\boldsymbol{x}(t)$ pro $t \geqq t_0$. V (5.1) $x(t)$ je stavový vektor regulované soustavy vyjadřující svými složkami dynamický stav soustavy v jakémkoliv okamžiku t, $\boldsymbol{y}(t)$ je vektor akčních veličin a $\boldsymbol{u}(t)$ je vektor poruchových veličin. Připomeňme, že u jednorozměrné lineární regulované soustavy je počet složek stavového vektoru $\boldsymbol{x}(t)$ určen řádem soustavy a vektor $\boldsymbol{y}(t)$ může mít jen jednu složku.

Homogenní rovnice příslušná k (5.1) je

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t), \tag{5.2}$$

jejíž řešení je

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\,\boldsymbol{x}(0), \tag{5.3}$$

kde $\boldsymbol{x}(0)$ je vektor počátečních podmínek a $e^{\boldsymbol{A}t}$ můžeme definovat pomocí rozvoje v mocninnou řadu, jak uvedeno v (5.15). Zaveďme

$$e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)} = \Phi(t - t_0), \tag{5.4}$$

takže (5.3) můžeme přepsat na tvar

$$x(t) = \Phi(t - t_0)\, x(0)\,. \tag{5.5}$$

Řešení nehomogenní rovnice (5.1) nechť je

$$x(t) = \Phi(t - t_0)\, C_1(t)\,. \tag{5.6}$$

Derivujeme-li rovnici (5.6) podle t, dostaneme

$$x'(t) = A\, x(t) + \Phi(t - t_0)\, C_1'(t)\,. \tag{5.7}$$

Z porovnání (5.1) a (5.7) plyne

$$\Phi(t - t_0)\, C_1'(t) = B\, y(t) + u(t) \tag{5.8}$$

odkud

$$C_1(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau - t_0)\,[B\, y(\tau) + u(\tau)]\, d\tau + C_2\,. \tag{5.9}$$

Řešení rovnice (5.1) je tudíž

$$x(t) = \Phi(t - t_0)\, C_2 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)\,[B\, y(\tau) + u(\tau)]\, d\tau\,. \tag{5.10}$$

Protože $\Phi(t - t_0)$ nezávisí na integrační proměnné τ, mohli jsme v rovnici (5.10) psát

$$\Phi(t - t_0)\, \Phi^{-1}(\tau - t_0) = e^{A(t - t_0)}\, e^{-A(\tau - t_0)} = e^{A(t - \tau)} = \Phi(t - \tau)\,.$$

Vektor C_2 vypočteme z počátečních podmínek. Pro $t = t_0$ je

$$x(t_0) = \Phi(0)\, C_2 = C_2\,, \tag{5.11}$$

takže výsledný tvar řešení (5.1) je

$$x(t) = \Phi(t - t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)\,[B\, y(\tau) + u(\tau)]\, d\tau\,. \tag{5.12}$$

Poznamenejme, že

$$\Phi(t) = e^{At}$$

je tzv. *fundamentální matice* soustavy, pro kterou snadno odvodíme tyto vlastnosti:

$$\begin{aligned} \Phi(-t) &= e^{-At} = \Phi^{-1}(t)\,, \\ \Phi(t + t_0) &= \Phi(t)\, \Phi(t_0)\,, \\ \Phi(t - t_0) &= \Phi(t)\, \Phi^{-1}(t_0)\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Numerický výpočet $\boldsymbol{x}(t)$ se na číslicovém počitači provádí tak, že se využívá rozvoje funkce $e^{\boldsymbol{A}t}$ v řadu

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3t^3}{3!} + \ldots, \tag{5.15}$$

při čemž se bere tolik členů řady, kolik je třeba k dosažení žádané přesnosti výsledku. Výpočet mocnin matice $\boldsymbol{A}$ se podstatně zjednoduší, transformujeme-li matici $\boldsymbol{A}$ na Jordanovu matici. Je-li Jordanova matice tvaru (4.12) je její k-tá mocnina

$$\boldsymbol{J}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k, 0, \ldots, 0 \\ 0, \lambda_2^k, \ldots, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, 0, \ldots, \lambda_s^k \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

Je-li Jordanova matice tvaru (4.14), můžeme ji rozdělit na součet dvou matic

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I}_\lambda + \boldsymbol{I}_1, \tag{5.17}$$

kde matice $\boldsymbol{I}_\lambda$ má v hlavní diagonále vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{I}_1$ má v superdiagonále* jedničky a nuly podle matice $\boldsymbol{J}$. Výpočet k-té mocniny pak provedeme podle binomické věty

$$\boldsymbol{J}^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \boldsymbol{I}_\lambda^{k-i} \boldsymbol{I}_1^i. \tag{5.18}$$

Jestliže $\boldsymbol{I}_1$ má v superdiagonále jen jedničky (žádné nuly), pak s každou mocninou se diagonála jedniček posouvá do následující diagonály směrem k pravému hornímu prvku. To znamená, že k-tá mocnina takové matice $\boldsymbol{I}_1$ stupně n je rovna nule pro $k \geqq n$. Má-li $\boldsymbol{I}_1$ v superdiagonále jedničky i nuly, může být k-tá mocnina takové matice $\boldsymbol{I}_1$ nulová i pro $k < n$. Vidíme, že aplikace Jordanovy matice může být velmi výhodná.

Také při analytickém řešení můžeme s výhodou použít Jordanovu matici. Pro Jordanovu matici, která má s polí prvního stupně, zřejmě platí

$$e^{\boldsymbol{J}_0 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}, 0, \ldots, 0 \\ 0, e^{\lambda_2 t}, \ldots, 0 \\ 0, 0, \ldots, e^{\lambda_s t} \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

a pro Jordanovu matici tvaru (4.13) stupně k je

$$\boldsymbol{J}_i = \lambda_i \boldsymbol{E} + \boldsymbol{I}_1; \quad e^{\boldsymbol{J}_i t} = e^{\lambda_i t} e^{\boldsymbol{I}_1 t}, \tag{5.20}$$

* Superdiagonála je diagonála nad hlavní diagonálou.

$$(5.21) \qquad e^{I_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1, & t, & \frac{t_2}{2}, & \dots, & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0, & 1, & t, & \dots, & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 1 \end{bmatrix}.$$

Matici (5.21) snadno odvodíme, rozvedeme-li exp $I_1 t$ v řadu. Součet k členů této řady násobený exp $\lambda_i t$ je matice (5.21).

K výpočtu exp At použijeme toho, že pro jakoukoliv matici M platí

$$(5.22) \qquad \underbrace{(QMQ^{-1})^k = (QMQ^{-1})(QMQ^{-1}), \dots, (QMQ^{-1})}_{k\text{-krát}} = QM^kQ^{-1}.$$

Proto

$$e^{tA} = e^{tQJQ^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k \frac{t^kJ^k}{k!} Q^{-k} = Q\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^kJ^k}{k!}\right) Q^{-1}$$

a tudíž

$$(5.23) \qquad e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}.$$

Příklad. Mějme stavové rovnice

$$x'(t) = A\,x(t) + B\,y(t),$$
$$v(t) = C\,x(t).$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} -3, & 1 \\ -2, & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1,\ 0].$$

Stanovme obecný výraz pro vektor $x(t)$, známe-li $x(t_0)$ a $y(t)$.

Řešení. Podle (4.11) sestavíme charakteristickou rovnici

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3, & -1 \\ 2, & \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

a určíme vlastní čísla matice A: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Jordanova matice je

$$J = \begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -2 \end{bmatrix}.$$

Podle (4.18) vypočteme maticové operátory

$$Q = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 2, & 1 \end{bmatrix}; \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1, & 1 \\ 2, & -1 \end{bmatrix}.$$

Nyní podle (5.23) vypočteme

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t}, & 0 \\ 0, & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1, & 1 \\ 2, & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t}, & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}), & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

a konečně sestavíme hledaný vektor $\mathbf{x}(t)$ podle (5.12)

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -e^{-(t-t_0)} + 2e^{-2(t-t_0)}, & e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} \\ -2[e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)}], & 2e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} y(\tau)\, d\tau .$$

5.2 Souvislost řešení s Laplaceovou transformací

Laplaceův obraz rovnice (5.1) je

(5.24) $$p\, \mathbf{X}(p) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\, \mathbf{X}(p) + \mathbf{B}\, y(p) + \mathbf{U}(p)\,,$$

který můžeme upravit na tvar

(5.25) $$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})\, \mathbf{X}(p) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\, Y(p) + \mathbf{U}(p)\,.$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice, takže obraz stavového vektoru je

(5.26) $$\mathbf{X}(p) = (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\, \mathbf{x}(0) + (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\, [\mathbf{B}\, Y(p) + \mathbf{U}(p)]\,.$$

Porovnáme-li (5.26) s (5.12) je patrno, že

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = L[e^{\mathbf{A}t}] = L[\Phi(t)]\,.$$

Poslední výraz též plyne přímo z definice Laplaceova obrazu, aplikujeme-li ji na funkci $e^{\mathbf{A}t}$. Druhý člen na pravé straně rovnice (5.26) můžeme v časové oblasti vyjádřit konvolutorním integrálem. Po zpětné transformaci tedy dostaneme

(5.27) $$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\, \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)\, [\mathbf{B}\, y(\tau) + \mathbf{u}(\tau)]\, d\tau\,.$$

Abychom dospěli k výsledku shodnému s (5.12) je třeba provést ještě několik úprav. Rovnici (5.27) napišme pro $t = t_0$

(5.28) $$\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_0)\, \mathbf{x}(0) + \int_0^{t_0} \Phi(t_0 - \tau)\, [\mathbf{B}\, y(\tau) + \mathbf{u}(\tau)]\, d\tau$$

a rozšiřme tuto rovnici zleva maticí $\Phi(t - t_0)$:

$$\Phi(t - t_0)\,\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t)\,\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_0} \Phi(t - \tau)\,[\mathbf{B}\,y(\tau) + \mathbf{u}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{5.29}$$

Z rovnice (5.27) vypočteme $\Phi(t)\,\mathbf{x}(0)$ a dosadíme do (5.29). Po několika úpravách dostaneme stavovou rovnici v žádaném tvaru (5.12).

Příklad. Vypočtěme vektor $\mathbf{x}(t)$ příkladu odst. 5.1 pomocí Laplaceovy transformace.

Řešení.

$$L[\Phi(t)] = [p\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} p + 3, & -1 \\ 2\ , & p \end{bmatrix}^{-1},$$

$$L[\Phi(t)] = \begin{bmatrix} \dfrac{p}{\Delta_A(p)} & \dfrac{1}{\Delta_A(p)} \\ \dfrac{-2}{\Delta_A(p)} & \dfrac{p + 3}{\Delta_A(p)} \end{bmatrix},$$

kde

$$\Delta_A(p) = p^2 + 3p + 2 = (p + 1)(p + 2)$$

je determinant matice $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

Stanovíme-li k poslednímu výrazu předmět, je

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t}, & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}), & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}t}\,.$$

Závěr řešení je shodný jako v příkladu odst. 5.1.

