

Miroslav Rosenbaum

K metodice řešení hybridních obvodů grafy signálových toků

*Kybernetika*, Vol. 5 (1969), No. 6, (484)--500

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/124142>

## Terms of use:

© Institute of Information Theory and Automation AS CR, 1969

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these

*Terms of use.*



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*  
<http://project.dml.cz>

## K metodice řešení hybridních obvodů grafy signálových toků

MIROSLAV ROSENBAUM

Článek pojednává o způsobu redukce hybridního grafu, zastupujícího soustavu simultánních algebraických rovnic, kde proměnné veličiny jsou jednak analogové, jednak diskrétní. Způsob redukce spočívá v transformaci hybridního grafu na diskrétní.

Analýza a syntéza hybridních měřících nebo řídicích obvodů, pracujících s analogovým a diskrétním signálem, vyžaduje zavedení takové metodiky, která po matematické stránce vylučuje vše, co do výpočtů zavádí složité nebo nepřehledné operace. Ve světové literatuře jsou nejčastěji užívány metodiky dvě, maticový počet a grafy signálových toků [1]. Výhodou maticového počtu je možnost maximálního využití číslicových počítačů, jejichž standardní programy obvykle maticové řešení soustav rovnic obsahují. Grafy signálových toků (dále grafy) naopak umožňují získávat přehledné dílčí výsledky i průběžnou kontrolu. Řešení grafů samočinným počítačem je v zásadě možné [2] a v některých případech rychlejší, než způsob klasický.



Obr. 1. Obvyklý způsob značení vzorkovacího členu.



Symbolika grafů není pro hybridní obvody doposud ustálena. Sedlar a Bekey [1] zavádějí pojem bílých uzlů pro analogové a černých pro diskrétní veličiny. Kuo [3] používá jako symbolu vzorkovacího členu signální cesty se vzorkovacím členem (obr. 1). Také vlastní stanovení reziduálních přenosů využívá buď klasické metody redukce grafu [4] nebo Masonova pravidla ve smyslu konvoluce dvou druhů determinantů grafu

$$(1) \quad c = \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} * \frac{\sum P_i^{(2)} \Delta_i^{(2)}}{\Delta^{(2)}}$$

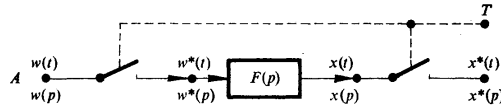
kde číslem jedna jsou označeny determinant a subdeterminanty analogové části grafu a číslem dvě determinant a subdeterminanty části diskretní. Výběr přenosových funkcí cest  $P_i^{(2)}$  a obecné vyčíslení pravé strany rovnice (1) je vázáno řadou pravidel, která je nutno striktně respektovat. Výhody grafů se mohou uplatnit tehdy, pokud redukce hybridního grafu nebude vyžadovat mimořádnou pozornost ke zvláštnostem užitého postupu. Ukazuje se, že jedním z řešení je transformace hybridního grafu na diskretní, který formálně umožňuje využití všech klasických metod řešení (Masonova a Coateova pravidla [5], metody nulových uzlů, inverze přenosů a pod.).

### TRANSFORMACE GRAFŮ

Při transformacích, resp. redukcí hybridních grafů, budeme s výhodou používat formální algebry, kterou uvedeme bez důkazu [8]:

- (a)  $[x(p)]^* = x^*(p)$ ,  
 (b)  $[F(p)x(p)]^* = Fx^*(p) = xF^*(p)$ ,  
 (c)  $[x_1(p) \pm x_2(p)]^* = x_1^*(p) \pm x_2^*(p)$ ,  
 (d)  $[ax(p)]^* = ax^*(p)$ ,  
 (e)  $[F(p)x^*(p)]^* = F^*(p)x^*(p)$ ,  
 (f)  $[F^*(p)x(p)]^* = F^*(p)x^*(p)$ .