6. DISKRÉTNÍ ŘEŠENÍ STAVOVÉ ROVNICE

6.1 Řešení v časové oblasti

Mějme stavovou rovnici diskrétní soustavy

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,y(k) + \mathbf{u}(k)\,, \tag{6.1}$$

kde $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou konstantní matice typu $(n;\,n)$ a $(n;\,m)$. Známý je počáteční vektor $\mathbf{x}(0)$ a vstupní signály, akční veličina $y(k) \in \langle 0,\, k - 1)$ a poruchová veličina $\mathbf{u}(k) \in \langle 0,\, k - 1)$.

Podle stavové rovnice (6.1) vypočteme

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\,y(0) + \mathbf{u}(0)\,,$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\,y(1) + \mathbf{u}(1) =$$
$$= \mathbf{A}^2\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{AB}\,y(0) + \mathbf{B}\,y(1) + \mathbf{A}\,\mathbf{u}(0) + \mathbf{u}(1)\,,$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\,y(2) + \mathbf{u}(2) =$$
$$= \mathbf{A}^3\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\,y(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\,y(1) + \mathbf{B}\,y(2) +$$
$$+ \mathbf{A}^2\,\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\,\mathbf{u}(1) + \mathbf{u}(2)$$

a obecně

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j\mathbf{B}\,y(k-j-1) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^j\,\mathbf{u}^{(k-j-1)}\,, \tag{6.2}$$

Je-li $\mathbf{x}(0) = 0$ a pro výstupní veličinu soustavy platí, že

$$v(k) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(k)\,,$$

pak s (6.2) je

$$\begin{aligned} v(k) &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^j\mathbf{B}\,y(k-j-1) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^j\,\mathbf{u}(k-j-1) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^j[\mathbf{B}\,y(k-j-1) + \mathbf{u}(k-j-1)]\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Z výrazů (6.2) a (6.3) je přímo patrný způsob numerického výpočtu a usnadnění výpočtu v případě, že $\mathbf{A}$ je Jordanova matice.

6.2 Váhová matice

Známe-li diskrétní hodnoty $s(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, s(0) = 0$, impulsní (váhové) charakteristiky soustavy a akční veličiny $y(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, pak pro $v(0) = 0$ můžeme vypočítat hodnoty odezvy soustavy pomocí konvolutorního součtu v jednotlivých okamžicích k

$$v(k) = \sum_{r=0}^{k-1} s(k-r)\,y(r)\,, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.4}$$

Rovnice (6.4) platí pro jednorozměrné vektory v a y. Pro soustavu, jejíž vektor v má rozměr N a vektor y rozměr M, můžeme rovnici (6.4) zobecnit na tvar

$$v(k) = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{M} s_{ij}(k-r)\,y_j(r)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N\,, \tag{6.5}$$

nebo na tvar s maticí $\mathbf{S}(k)$ s prvky $s_{ij}(k)$

$$v(k) = \sum_{r=0}^{k-1} \mathbf{S}(k-r)\,y(r)\,. \tag{6.6}$$

Rovnici (6.4) můžeme též napsat takto

$$(6.7) \qquad \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \\ \vdots \\ v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(1), & 0, & 0, & \dots, 0 \\ s(2), & s(1), & 0, & \dots, 0 \\ s(3), & s(2), & s(1), & \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s(k), & s(k-1), & s(k-2), & \dots, s(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix},$$

kde dolní trojúhelníková matice typu $(k; k)$ je *váhová matice* jednorozměrné soustavy.

Jestliže ve výrazu (6.3) bude $\boldsymbol{u}(k) = 0$, pak pro $j = k - r - 1$ bude

$$(6.8) \qquad v(k) = \sum_{r=0}^{k-1} \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-r-1}\boldsymbol{B}\, y(r)$$

a z porovnání rovnice (6.8) s rovnicí (6.6) plyne, že

$$(6.9) \qquad \boldsymbol{S}(k-r) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-r-1}\boldsymbol{B}\,, \quad k \geqq r + 1\,.$$

Příklad. Je dána diferenční rovnice soustavy

$$v(k) - 1{,}5v(k-1) + 0{,}5v(k-2) = y(k-1) + 3y(k-2)\,.$$

Vypočtěme váhovou matici této soustavy.

Řešení. Podle zadání a podle (3.64) a (3.61) jsou matice stavových rovnic

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1{,}5, & 1 \\ -0{,}5, & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{C} = [1,\ 0]\,,$$

Váhovou matici soustavy mohli bychom nyní již vypočítat podle vztahu (6.9). Výpočet se však zjednoduší, transformujeme-li matici $\boldsymbol{A}$ na Jordanovu. Řešením charakteristické rovnice určíme nejdříve vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$: $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 0{,}5$. Podle (4.18) vypočteme pak maticové operátory

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ -1, & -1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -1, & -2 \end{bmatrix}$$

a transformujeme matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$

$$^2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -1, & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}5, & 1 \\ -0{,}5, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ -1, & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0{,}5 \end{bmatrix},$$

$$^2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -1, & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix},$$

$$^2\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Q} = [1,\ 0] \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ -1, & -1 \end{bmatrix} = [2,\ 1]\,.$$

Nyní podle (6.9) je váhová matice

$$\mathbf{S}(k - r) = [2,\ 1] \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0{,}5 \end{bmatrix}^{k-r-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = 8 - 7 \,.\, 0{,}5^{k-r-1} \,.$$

Rovnice odezvy (6.7) s váhovou maticí je

$$\begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \\ \vdots \\ v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots, 0 \\ 4{,}5, & 1, & 0, & \dots, 0 \\ 6{,}25, & 4{,}5, & 1, & \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s(k), & s(k-1), & s(k-2), & \dots, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix} .$$

6.3 Souvislost řešení se Z-transformací

Jsou dány diskrétní stavové rovnice

(6.10) $$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\, \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\, y(k) + \mathbf{u}(k) \,,$$

(6.11) $$v(k) = \mathbf{C}\, \mathbf{x}(k) \,.$$

Určíme příslušné Z-obrazy těchto rovnic.
Z-obraz rovnice (6.10) je

(6.12) $$z\, \mathbf{X}(z) - z\, \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\, \mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\, Y(z) + \mathbf{U}(z) \,,$$

(6.13) $$(z\mathbf{E} - \mathbf{A})\, \mathbf{X}(z) = z\, \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\, Y(z) + \mathbf{U}(z) \,,$$

(6.14) $$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\, z\, \mathbf{x}(0) + (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\, [\mathbf{B}\, Y(z) + \mathbf{U}(z)] = \\ = (\mathbf{E} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1}\, \mathbf{x}(0) + z^{-1}(\mathbf{E} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1}\, [\mathbf{B}\, Y(z) + \mathbf{U}(z)] \,.$$

Z porovnání rovnice (6.14) s rovnicí (6.2) plyne, že Z-obrazem matice $\mathbf{A}$ umocněné na nezávisle proměnnou času k, $k = 0, 1, 2, \dots$ je

(6.15) $$Z[\mathbf{A}^k] = (\mathbf{E} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1} \,.$$

Výraz (6.15) můžeme též napsat jako posloupnost plynoucí bezprostředně z definice Z-obrazu, aplikujeme-li ji na funkci $\mathbf{A}^k$:

$$Z[\mathbf{A}^k] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k z^{-k} = E + \mathbf{A}z^{-1} + \mathbf{A}^2 z^{-2} + \dots$$

Z-obraz rovnice (6.11) je

(6.16) $$V(z) = \mathbf{C}\, \mathbf{X}(z) \,.$$

Příklad. Vypočteme Z-obraz k diferenční rovnici příkladu v odst. 6.2.

Řešení. Podle (6.15) je

$$Z[\boldsymbol{A}^k] = \begin{bmatrix} 1 - 1{,}5z^{-1}, & z^{-1} \\ 0{,}5z^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}} \begin{bmatrix} 1, & z^{-1} \\ -0{,}5z^{-1}, & 1 - 1{,}5z^{-1} \end{bmatrix}.$$

Nyní podle (6.14) je hledaný obraz

$$\boldsymbol{X}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\Delta(z)}, & \dfrac{z^{-1}}{\Delta(z)} \\ -\dfrac{0{,}5}{\Delta(z)}, & \dfrac{1 - 1{,}5z^{-1}}{\Delta(z)} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(0) + \begin{bmatrix} \dfrac{z^{-1} + 3z^{-2}}{\Delta(z)} \\ \dfrac{3z^{-1} - 5z^{-2}}{\Delta(z)} \end{bmatrix} Y(z),$$

kde $\Delta(z) = 1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}$.

Pro $\boldsymbol{x}(0) = 0$ a s ohledem na (6.16) je

$$V(z) = \frac{z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}} Y(z),$$

kde zlomek v posledním vztahu je diskrétní přenos soustavy, který je též přímo patrný ze zadané diferenční rovnice.

6.4 Spojitá soustava — vstupní signál posloupnost impulsů

Posuzujme nyní chování spojité soustavy na jejímž vstupu působí posloupnost impulsů, kterou vyjádříme jako posloupnost Diracových impulsů modulovanou spojitým vstupním signálem $y(t)$

$$y(t, t_k) = y(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - t_k^+), \tag{6.17}$$

kde $t_{k+1} > t_k$, ale jinak je t_k libovolné.

Vyjádříme podobně i poruchovou veličinu

$$u(t, t_k) = u(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - t_k^+) \tag{6.18}$$

a zavedeme

$$t = t_k + \sigma, \quad 0 < \sigma < t_{k+1} - t_k. \tag{6.19}$$

Dosadíme-li nyní za $y(\tau)$ a $u(\tau)$ v rovnici (5.12) podle (6.17) a (6.18), je

$$\boldsymbol{x}(t_k + \sigma) = \Phi(\sigma)\, \boldsymbol{x}(t_k) + \Phi(\sigma)\, [\boldsymbol{B}\, y(t_k^+) + \boldsymbol{u}(t_k^+)]. \tag{6.20}$$

Rovnice (6.20) je stavová rovnice spojité soustavy, na jejímž vstupu působí akční veličina y a na výstupu soustavy poruchová veličina u, při čemž obě veličiny jsou tvaru posloupnosti impulsů v okamžicích t_k^+, $k = 1, 2, \ldots$

Je-li interval $t_{k+1} - t_k = T =$ konst. a $\varepsilon = \sigma/T$, $0 < \varepsilon < 1$, změní se rovnice (6.20) na tvar

$$\mathbf{x}(kT + \varepsilon T) = \Phi(\varepsilon T)\,\mathbf{x}(kT) + \Phi(\varepsilon T)\left[\mathbf{B}\,y(kT^+) + \mathbf{u}(kT^+)\right]. \tag{6.21}$$

Pro $\varepsilon = 1$ je

$$\mathbf{x}((k + 1)\,T) = \Phi(T)\,\mathbf{x}(kT) + \Phi(T)\left[\mathbf{B}\,y(kT^+) + \mathbf{u}(kT^+)\right]. \tag{6.22}$$

Řešení rovnice (6.21) provedeme tak, že vyjádříme nejdříve explicitně $\mathbf{x}(kT)$ z rovnice (6.22) podle postupu odst. 6.1. Po dosazení takto určeného $\mathbf{x}(kT)$ do (6.21) dostaneme explicitní vyjádření $\mathbf{x}(kT + \varepsilon T)$.

S použitím matic v rovnici (6.22) a podle rovnice (6.2) je

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(kT) &= \Phi^k(T)\,\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^j(T)\,\Phi(T)\,\mathbf{B}\,y[(k - j - 1)\,T^+] + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^j(T)\,\Phi(T)\,\mathbf{u}[(k - j - 1)\,T^+] = \\
&= \Phi^k(T)\,\mathbf{x}(0) + \sum_{j=1}^{k} \Phi^j(T)\,\mathbf{B}\,y[(k - j)\,T^+] + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} \Phi^j(T)\,\mathbf{u}[(k - j)\,T^+] = \\
&= \Phi^k(T)\,\mathbf{x}(0) + \sum_{r=0}^{k-1} \Phi^{k-r}(T)\,\mathbf{B}\,y(rT^+) + \sum_{r=0}^{k-1} \Phi^{k-r}(T)\,\mathbf{u}(rT^+),
\end{aligned} \tag{6.23}$$

kde v posledním výrazu jsme dosadili $j = k - r$.

Dosadíme-li nyní (6.23) do (6.21), dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(kT + \varepsilon T) &= \Phi(\varepsilon T)\,\Phi^k(T)\,\mathbf{x}(0) + \Phi(\varepsilon T)\Big[\sum_{r=0}^{k-1} \Phi^{k-r}(T)\,\mathbf{B}\,y(rT^+) + \\
&\quad + \mathbf{B}\,y(kT^+) + \sum_{r=0}^{k-1} \Phi^{k-r}(T)\,\mathbf{u}(rT^+) + \mathbf{u}(kT^+)\Big],
\end{aligned} \tag{6.24}$$

kde

$$\Phi(\varepsilon T) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}\varepsilon T},$$

$$\Phi^k(T) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}kT} \quad \text{atp.}$$

6.5 Spojitá soustava – vstupní signál schodová funkce

Je-li v rovnici (5.12) $y(\tau) = y(t_0) \doteq$ konst a $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(t_0) =$ konst, je

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \Phi(t - t_0)\,\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)\,\mathbf{B}\,y(t_0)\,\mathrm{d}\tau + \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)\,\mathbf{u}(t_0)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

S označením

$$(6.26) \qquad \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)\, \mathbf{B}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\, \mathbf{B}\, d\tau =$$

$$= -\mathbf{A}^{-1}[1 - e^{\mathbf{A}(t-t_0)}]\, \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}[\Phi(t-t_0) - 1]\, \mathbf{B} = \Lambda(t-t_0)\,,$$

$$(6.27) \qquad \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)\, d\tau = \mathbf{A}^{-1}[\Phi(t-t_0) - 1] = \Psi(t-t_0)$$

můžeme rovnici (6.25) přepsat na tvar

$$(6.28) \qquad \mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\, \mathbf{x}(t_0) + \Lambda(t-t_0)\, y(t_0) + \Psi(t-t_0)\, \mathbf{u}(t_0)\,.$$

Jestliže jsou vstupní veličiny konstantní po dobu jednoho intervalu, tj. $y(t) = y(t_k) =$ $=$ konst a $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_k) =$ konst, $t_k < t < t_{k+1}$, nabývá rovnice (6.28) tvaru

$$(6.29) \qquad \mathbf{x}(t_k + \sigma) = \Phi(\sigma)\, \mathbf{x}(t_k) + \Lambda(\sigma)\, y(t_k) + \Psi(\sigma)\, \mathbf{u}(t_k)\,,$$

kde $0 < \sigma < t_{k+1} - t_k$.

Pro konstantní interval $t_{k+1} - t_k = T =$ konst a $\sigma = \varepsilon T$, $0 < \varepsilon < 1$, můžeme rovnici (6.29) přepsat na tvar

$$(6.30) \qquad \mathbf{x}(kT + \varepsilon T) = \Phi(\varepsilon T)\, \mathbf{x}(kT) + \Lambda(\varepsilon T)\, y(kT) + \Psi(\varepsilon T)\, \mathbf{u}(kT)\,.$$

Pro $\varepsilon = 1$ je

$$(6.31) \qquad \mathbf{x}((k+1)\, T) = \Phi(T)\, \mathbf{x}(kT) + \Lambda(T)\, y(kT) + \Psi(T)\, \mathbf{u}(kT)\,.$$

Řešení rovnice (6.30) provedeme obdobně jako řešení rovnice (6.21) v odst. 6.4:

$$(6.32) \qquad \mathbf{x}(kT) = \Phi^k(T)\, \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^j(T)\, \Lambda(T)\, y[(k-j-1)\, T] +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^j(T)\, \Psi(T)\, \mathbf{u}[(k-j-1)\, T] =$$

$$= \Phi^k(T)\, \mathbf{x}(0) + \sum_{r=0}^{k-1} \Phi^{k-r-1}(T)\, \Lambda(T)\, y(rT) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{k-1} \Phi^{k-r-1}(T)\, \Psi(T)\, \mathbf{u}(rT)\,,$$

kde v posledním výrazu jsme dosadili $j = k - r - 1$.

Dosadíme-li nyní (6.32) do (6.30), dostaneme

$$(6.33) \qquad \mathbf{x}(kT + \varepsilon T) = \Phi(\varepsilon T)\, \Phi^k(T)\, \mathbf{x}(0) + \Phi(\varepsilon T) \sum_{r=0}^{k-1} \Phi^{k-r-1}(T)\, \Lambda(T)\, y(rT) +$$

$$+ \Lambda(\varepsilon T)\, y(kT) +$$

$$+ \Phi(\varepsilon T) \sum_{r=0}^{k-1} \Phi^{k-r-1}(T)\, \Psi(T)\, \mathbf{u}(rT) + \Psi(\varepsilon T)\, \mathbf{u}(kT)\,,$$

kde

$$(6.34)\quad \Lambda(\varepsilon T) = \int_0^{\varepsilon} e^{AT(\varepsilon-\tau)} \mathbf{B} T \, d\tau = -\mathbf{A}^{-1} T^{-1} [\mathbf{E} - e^{\mathbf{A}\varepsilon T}] \mathbf{B} T =$$

$$= \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}\varepsilon T} - \mathbf{E}) \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}[\Phi(\varepsilon T) - \mathbf{E}] \mathbf{B},$$

$$(6.35)\quad \Lambda(T) = \int_0^1 e^{\mathbf{A}T(1-\tau)} \mathbf{B} T \, d\tau = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{E}) \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}[\Phi(T) - \mathbf{E}] \mathbf{B},$$

$$(6.36)\quad \Psi(\varepsilon T) = \int_0^{\varepsilon} e^{\mathbf{A}T(\varepsilon-\tau)} T \, d\tau = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}\varepsilon T} - \mathbf{E}) = \mathbf{A}^{-1}[\Phi(\varepsilon T) - \mathbf{E}],$$

$$(6.37)\quad \Psi(T) = \int_0^1 e^{\mathbf{A}T(1-\tau)} T \, d\tau = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{E}) = \mathbf{A}^{-1}[\Phi(T) - \mathbf{E}].$$

Vztahy (6.32) a (6.33) se velmi dobře hodí v případech, kdy nás zajímá jen veličina $x_1(kT + \varepsilon T)$, která je často shodná s výstupní veličinou soustavy $v\,(kT + \varepsilon T)$. V takovém případě je možné oba uvedené vztahy podstatně zjednodušit. Postup ukážeme pro jednodušší variantu, kdy poruchová veličina $u = 0$. Pro stavovou veličinu $x_1(kT)$ můžeme podle rovnice (6.32) psát

$$(6.38)\quad x_1(kT) = \sum_{j=0}^{n-1} [\Phi^k(T)]_{1j}\, x_j(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{k-1} [\Phi^{k-r-1}(T)]_{1j}\, \Lambda_j(T)\, y(rT),$$

kde $[\Phi^k(T)]_{1j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, jsou prvky prvního řádku matice $\Phi^k(T)$ stupně n a $\Lambda_j(T)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, je j-tý prvek sloupcové matice $\Lambda(T)$.

Podobně můžeme vyjádřit stavovou veličinu $x_1(kT + \varepsilon T)$ pomocí rovnice (6.33) takto:

$$(6.39)\quad x_1(kT + \varepsilon T) = \sum_{j=0}^{n-1} [\Phi^k(T)]_{1j}\, x_j(0, \varepsilon) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} [\Phi^{k-r-1}(T)]_{1j}\, \Lambda_j(T, \varepsilon)\, y(rT) +$$

$$+ \Lambda_1(\varepsilon)\, y(kT),$$

kde

$$(6.40)\quad \mathbf{x}(0, \varepsilon) = \Phi(\varepsilon T)\, \mathbf{x}(0),$$

$$(6.41)\quad \Lambda(T, \varepsilon) = \Phi(\varepsilon T)\, \Lambda(T).$$

neboť změna pořadí matic $\Phi(\varepsilon T)$ a $\Phi^k(T)$ je přípustná.

Příklad 1. Je dána diferenciální rovnice spojité soustavy

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = y(t).$$

Vypočtěme odezvu soustavy v okamžicích $k = 0, 1, 2, \ldots$ na obecný schodový signál $y(kT)$, jestliže $v(0) = v'(0) = 0$ a $T = 1$.

Řešení. Matice ve stavových rovnicích

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\,y(t)\,,$$
$$v(t) = \boldsymbol{C}\,x(t)$$

jsou shodné s příkladem řešeným v odst. 5.1

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3, & 1 \\ -2, & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{C} = [1,\ 0]\,,$$

kde jsme též vypočítali matici $\exp \boldsymbol{A}t = \Phi(t)$, takže můžeme přímo psát:

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} -\ \mathrm{e}^{-T} + 2\mathrm{e}^{-2T}, & \mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T} \\ -2\mathrm{e}^{-T} + 2\mathrm{e}^{-2T}, & 2\mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0972, & 0{,}2325 \\ -0{,}4651, & 0{,}6004 \end{bmatrix}.$$

Podle (6.35) vypočteme $\Delta(T)$ s maticí

$$\boldsymbol{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0, & -\frac{1}{2} \\ 1, & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

$$\Delta(T) = \boldsymbol{A}^{-1}[\Phi(T) - \boldsymbol{E}]\,\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\ \mathrm{e}^{-T} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2T} + \frac{1}{2} \\ -2\mathrm{e}^{-T} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2T} + \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1998 \\ 0{,}8319 \end{bmatrix}.$$

Podle (6.31) je stavová rovnice soustavy pro vstupní schodový signál

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)\,T] \\ x_2[(k+1)\,T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0972, & 0{,}2325 \\ -0{,}4651, & 0{,}6004 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}1998 \\ 0{,}8319 \end{bmatrix} y(k)\,.$$

Podle zadané diferenciální rovnice a podle definice (3.20) stavových veličin je $x_1(t) = v(t)$ a $x_2(t) = 3v(t) + v'(t)$, takže pro dané počáteční podmínky je $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

Pomocí vypočtené stavové rovnice můžeme rekurentně počítat na číslicovém počítači hodnoty odezvy v okamžicích $k = 1, 2, \ldots$ Např. pro $y(k) = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ bylo vypočteno:

k	$x_1(kT)$	$x_2(kT)$
0	0	0
1	0,1998	0,8319
2	0,3738	1,2384
3	0,4514	1,4016
4	0,4818	1,4635
5	0,4932	1,4865

Z vypočtených hodnot veličiny x_1 můžeme snadno spočítat prvky váhové matice (6.7).

$$\begin{aligned}
s(1) &= 0\,,\\
s(2) &= x_1(T) = 0{,}1998\,,\\
s(3) &= x_1(2T) - x_1(T) = 0{,}1750\,,\\
s(4) &= x_1(3T) - x_1(2T) = 0{,}0776\,,\\
s(5) &= x_1(4T) - x_1(3T) = 0{,}0304\,,\\
s(6) &= x_1(5T) - x_1(4T) = 0{,}0114 \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Příklad 2. Je dána soustava jako v příkladu 1. Vypočtěme odezvu v okamžicích $kT + \varepsilon T$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \varepsilon = 0,5$, $T = 1$ na obecný schodový signál $y(kT)$.

Řešení. Výpočet provedeme podle vzorce (6.30), kde

$$\Phi(\varepsilon T) = e^{A\varepsilon T} = \begin{bmatrix} -\ e^{-\varepsilon T} + 2e^{-2\varepsilon T}, & e^{-\varepsilon T} - e^{-2\varepsilon T} \\ -2e^{-\varepsilon T} + 2e^{-2\varepsilon T}, & 2e^{-\varepsilon T} - e^{-2\varepsilon T} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,1292, & 0,2387 \\ -0,4773, & 0,8452 \end{bmatrix}.$$

Podle (6.34) je

$$\Lambda(\varepsilon T) = \mathbf{A}^{-1}[\Phi(\varepsilon T) - \mathbf{E}]\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,0774 \\ 0,4709 \end{bmatrix},$$

takže s vypočtenou maticí $\Phi(\varepsilon T)$ a $\Lambda(\varepsilon T)$ je rovnice (6.30)

$$\begin{bmatrix} x_1(kT + \varepsilon T) \\ x_2(kT + \varepsilon T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1292, & 0,2387 \\ -0,4773, & 0,8452 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0774 \\ 0,4709 \end{bmatrix} y(k).$$

Numerický výpočet se provádí na číslicovém počítači podle stejného programu jako v příkladu 1. Každá vypočtená hodnota vektoru $\mathbf{x}(kT + T)$ je proti předcházející časově posunutá o interval T, takže při konstantním $y(k)$ dostáváme postupně při zadaném počátečním vektoru hodnoty v okamžicích εT, $2\varepsilon T$, $3\varepsilon T$, ... Např. pro $y(k) = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ bylo vypočteno s $\varepsilon = 0,5$:

i	$x_1(i\varepsilon T)$	$x_2(i\varepsilon T)$
0	0	0
1	0,0774	0,4709
2	0,1998	0,8319
3	0,3018	1,1079
4	0,3738	1,2384
5	0,4216	1,3393

Výsledné hodnoty pro $i = 2$ a 4 tohoto příkladu jsou nutně shodné s hodnotami příkladu 1 pro $k = 1$ a 2.

Poznámka. K výpočtu na číslicovém počítači můžeme v příkladu 1 a 2 použít též vztahu (6.33). Pro tento vztah je program sestaven tak, že se zadává jen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{T}$, ε, $\mathbf{x}(0)$ a $k_{\max}$, takže není třeba provádět žádné analytické výpočty.

6.6 Výpočet koeficientů diferenční rovnice

Rovnice (6.38) a (6.39) se velmi dobře hodí k určení koeficientů diferenční rovnice nebo koeficientů diskrétního přenosu spojité soustavy, na jejímž vstupu působí schodový signál. Napíšeme-li rovnici (6.38) pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, dostaneme systém n rovnic. Budeme-li považovat $\mathbf{x}_1(kT)$, $\mathbf{x}_j(0)$ a $\mathbf{y}(kT)$ za n-rozměrové vektory, můžeme tento systém rovnic napsat pomocí matic. Zaveďme označení

$$x_1(kT) = \sum_{j=0}^{n-1} M_{kj}\, x_j(0) + \sum_{r=0}^{k-1} N_{kr}\, y(rT), \tag{6.42}$$

kde

$$M_{kj} = [\Phi^k(T)]_{1j}, \tag{6.43}$$

$$N_{kr} = \sum_{j=0}^{n-1} [\Phi^{k-r-1}(T)]_{1j} \Lambda_j(T) = \sum_{j=0}^{n-1} M_{k-r-1,j} \Lambda_j(T) \tag{6.44}$$

pro $0 \leqq r \leqq k - 1$,

$$N_{kr} = 0 \quad \text{pro} \quad 0 > r > k - 1, \tag{6.45}$$

pak

$$\mathbf{x}_1(k) = \mathbf{M}\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{N}\,\mathbf{y}(k), \tag{6.46}$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{00}, & M_{01}, & \ldots, M_{0,n-1} \\ M_{10}, & M_{11}, & \ldots, M_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n-1,0}, & M_{n-1,1}, & \ldots, M_{n-1,n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & \ldots, 0 \\ M_0\Lambda, & 0, & \ldots, 0 \\ M_1\Lambda, & M_0\Lambda, & \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n-2}\Lambda, & M_{n-3}\Lambda, & \ldots, 0 \end{bmatrix}. \tag{6.47}$$

Je-li $\mathbf{M}$ regulární, můžeme z (6.46) určit počáteční vektor

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{M}^{-1}\,x_1(k) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{y}(k), \tag{6.48}$$

$$x_j(0) = \sum_{l=0}^{n-1} [(M^{-1}{}_{jl}\, x_1(lT) - (M^{-1}N)_{jl}\, y(lT)]. \tag{6.49}$$

Dosadíme-li (6.49) do (6.42), je s $k = n$

$$x_1(nT) = \sum_{j=0}^{n-1} M_{nj} \sum_{l=0}^{n-1} [(M^{-1})_{jl}\, x_1(lT) - (M^{-1}N)_{jl}\, y(lT)] + \sum_{r=0}^{n-1} N_{nr}\, y(rT). \tag{6.50}$$

Dostáváme rekurentní vztah

$$\begin{aligned} x_1(nT) - \sum_{l=0}^{n-1} [\sum_{j=0}^{n-1} M_{nj}(M^{-1})_{jl}]\, x_1(lT) &= \\ = -\sum_{l=0}^{n-1} [\sum_{j=0}^{n-1} M_{nj}(M^{-1}N)_{jl} - N_{nl}]\, y(lT)&, \end{aligned} \tag{6.51}$$

který je shodný s obvyklým zápisem diferenční rovnice

$$x_1(nT) + \sum_{l=0}^{n-1} a_l\, x_1(lT) = \sum_{l=0}^{n-1} b_l\, y(lT). \tag{6.52}$$

Podobně přepíšeme i rovnici (6.39)

$$x_1(kT + \varepsilon T) = \sum_{j=0}^{n-1} M_{kj}\, x_j(0, \varepsilon) + \sum_{r=0}^{k} N_{kr}\, y(rT)\,, \tag{6.53}$$

kde

$$\sum_{r=0}^{k} N_{kr}\, y(rT) = \sum_{r=0}^{k-1} N_{kr}\, y(rT) + \Lambda_1(\varepsilon)\, y(kT)\,, \tag{6.54}$$

$$N_{kr} = \sum_{j=0}^{n-1} [\Phi^{k-r-1}(T)]_{1j}\, \Lambda_j(T, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{n-1} M_{k-r-1,j}\, \Lambda_j(T, \varepsilon) \tag{6.55}$$

pro $0 \leqq r \leqq k - 1$.

$$N_{kr} = \Lambda_1(\varepsilon) \quad \text{pro} \quad r = k\,, \tag{6.56}$$

$$N_{kr} = 0 \qquad \text{pro} \quad 0 > r > k\,, \tag{6.57}$$

takže rovnice (6.39) ve vektorově maticovém uspořádání nabývá tvaru

$$\mathbf{x}_1(k, \varepsilon) = \mathbf{M}\, \mathbf{x}_1(0, \varepsilon) + \mathbf{N}\, \mathbf{y}(k)\,, \tag{6.58}$$

kde matice $\mathbf{M}$ je shodná s (6.47) a matice $\mathbf{N}$ je nyní

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \Lambda_1(\varepsilon), & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ M_0\, \Lambda(\varepsilon), & \Lambda_1(\varepsilon), & 0, & \ldots, 0 \\ M_1\, \Lambda(\varepsilon), & M_0\, \Lambda(\varepsilon), & \Lambda_1(\varepsilon), & \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n-2}\, \Lambda(\varepsilon), & M_{n-3}\, \Lambda(\varepsilon), & M_{n-4}\, \Lambda(\varepsilon), & \ldots, \Lambda_1(\varepsilon) \end{bmatrix}. \tag{6.59}$$

Za předpokladu, že $\mathbf{M}$ je regulární maticí, můžeme opět z (6.58) určit počáteční vektor

$$\mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{M}^{-1}\, \mathbf{x}_1(k, \varepsilon) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\, \mathbf{y}(k)\,, \tag{6.60}$$

$$x_j(0, \varepsilon) = \sum_{l=0}^{n-1} [(M^{-1})_{jl}\, x_1(lT, \varepsilon T) - (M^{-1}N)_{jl}\, y(lT)]\,. \tag{6.61}$$

Po dosazení do (6.53) za $x_j(0, \varepsilon)$ dostaneme pro $k = n$

$$x_1(nT, \varepsilon T) = \sum_{j=0}^{n-1} M_{nj} \sum_{l=0}^{n-1} [(M^{-1})_{jl}\, x_1(lT, \varepsilon T) - (M^{-1}N)_{jl}\, y(lT)] + \tag{6.62}$$
$$+ \sum_{r=0}^{n} N_{nr}\, y(rT)\,.$$

Po uspořádání na tvar

$$(6.63) \qquad x_1(nT, \varepsilon T) - \sum_{l=0}^{n-1} \left[\sum_{j=0}^{n-1} M_{nj}(M^{-1})_{jl} \right] x_1(lT, \varepsilon T) =$$
$$= - \sum_{l=0}^{n-1} \left[\sum_{j=0}^{n-1} M_{nj}(M^{-1}N)_{jl} - N_{nl} \right] y(lT) + N_{nn}\, y(nT)$$

jsme opět dostali rekurentní vztah shodný s obvyklým zápisem diferenční rovnice

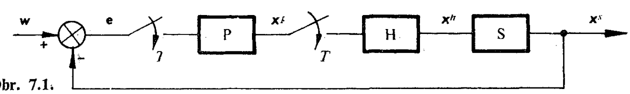
$$(6.64) \qquad x_1(nT, \varepsilon T) + \sum_{l=0}^{n-1} a_l\, x_1(lT, \varepsilon T) = \sum_{l=0}^{n} b_l\, y(lT)\,.$$

Bližší podrobnosti viz původní práce [4].

7. Stavové rovnice regulačního obvodu

Dosavadní výsledky, uvedené v předchozích odstavcích nám umožňují analyzovat jednotlivé členy regulačního obvodu, a to jak členy spojitě pracující, tak členy diskrétně pracující. Nyní se budeme zabývat sestavením stavových rovnic celého regulačního obvodu. Nejobecnější je případ, kdy v regulačním obvodu jsou spojitě pracující členy (regulovaná soustava), diskrétně pracující členy (číslicové korekční členy) a tvarovací členy, které v obecném případě nemusí pracovat současně. Postup sestavení maticových rovnic, který zde uvedeme, můžeme snadno aplikovat i na regulační obvod, ve kterém jsou jen spojité členy nebo jen diskrétní členy. Takové obvody se sourodými členy můžeme sice popisovat stavovými rovnicemi vcelku, tj. jako jediný člen pomocí vztahů uvedených v předchozích kapitolách, u některých úloh je však výhodné, aby jednotlivé členy obvodu mohly být vyjádřeny samostatně. Je to např. tehdy, chceme-li měnit vlastnosti jen jednoho členu obvodu a zkoumat, jak se mění vlastnosti celého obvodu.

Typickým příkladem obvodů s nesourodými členy je regulační obvod se spojitě pracující soustavou, diskrétním korekčním členem a tvarovacím členem. Blokové schéma tohoto obvodu je naznačeno v obr. 7.1 jednočarově, tzn. že spojnice mezi



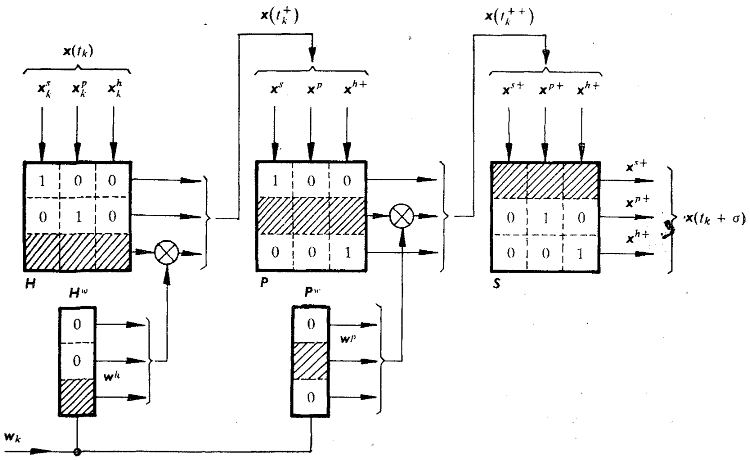
Obr. 7.1.

jednotlivými bloky schématu, příslušné vyznačeným vektorům, mohou být a jsou obecně vícesložkové. Ve schématu P značí číslicový korekční člen, H tvarovací člen a S regulovanou soustavu. Regulované soustavě nechť patří s stavových veličin uspořádaných ve vektoru $\boldsymbol{x}^s$, tvarovacímu členu h stavových veličin uspořádaných ve vektoru $\boldsymbol{x}^h$ a číslicovému korekčnímu členu p stavových veličin uspořádaných ve vektoru $\boldsymbol{x}^p$. Celkový počet stavových veličin je tudíž

$$n = s + h + p \,. \tag{7.1}$$

Fyzikálně to znamená, že v obvodu je s integrátorů, p posouvajících členů a h tvarovacích členů nultého řádu. Pomocí těchto operací můžeme vyjádřit jakoukoliv vlastnost lineárního obvodu včetně tvarovacích členů vyššího jak nultého řádu, v jakémkoliv složitějším uspořádání než jak je uvedeno na obr. 7.1 a při jakékoliv časové součinnosti vzorkovacích a tvarovacích členů.

Jestliže v obvodu podle obr. 7.1 se bude provádět vzorkování odchylky e a vstup do tvarovacího členu současně (synchronně), můžeme v tomto nejjednodušším



Obr. 7.2.

případě zvolený obvod znázornit obecně schématem na obr. 7.2, kde jednotlivé bloky představují matice, s jejichž prvky se provádí transformace vstupních vektorů na výstupní vektory. Transformace se provádí vždy jen v té části matic, která je vyšrafována. Z obr. 7.2 vidíme, že v nevyšrafované části matic jsou v diagonále vždy jednotkové matice, kterými se převádí příslušné stavové veličiny bez změny k dalšímu bloku. Ostatní prvky v nevyšrafované části matic jsou nulové, takže v každé matici $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P}^w$ a $\boldsymbol{H}^w$ se provádí transformace jen jednoho druhu. Když to řešená úloha vyžaduje, např. při nesynchronním vzorkování a tvarování, je počet dílčích maticových operátorů a tím i bloků schématu větší než uvádí obr. 7.2.

Podle obr. 7.2 je celkový stavový vektor obvodu

$$(7.2) \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^s(t) \\ \mathbf{x}^p(t) \\ \mathbf{x}^h(t) \end{bmatrix},$$

jehož rozměr je n. Výstupní stavový vektor $\mathbf{x}(t_k + \sigma)$ vypočteme postupně podle schématu na obr. 7.2:

$$(7.3) \qquad \begin{aligned} \mathbf{x}(t_k^+) &= \mathbf{H}\, \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{H}^w\, \mathbf{w}(t_k)\,, \\ \mathbf{x}(t_k^{++}) &= \mathbf{P}\, \mathbf{x}(t_k^+) + \mathbf{P}^w\, \mathbf{w}(t_k) = \\ &= \mathbf{PH}\, \mathbf{x}(t_k) + (\mathbf{PH}^w + \mathbf{P}^w)\, \mathbf{w}(t_k)\,, \\ \mathbf{x}(t_k + \sigma) &= \mathbf{S}(\sigma)\, [\mathbf{PH}\, \mathbf{x}(t_k) + (\mathbf{PH}^w + \mathbf{P}^w)\, \mathbf{w}(t_k)] \end{aligned}$$

nebo stručně

$$(7.4) \qquad \mathbf{x}(t_k + \sigma) = \mathbf{M}(\sigma)\, \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{N}(\sigma)\, \mathbf{w}(t_k)\,,$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\sigma) &= \mathbf{S}(\sigma)\, \mathbf{PH}\,, \\ \mathbf{N}(\sigma) &= \mathbf{S}(\sigma)\, (\mathbf{PH}^w + \mathbf{P}^w)\,. \end{aligned}$$

7.1 Tvarovací člen nultého řádu

Nechť v okamžiku t_k se provádí vzorkování na r-tém tvarovacím členu, jehož stav popisují stavové veličiny x_i, $s + p + 1 \leqq i \leqq n$. Stavové veličiny x_i se nespojitě změní v okamžiku t_k, avšak ostatní stavové veličiny x_l, $l \neq i$, zůstanou nezměněny. Nové hodnoty stavových veličin $x_i(t_k^+)$ jsou obecně lineární kombinací stavových veličin $x_j(t_k), j = 1, 2, \ldots, n$, a vstupních veličin obvodu $w_j(t_k), j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N$, kde N je rozměr soustavy

$$(7.5) \qquad \begin{aligned} & x_l(t_k^+) = \sum_{j=1}^{n} h_{lj}\, x_j(t_k) + \sum_{j=1}^{N} h_{lj}^w\, w_j(t_k^+) \quad \text{pro} \quad l = i\,, \\ & x_l(t_k^+) = x_l(t_k) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{pro} \quad l \neq i\,, \\ & \qquad l = 1, 2, \ldots, n; \quad s + p + 1 \leqq i \leqq n\,. \end{aligned}$$

Rovnici (7.5) můžeme napsat pomocí matic

$$(7.6) \qquad \begin{aligned} \mathbf{x}(t_k^+) &= \mathbf{H}_i^h\, \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{H}_i^{hw}\, \mathbf{w}(t_k) = \\ &= \mathbf{H}_i^{hs}\, \mathbf{x}^s(t_k) + \mathbf{H}_i^{hp}\, \mathbf{x}^p(t_k) + \mathbf{H}_i^{hh}\, \mathbf{x}^h(t_k) + \mathbf{H}_i^{hw}\, \mathbf{w}(t_k)\,, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{H}_i^{hs}$, $\boldsymbol{H}_i^{hp}$ a $\boldsymbol{H}_i^{hh}$ jsou submatice matice $\boldsymbol{H}_i^h = [\boldsymbol{H}_i^{hs}, \boldsymbol{H}_i^{hp}, \boldsymbol{H}_j^{hh}]$ a matice $\boldsymbol{H}$ v obr. 7.2, jejíž tvar je

(7.7)
$$\boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \boldsymbol{H}_i^{hs} & \boldsymbol{H}_i^{hp} & \boldsymbol{H}_i^{hh} \end{array}\right].$$

Tvar matice $\boldsymbol{H}^w$ je

(7.8)
$$\boldsymbol{H}^w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{H}_i^{hw} \end{bmatrix}.$$

Prvky matic (7.7) a (7.8) jsou různé pro každou množinu x_i, která se současně mění v okamžiku t_k.

Nechť pro $s = 2$, $p = 1$, $h = 3$, $N = 2$ se mění v okamžiku t_k jen veličina x_i, kde $i = 5$. Pak

$$n = s + p + h = 6\,,$$

$$x_5(t_k^+) = \sum_{j=1}^{6} h_{5j}\, x_j(t_k) + \sum_{j=1}^{2} h_{5j}^w\, w_j(t_k) = \boldsymbol{H}_5^h\, x(t_k) + \boldsymbol{H}_5^{hw}\, w(t_k)$$

$$x_l(t_k^+) = x_l(t_k) \quad \text{pro} \quad l \neq 5\,,$$

$$\boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{cc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & h_{55} & h_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]; \quad \boldsymbol{H}^w = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ h_{51}^w & h_{52}^w \\ 0 & 0 \end{array}\right].$$

7.2 Diskrétní část obvodu

Nechť v okamžiku t_k se změní některé stavové veličiny x_i, $s + 1 \leqq i \leqq s + p$, avšak ostatní veličiny x_l, $l \neq i$ se nezmění. Pak platí

(7.9)
$$x_l(t_k^+) = \sum_{j=1}^{n} p_{lj}\, x_j(t_k) + \sum_{j=1}^{N} p_{lj}^w\, w_j(t_k) \quad \text{pro} \quad l = i\,,$$

$$x_l(t_k^+) = x_l(t_k) \qquad \text{pro} \quad l \neq i\,,$$

$$l = 1, 2, \ldots, n\,; \quad s + 1 \leqq i \leqq s + p\,,$$

(7.10)
$$\boldsymbol{x}(t_k^+) = \boldsymbol{P}_i^p\, \boldsymbol{x}(t_k) + \boldsymbol{P}_i^{pw}\, \boldsymbol{w}(t_k) =$$
$$= \boldsymbol{P}_i^{ps}\, \boldsymbol{x}^s(t_k) + \boldsymbol{P}_i^{pp}\, \boldsymbol{x}^p(t_k) + \boldsymbol{P}_i^{ph}\, \boldsymbol{x}^h(t_k) + \boldsymbol{P}^{pw}\, \boldsymbol{w}(t_k)\,,$$

kde $\boldsymbol{P}_i^p = [\boldsymbol{P}_i^{ps}, \boldsymbol{P}_i^{pp}, \boldsymbol{P}_i^{ph}]$.

V obr. 7.2 jsou matice $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{P}^w$

$$(7.11)\qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{P}_i^{ps} & \boldsymbol{P}_i^{pp} & \boldsymbol{P}_i^{ph} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{P}^w = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{P}_i^{pw} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nechť pro $s = 2$, $p = 2$, $h = 1$, $N = 2$ se mění v okamžiku t_k veličiny x_i, $i = 3$ a 4. Pak

$$n = s + p + h = 5,$$

$$\boldsymbol{x}(t_k^+) = \boldsymbol{P}_{3,4}^p\, \boldsymbol{x}(t_k) + \boldsymbol{P}_{3,4}^{pw}\, \boldsymbol{w}(t_k),$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{P}^w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ p_{31}^w & p_{32}^w \\ p_{41}^w & p_{42}^w \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.3 Spojitá část obvodu

Nemění-li se v intervalu $\langle t_k, t_{k+1})$ vektory $\boldsymbol{x}^p$ a $\boldsymbol{x}^h$, je podle (6.29) a (5.12)

$$(7.12)\qquad \boldsymbol{x}^s(t_k + \sigma) = \Phi^{ss}(\sigma)\, \boldsymbol{x}^s(t_k) + \Lambda^{sh}(\sigma)\, \boldsymbol{x}^h(t_k) + \\ + \int_0^{\sigma^-} \Phi^{ss}(\sigma - \tau)\, \boldsymbol{B}^{sw}\, w(k + \tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad 0 < \sigma \leqq t_{k+1} - t_k,$$

kde třetí člen na pravé straně rovnice (7.12) se uplatní jen tehdy, když veličiny vektoru $\boldsymbol{w}$ měnící se spojitě na intervalu $\langle t_k, t_k + \sigma)$ mohou přímo ovlivňovat veličiny vektoru $\boldsymbol{x}^s$. Jsou-li však veličiny vektoru $\boldsymbol{w}$ na intervalu $\langle t_k, t_k + \sigma)$ konstantní, pak rovnici (7.12) můžeme přepsat na tvar

$$(7.13)\qquad \boldsymbol{x}^s(t_k + \sigma) = \Phi^{ss}(\sigma)\, \boldsymbol{x}^s(t_k) + \Lambda^{sh}(\sigma)\, \boldsymbol{x}^h(t_k) + \Lambda^{sw}(\sigma)\, \boldsymbol{w}(t_k), \\ 0 < \sigma \leqq t_{k+1} - t_k.$$

Pro celý vektor $\boldsymbol{x}$ platí

$$(7.14)\qquad \boldsymbol{x}(t_k + \sigma) = \boldsymbol{S}(\sigma)\, \boldsymbol{x}(t_k) + \int_0^{\sigma^-} \boldsymbol{S}(\sigma - \tau)\, \boldsymbol{S}^w \boldsymbol{w}(t_k + \tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

kde

$$(7.15)\qquad \boldsymbol{S}(\sigma) = \begin{bmatrix} \Phi^{ss}(\sigma) & 0 & \Lambda^{sh}(\sigma) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Lambda^{sh}(\sigma) = \Lambda^s(\sigma)\, \boldsymbol{Q}^h,$$

$$(7.16) \qquad \boldsymbol{S}^w = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{sw} \\ \hdashline 0 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{B}^{sw} = \boldsymbol{B}^s\boldsymbol{Q}^w,$$

kde $\boldsymbol{Q}^h$ a $\boldsymbol{Q}^w$ jsou maticové operátory. V obyčejných číslicových regulačních obvodech je zpravidla $\boldsymbol{S}^w = 0$. Pracují-li však v regulačním obvodu číslicový korekční člen a spojitý regulátor paralelně, je $\boldsymbol{S}^w \neq 0$.

7.4 Příklady

Příklad 1. Sestavme stavovou rovnici regulačního obvodu se spojitou soustavou, číslicovým korekčním členem a tvarovacím členem nultého řádu. Dán přenos soustavy

$$S(p) = \frac{1}{p(p+1)},$$

přenos číslicového korekčního členu, jehož konstanty byly vypočteny pro konečný počet kroků regulace,

$$P(z) = \frac{e_2(z)}{e_1(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{1{,}58198 - 0{,}58198 z^{-1}}{1 + 0{,}41802 z^{-1}},$$

konstantní perioda vzorkování $T = 1$ a $\sigma = \varepsilon = 0{,}5$.

Řešení. Regulační obvod odpovídá schématu na obr. 7.1. Vektor stavových veličin $\boldsymbol{x}^s = [x_1, x_2]$ nechť přísluší regulované soustavě druhého řádu

$$v''(t) + v'(t) = y(t),$$

vektor $\boldsymbol{x}^p$ se stavovou veličinou x_3 číslicovému korekčnímu členu, jehož diferenční rovnice prvního řádu je

$$e_2(k+1) + a_1\, e_2(k) = b_0\, e_1(k+1) + b_1\, e_1(k)$$

a vektor $\boldsymbol{x}^h$ se stavovou veličinou x_4 tvarovacímu členu nultého řádu.

Podle (3.23) a (3.25) jsou matice soustavy

$$\boldsymbol{A}^s = \begin{bmatrix} -1, & 1 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{B}^s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{C}^s = [1,\ 0]; \quad \boldsymbol{H}^s = [0].$$

Podle zadané diferenciální rovnice regulované soustavy je charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

a vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}^s$ jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -1$. Jordanova matice je

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & -1 \end{bmatrix}.$$

Z rovnic

$$\mathbf{A}^s \mathbf{q}_1 = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \quad \text{a} \quad \mathbf{A}^s \mathbf{q}_2 = \lambda_2 \mathbf{q}_2$$

vypočteme vlastní vektory $\mathbf{q}_1$ a $\mathbf{q}_2$ a pak určíme maticové operátory

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix}.$$

Podle (5.23) je

$$e^{\mathbf{A}^s t} = \mathbf{Q} e^{\mathbf{J} t} \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}, & 1 - e^{-t} \\ 0 & , 1 \end{bmatrix},$$

takže

$$\Phi^{ss}(T) = \begin{bmatrix} e^{-T}, & 1 - e^{-T} \\ 0, & 1 \end{bmatrix}; \quad \Phi^{ss}(\varepsilon T) = \begin{bmatrix} e^{-\varepsilon T}, & 1 - e^{-\varepsilon T} \\ 0, & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.17}$$

Matici $\Lambda^{sh}(t)$ nemůžeme počítat podle vzorce (6.26), protože matice $\mathbf{A}^s$ je singulární. Musíme v takovém případě provést integraci každého prvku v integrandu vztahu (6.26) samostatně.

$$\Lambda^{sh}(t) = \int_0^t \Phi^{ss}(t - \tau)\, \mathbf{B}\, d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 1 - e^{-(t-\tau)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} 1 - e^{-(t-\tau)} \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} t - 1 + e^{-t} \\ t \end{bmatrix}, \tag{7.18}$$

$$\Lambda^{sh}(T) = \begin{bmatrix} T - 1 + e^{-T} \\ T \end{bmatrix}; \quad \Lambda^{sh}(\varepsilon T) = \begin{bmatrix} \varepsilon T - 1 + e^{-\varepsilon T} \\ \varepsilon T \end{bmatrix}.$$

Podle (3.62), (3.65) a (3.66) jsou matice číslicového korekčního členu

$$\mathbf{A}^p = -a_1\,; \quad \mathbf{B}^p = b_1 - a_1 b_0\,; \quad \mathbf{C}^p = 1\,; \quad \mathbf{H}^p = b_0\,.$$

Vstupní veličinou číslicového korekčního členu je odchylka e a výstupní veličinou stavová veličina x_3, takže stavová rovnice číslicového korekčního členu je

$$x_3[(k + 1)T] = -a_1 x_3(kT) + (b_1 - a_1 b_0)\, e(kT)\,.$$

Rovnice tvarovacího členu je vlastně druhá stavová rovnice (3.66) se vstupními veličinami x_3 a e a s výstupní veličinou x_4

$$x_4(kT) = x_3(kT) + b_0 e(kT)\,.$$

Dosadíme-li do obou posledních rovnic podle definice

$$e(kT) = w(kT) - x_1(kT)\,,$$

dostaneme

$$x_3[(k + 1)T] = -a_1 x_3(kT) - (b_1 - a_1 b_0)\, x_1(kT) + (b_1 - a_1 b_0)\, w(kT)\,, \tag{7.19}$$

$$x_4(kT) = x_3(kT) - b_0 x_1(kT) + b_0 w(kT)\,. \tag{7.20}$$

Tím jsme si připravili všechny vztahy potřebné k sestavení všech dílčích matic a submatic regulačního obvodu, při čemž jednotlivé matice budou v tomto případě přesně odpovídat schématu na obr. 7.2.

Dříve než jednotlivé matice sestavíme, připravíme předem číselné hodnoty prvků matic $\Phi^{ss}(\varepsilon T)$ a $\Lambda^{sh}(\varepsilon T)$ pro zadané $T = 1$ a $\varepsilon = 0{,}5$

$$\Phi^{ss}(0{,}5) = \begin{bmatrix} 0{,}60653 & 0{,}39347 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Lambda^{sh}(0{,}5) = \begin{bmatrix} 0{,}10653 \\ 0{,}5 \end{bmatrix};$$

$$\Phi^{ss}(1) = \begin{bmatrix} 0{,}36788 & 0{,}63212 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Lambda^{sh}(1) = \begin{bmatrix} 0{,}36788 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podle (7.7) a (7.8) a podle (7.20) je

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline -b_0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]; \quad \mathbf{H}^w = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ \hdashline b_0 \end{array}\right]. \tag{7.21}$$

Podle (7.11) a (7.19) je

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -(b_1 - a_1 b_0) & 0 & -a_1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]; \quad \mathbf{P}^w = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hdashline b_1 - a_1 b_0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right]. \tag{7.22}$$

Podle (7.15), (7.17) a (7.18) je

$$\mathbf{S}(\varepsilon) = \left[\begin{array}{cc:c:c} e^{-\varepsilon T} & 1 - e^{-\varepsilon T} & 0 & \varepsilon T - 1 + e^{-\varepsilon T} \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon T \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{7.23}$$

Podle (7.3) je nyní hledaný vektor

$$\mathbf{x}(kT + \varepsilon) = \mathbf{S}(\varepsilon)\left[\mathbf{PHx}(kT) + (\mathbf{PH}^w + \mathbf{P}^w)\,\mathbf{w}(kT)\right], \tag{7.24}$$

kde v daném případě $\mathbf{PH}^w = \mathbf{H}^w$

Pro $\varepsilon = T$ je rovnice (7.24)

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ x_3[(k+1)T] \\ x_4[(k+1)T] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c:c} 0{,}36788 & 0{,}63211 & 0 & 0{,}36788 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$
\cdot\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1{,}24328 & 0 & -0{,}41802 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1{,}58198 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \end{bmatrix} + \right.
$$

$$
\left. + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}24328 \\ 1{,}58198 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}(kT) \right\} .
$$

Na počítači vypočteme:

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0,58198	1,5820	−1,2433	1,5820
1	1,0000	1,0000	0,0000	−0,58198
2	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000
3	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000

Pro $\sigma = \varepsilon = 0{,}5$ je rovnice (7.24)

$$
\boldsymbol{x}(kT + \sigma) = \begin{bmatrix} 0{,}60653 & 0{,}39347 & 0 & 0{,}10653 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .
$$

$$
\cdot\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1{,}24328 & 0 & -0{,}41802 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1{,}58198 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}24328 \\ 1{,}58198 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}(kT) \right\} .
$$

Na počítači vypočteme:

k	$x_1(k + \sigma)$	$x_2(k + \sigma)$	$x_3(k + \sigma)$	$x_4(k + \sigma)$
0	0,1685	0,7910	−1,2433	1,5820
1	0,9134	1,2910	0,0773	−0,5820
2	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000
3	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000

8. PODMÍNKY STABILITY

Mějme stacionární lineární diskrétní systém s homogenní stavovou rovnicí

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \tag{8.1}$$

pro který známe počáteční vektor $x(0)$. Přitom matice $\mathbf{A}$ nechť má jednoduchá vlastní čísla λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak podle (4.12) je Jordanova matice

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{8.2}$$

a řešení rovnice (8.1) je

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{J}_0^k \mathbf{x}(0), \tag{8.3}$$

kde

$$\mathbf{J}_0^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

Z rovnice (8.3) plyne věta, vyjadřující podmínky stability, neboť zřejmě $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{x}(k) = 0$ pro $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\lim\limits_{k \to \infty} x(k) \to \infty$, je-li alespoň jedno vlastní číslo $|\lambda_i| > 1$.

Tento poznatek můžeme snadno rozšířit i na násobná vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

Věta 1. *Stacionární lineární diskrétní systém je asymptoticky stabilní tehdy a jen tehdy, jsou-li všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ v rovnici (8.1) v absolutní hodnotě menší než jedna.*

Podobně můžeme odvodit podmínky stability v případě kdy neznáme Jordanovu matici, ale umíme matici $\mathbf{A}$ transformovat na trojúhelníkovou matici. Např. s transformací

$$\zeta(k) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) \tag{8.5}$$

takovou, že

$$^*\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F} \tag{8.6}$$

je horní trojúhelníková matice, pak transformovaná matice (8.1) je

$$\begin{bmatrix} \zeta_1(k+1) \\ \zeta_2(k+1) \\ \vdots \\ \zeta_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1(k) \\ \zeta_2(k) \\ \vdots \\ \zeta_n(k) \end{bmatrix}. \tag{8.7}$$

Pro stavovou veličinu ζ_n platí

$$(8.8) \qquad \zeta_n(k + 1) = a_{nn}\zeta_n(k)$$

a pro libovolné $k \geqq 0$ a pro libovolné počáteční podmínky

$$(8.9) \qquad \zeta(0) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

je

$$(8.10) \qquad \zeta_n(k) = a_{nn}^k \, \zeta_n(0) \, .$$

Z rovnice (8.10) plyne, že $\lim_{k\to\infty} \zeta_n(k) = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $|a_{nn}| < 1$.

Pro stavovou veličinu ζ_{n-1} platí

$$(8.11) \qquad \zeta_{n-1}(k + 1) = a_{n-1,n-1}\zeta_{n-1}(k) + a_{n-1,n} \, \zeta_n(k) \, .$$

Nyní $\lim_{k\to\infty} \zeta_{n-1}(k) = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže $|a_{n-1, \, n-1}| < 1$ a jestliže současně $\lim_{k\to\infty} \zeta_n(k) = 0$.

Podobně můžeme postupovat až k veličině ζ_1. Podmínky stability můžeme vyslovit takto:

Věta 2. *Stacionární lineární diskrétní systém je asymptoticky stabilní tehdy a jen tehdy, jsou-li všechny prvky hlavní diagonály trojúhelníkové matice* $*\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F}$, kde $\mathbf{A}$ *je maticí rovnice* (8.1), *v absolutní hodnotě menší než jedna.*

Podaří-li se provést transformaci podle věty 2, pak prvky v hlavní diagonále jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

Obě vyslovené věty představují matematickou formulaci podmínek stability, avšak pro praktickou kontrolu se nehodí. Pro praktickou kontrolu stability jsou vhodná pravidla uvedená v [6]. Vychází se ze skutečnosti, že stopa matice $\mathbf{A}$, tj. součet prvků hlavní diagonály matice $\mathbf{A}$, je roven součtu vlastních čísel matice $\mathbf{A}$. Je-li soustava stabilní, pak všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde n je rozměr matice $\mathbf{A}$. Pak platí

$$(8.12) \qquad |\mathrm{St}\, \mathbf{A}| < n \, ,$$

kde

$$(8.13) \qquad \mathrm{St}\, \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, ,$$

a také

$$(8.14) \qquad |\mathrm{St}\, \mathbf{A}^k| < n \, .$$

Je-li však alespoň jedno vlastní číslo $|\lambda_i| > 1$, soustava je nestabilní a

(8.15) $$|\mathrm{St}\, \boldsymbol{A}^k| > n\,; \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^k > n$$

pro k dostatečně velké celé číslo. Prakticky postačí kontrolovat stabilitu jen s několika málo hodnotami k. Uvedené poznatky můžeme shrnout větou:

Věta 3. *Stacionární lineárí diskrétní systém je asymptoticky stabilní tehdy a jen tehdy, je-li absolutní hodnota stopy matice* $\boldsymbol{A}^k$, *kde* k *je libovolně velké celé nezáporné číslo, menší než rozměr matice* $\boldsymbol{A}$.

Vyslovenou větu lze použít též pro kontrolu stability stacionárních lineárních spojitých soustav, jestliže v charakteristické rovnici

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$$

těchto soustav dosadíme za λ operátor

(8.16) $$\lambda = \frac{\varrho + 1}{\varrho - 1}\,,$$

jímž se transformuje levá polorovina komplexní roviny λ do oblasti ohraničené jednotkovou kružnicí se středem v počátku komplexní roviny ϱ. Transformovaná charakteristická rovnice je

(8.17) $$|{}^{\mathrm{d}}\boldsymbol{A} - \varrho \boldsymbol{E}| = 0\,,$$

kde

(8.18) $${}^{\mathrm{d}}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1} (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E} + 2(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1}$$

Konečně lze poznamenat, že kontrolu stability spojitých i diskrétních systémů můžeme provádět podle běžně známých algebraických kritérií stability, jestliže sestavíme k matici $\boldsymbol{A}$ charakteristickou rovnici definovanou determinantem

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0\,.$$

Tato charakteristická rovnice nechť má obecně tvar

(8.19) $$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0\,.$$

Jestliže rozměr n matice $\boldsymbol{A}$ je velký, větší než $n = 3$, je běžný způsob určení charakteristické rovnice pomocí rozvedení determinantu $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$ na determinanty třetího stupně a pomocí Sarrusova pravidla značně nepříhodný a nevhodný pro numerické řešení na číslicovém počítači. Ukážeme zde proto jiný postup určení koeficientů charakteristické rovnice (8.19), který zmíněné nevýhody nemá.

Podle Cayleyovy-Hamiltonovy věty [1,8] čtvercová matice $\mathbf{A}$ musí vyhovovat své vlastní charakteristické rovnici a proto (8.19) můžeme přepsat na tvar

(8.20) $$\mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{E} = 0\,.$$

Vynásobíme-li nyní tuto rovnici zprava zvoleným vektorem $\mathbf{x}_0$, určíme n vektorů $\mathbf{x}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ takto

(8.21) $$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0\,,\\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1\,,\\ &\vdots\\ \mathbf{x}_n &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1}\,. \end{aligned}$$

S těmito vektory je nyní rovnice (8.20)

(8.22) $$\mathbf{x}_n + \alpha_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_0\mathbf{x}_0 = 0$$

a představuje soustavu n nehomogenních lineárních rovnic s neznámými koeficienty α_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$:

$$\begin{aligned} x_{n,1} + \alpha_{n-1}x_{n-1,1} + \ldots + \alpha_1 x_{1,1} + \alpha_0 x_{0,1} &= 0\,,\\ x_{n,2} + \alpha_{n-1}x_{n-1,2} + \ldots + \alpha_1 x_{1,2} + \alpha_0 x_{0,2} &= 0\,,\\ &\cdots\\ x_{n,n} + \alpha_{n-1}x_{n-1,n} + \ldots + \alpha_1 x_{1,n} + \alpha_0 x_{0,n} &= 0\,. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic určíme koeficienty charakteristické rovnice (8.19) a tu pak můžeme podrobit kontrole stability např. pomocí známého Routhova-Shurova algoritmu. Počáteční vektor $\mathbf{x}_0$ volíme samozřejmě co nejjednodušší, např. $\mathbf{x}_0 = [1, 0, 0, \ldots, 0]^T$.

Koeficienty charakteristické rovnice (8.19) můžeme též počítat pomocí Bôcherových vzorců [1,8]. Rozložíme-li charakteristickou rovnici na součin kořenových činitelů

(8.24) $$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) = 0\,,$$

je zřejmě v rovnici (8.19) koeficient

(8.25) $$\alpha_{n-1} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\,.$$

Jak jsme již dříve uvedli, je součet vlastních čísel matice roven stopě matice $\mathbf{A}$, takže též platí

(8.26) $$\alpha_{n-1} = -\mathrm{St}\,\mathbf{A} = -S_1\,.$$

Podle (4.12) a (5.22) je

(8.27) $$\mathbf{A}^k = \mathbf{Q}\mathbf{J}^k\mathbf{Q}^{-1}\,.$$

Stopa Jordanovy matice umocněné na k je zřejmě

$$\mathrm{St}\,\boldsymbol{J}^k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k \tag{8.28}$$

a protože platí vztah (8.26), je také

$$\mathrm{St}\,\boldsymbol{A}^k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k = S_k \,. \tag{8.29}$$

Protože celočíselné mocniny matice $\boldsymbol{A}$ můžeme na počítači snadno provádět, můžeme také uvedených vlastností využít k výpočtu koeficientů charakteristické rovnice (8.19). Snadno se přesvědčíme, že podle Bôcherových vzorců je

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= -S_1\,, \\ \alpha_{n-2} &= -\tfrac{1}{2}(\alpha_{n-1}S_1 + S_2)\,, \\ \alpha_{n-3} &= -\tfrac{1}{3}(\alpha_{n-2}S_1 + \alpha_{n-1}S_2 + S_3)\,, \\ &\vdots \\ \alpha_0 &= -\frac{1}{n}(\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_{n-1}S_{n-1} + S_n)\,. \end{aligned} \tag{8.30}$$

Uvedené vzorce platí i pro násobná a komplexní vlastní čísla.

9. PODMÍNKY ŘIDITELNOSTI A POZOROVATELNOSTI

Vyjádříme-li lineární diskrétní stacionární systém stavovými rovnicemi v normálním tvaru, tj. s Jordanovou maticí, pak při jednoduchých vlastních číslech Jordanovy matice můžeme posuzovat změny každé stavové veličiny izolovaně podle rovnic

$$x_i(k + 1) = \lambda_i^k x_i(k) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} y_j(k)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{9.1}$$

$$v_l(k) = \sum_{i=1}^{n} c_{li} x_i(k)\,; \quad l = 1, 2, \ldots, p\,, \tag{9.2}$$

kde počet akčních veličin je m a počet výstupních (regulovaných) veličin systému je p.

Z rovnice (9.1) je patrno, že v případě, kdy matice $\boldsymbol{B}$ má některý řádek nulový, tj. $b_{ij} = 0$ pro všechna j a pro některý index $i = \nu$, pak stavovou veličinu x_ν nemůžeme ovlivňovat ať přímo či nepřímo žádnou vstupní veličinou y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Říkáme v takovém případě, že stavová veličina x_ν je *neřiditelná*.

Podobně, má-li matice $\boldsymbol{C}$ některý sloupec nulový, tj. $c_{li} = 0$ pro všechna l a pro některý index $i = \mu$, pak žádná výstupní veličina nezávisí na stavové veličině x_μ a říkáme, že stavová veličina x_μ je *nepozorovatelná*.

Na základě těchto poznatků můžeme vyslovit věty:

Věta 1. *Stacionární lineární diskrétní systém je řiditelný a pozorovatelný, jestliže při nenásobných vlastních číslech matice* $\boldsymbol{A}$ *nemá matice* $\boldsymbol{B}$ *žádný nulový řádek a matice* $\boldsymbol{C}$ *žádný nulový sloupec.*

Jestliže matice $\boldsymbol{A}$ má násobná vlastní čísla, je třeba vyslovenou větu poněkud upravit. Jsou-li např. Jordanova matice a matice $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ nějakého systému tvaru

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix},$$

pak takový systém je řiditelný i pozorovatelný, protože matice $\boldsymbol{B}$ nemá žádný nulový řádek a matice $\boldsymbol{C}$ žádný nulový sloupec. To je ovšem postačující podmínka, ale není to podmínka nutná. Vezmeme-li v úvahu vztahy mezi stavovými veličinami příslušnými násobným vlastním číslům, zjistíme, že systém je řiditelný i když jsou první dva řádky matice $\boldsymbol{B}$ nulové a je pozorovatelný i když jsou druhý a třetí sloupec matice $\boldsymbol{C}$ nulové. Podle naznačené úvahy mohli bychom odvodit obecné podmínky řiditelnosti a pozorovatelnosti.

Doplňme uvedené úvahy o případ kdy k stacionárnímu lineárnímu diskrétnímu systému, se stavovými rovnicemi v normálním tvaru, sestavíme váhovou matici

$$\boldsymbol{S}(k - r) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-r-1}\boldsymbol{B}\,, \quad k > r\,. \tag{9.3}$$

Má-li takový systém některé veličiny neřiditelné nebo nepozorovatelné, pak takové veličiny nepřispívají žádnou složkou k váhové matici $\boldsymbol{S}$. Váhová matice představuje tudíž jen řiditelný a pozorovatelný subsystém daného systému.

Je-li nějaký systém plně popsán diferenciálními nebo diferenčními rovnicemi, pak takový systém je možné též vždy popsat stavovými rovnicemi jako systém řiditelný a pozorovatelný. Nevycházíme-li však při určování stavových rovnic z diferenciálních nebo diferenčních rovnic, můžeme dospět k stavovým rovnicím, které mohou představovat systém zčásti neřiditelný nebo nepozorovatelný.

Podmínky řiditelnosti můžeme též odvodit přímo z definice řiditelnosti, uvedené v odst. 2.10.

Podle (6.31) je stavová rovnice diskrétní soustavy, je-li poruchová veličina $u = 0$,

$$\boldsymbol{x}(kT + T) = \Phi(T)\,\boldsymbol{x}(kT) + \Lambda(T)\,y(kT)\,, \tag{9.4}$$

Pro $k = 0$ je

$$\boldsymbol{x}(T) = \Phi(T)\,\boldsymbol{x}(0) + \Lambda(T)\,y(0)\,. \tag{9.5}$$

Chceme-li, aby z počátečních podmínek $\boldsymbol{x}(0)$ byl dosažen v jedné periodě T stav

$\mathbf{x}(T) = 0$, pak tento požadavek můžeme splnit pro počáteční vektor

$$\mathbf{x}(0) = -\Phi^{-1}(T)\,\Lambda(T)\,y(0) = -\mathbf{S}_1 y(0)\,. \tag{9.6}$$

Podobně pro $k = 1$ je

$$\mathbf{x}(2T) = \Phi(T)\,\mathbf{x}(T) + \Lambda(T)\,y(T) \tag{9.7}$$

a ve dvou periodách můžeme dosáhnout stav $\mathbf{x}(2T) = 0$ z počátečních podmínek

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(0) &= -\Phi^{-1}(T)\,\Lambda(T)\,y(0) - \Phi^{-2}(T)\,\Lambda(T)\,y(T) = \\ &= -\mathbf{S}_1 y(0) - \mathbf{S}_2 y(T)\end{aligned} \tag{9.8}$$

a obecně pro $k = n$, kde n je řád soustavy,

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{S}_i y[(i-1)\,T] \tag{9.9}$$

s vektory

$$\mathbf{S}_i = \Phi^{-i}(T)\,\Lambda(T) = \Phi(-iT)\,\Lambda(T)\,. \tag{9.10}$$

Není-li akční veličina $y(kT)$ omezená, můžeme pak libovolný počáteční stav $\mathbf{x}(0)$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{S}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a nebo jinými slovy, můžeme soustavu n-tého řádu převést z libovolného počátečního stavu $\mathbf{x}(0)$ v n periodách do stavu $\mathbf{x}(nT) = 0$. Podle těchto úvah můžeme vyslovit větu:

Nutnou a postačující podmínkou pro řiditelnost soustavy, vyjádřené rovnicí (9.4) *je, aby vektory* $\mathbf{S}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *definované vztahem* (9.10), *byly lineárně nezávislé.*

10. ZÁVĚR

Z výsledků uvedených v předchozích kapitolách je patrno, že analýza regulovaných soustav a regulačních obvodů pomocí stavových rovnic je celkem jednoduchá a připouští značné zmechanisování výpočtů. Při řešení konkrétních úloh stačí prosté dosazení číselných hodnot do výsledných vztahů. Znova je však třeba poznamenat, že analýza pomocí stavových rovnic není míněna pro výpočty s tužkou a papírem, ale předpokládá se provádět číselné výpočty na číslicovém počítači. Čtenáře může zajímat, že v době dokončování tohoto rukopisu byly připraveny programy v programovacím jazyku Elliott Algol pro výpočet odezvy podle rovnic (3.34), (3.64), (3.75), (6.2), (6.23), (6.24), (6.32), (6.33) a to pro rovnice kap. 6 pro $u = 0$. Pro uzavřený regulační obvod se spojitou soustavou a číslicovým korekčním členem je program vypracován podle rovnice (7.4). Uvedené programy vypracoval Ing. J. Vališ, pracovník Ústavu teorie informace a automatizace ČSAV. Rád používám této příležitosti, abych mu na tomto místě poděkoval za ochotu a zájem, s kterým se této práce ujal. Hotový je též program pro výpočet diskrétního přenosu k dané spojité soustavě a to podle vztahů (6.63) a (6.64). Tento program a jeho analytické odvození vypracoval aspirant Ústavu teorie informace a automatizace ČSAV Ing. J. Ježek v rámci své kandidátské práce. V ní je též řešena opačná úloha, t.j. výpočet koeficientů diferenciální rovnice spojité soustavy, je-li dána diferenční rovnice soustavy nebo její diskrétní přenos.

Závěrem je třeba též poznamenat, že s ohledem na rozsah látky mohly být uvedeny v předchozích kapitolách jen základní poznatky a souvislosti. Vyjádření dynamických vlastností soustav pomocí stanových rovnic připouští však poměrně snadné zobecnění na případy nestacionárních soustav a řešení obvodů se spojitou soustavou a číslicovým korekčním členem, uvedené v kap. 7, může být formulováno i pro odlišné způsoby vzorkování, např. s nestejnou dobou vzorkování, s neperiodickým vzorkováním atp. Také Markovovy procesy je možné analyzovat se stejnými matematickými prostředky.

Uvedená tématika není zde tudíž zpracována vyčerpávajícím způsobem, nýbrž má pomáhat při osvojování a má být podnětem k praktickému využívání matematického přístupu a podnětem k dalšímu studiu.

LITERATURA

[1] Frazer R. A., Duncan W. J., Collar A. R.: Základy maticového počtu. SNTL, Praha 1958.

[2] Гантмахер Ф. Р.: Теория матриц. Наука, Москва 1966.

[3] Zadeh L. A., Desoer Ch. A.: Linear System Theory. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1963.

[4] Ježek J.: Algoritmus pro výpočet diskrétního přenosu lineární dynamické soustavy. Kybernetika *IV* (1968), 3, 246—258.

[5] Kalman R. E., Bertram J. E.: A unified approach to the theory of sampling systems. Journal of the Franklin Institute 267 (1959), 5, 405—436.

[6] Дидук Г. А.: К вопросу об исследовании автоматических систем методом матричных преобразований. Известия Академии наук СССР, Техническая кибернетика (1963), 6, 89—92.

[7] Мишина А. П., Проскуряков И. В.: Высшая алгебра. Физматгиз, Москва 1962.

[8] Pipes L. A.: Matrix methods for Engineering. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. Y. 1963.