Operaci vzorkování ve smyslu převodu spojité Laplaceovy transformace funkce do diskretní, nazveme transformací grafu a označujeme ji symbolicky hvězdičkou. Fyzikální podstatu uvedených vzorců ilustruje obr. 2. V cestě signálu mezi body  $A$  a  $B$  jsou vzorkovací členy, které ze spojitých signálů  $w(t)$  a  $x(t)$  vybírají v přesně definovaných časových intervalech jejich okamžité hodnoty (obr. 3). Veličina  $x(t)$  je znovu spojitá, protože soustava alespoň prvního řádu, definovaná přenosem  $F(p)$ ,



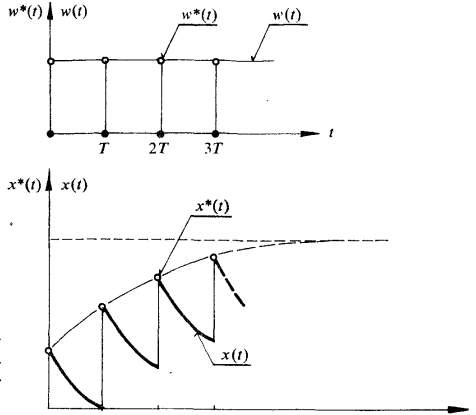
Obr. 2. Blokové schéma přenosové cesty signálu.

má integrující účinek na nespojitý vstupní signál. Z hlediska obrazů časových funkcí vzorkovací člen symbolizuje převod analogového obrazu na diskretní. Cestu signálu (obr. 2) popíšeme soustavou rovnic

$$(2) \quad \begin{aligned} [w(p)]^* &= w^*(p), \\ x(p) &= F(p)w^*(p), \\ [x(p)]^* &= x^*(p). \end{aligned}$$

486 Využitím pravidla (c) stanovíme diskrétní obraz proměnné  $x(p)$

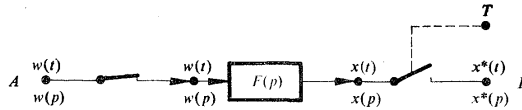
$$(3) \quad x^*(p) = F^*(p) w^*(p).$$



Obr. 3. Příklad odezvy soustavy  $x(t)$  na diskrétní vstupní signál  $w^*(t)$ .

Je-li jeden ze vzorkovacích členů trvale uzavřen (obr. 4), potom výstupní funkce  $x^*(p)$  bude pomocí pravidla (c) rovna

$$(4) \quad x^*(p) = F w^*(p).$$

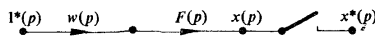


Obr. 4. Blokové schéma přenosové cesty signálu se vzorkovacím členem na výstupu soustavy.

V prvním případě můžeme z rovnice (3) určit diskrétní přenos  $F^*(p)$ , v druhém případě rovnice (4) definuje jen přenosovou funkci  $F w^*(p)$ . Tento zásadní a typický rozdíl mezi oběma cestami signálu je třeba vždy respektovat. Někteří autoři [6] tuto okolnost obcházejí tím způsobem, že rovnici (4) formálně přepíší na (5) a veličinu  $1^*(p)$  definují rovnu jedné,

$$(5) \quad x^*(p) = F w^*(p) \cdot 1^*(p)$$

Obr. 5. Graf, zastupující přenosovou cestu na obr. 4.

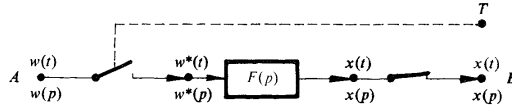


Diskrétní přenos  $x^*(p)/1^*(p)$  bude potom  $F w^*(p)$  (obr. 5).

Třetí případ přenosové cesty je na obr. 6. Cesta signálu je popsána soustavou rovnic (6) a (7):

$$(6) \quad [w(p)]^* = w^*(p),$$

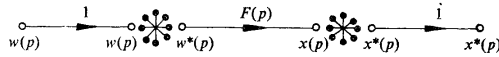
$$(7) \quad x(p) = F(p) w^*(p).$$



Obr. 6. Blokové schéma přenosové cesty signálu se vzorkovacím členem na vstupu soustavy.

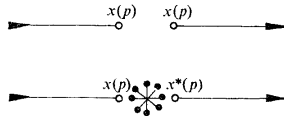
Rovnice (7) nám definuje přenosovou funkci  $x(p)$  jako odezvu soustavy  $F(p)$  na diskretní signál  $w^*(p)$ .

Pro návrh hybridního grafu soustavy s velkým počtem proměnných zavedeme určitou symboliku, která zaručí rozlišení cest analogového a diskretního signálu. Každé proměnné veličině přiřadíme pořadové číslo s tím, že nejmenšími čísly označíme nezávisle proměnné veličiny. Je-li veličina diskretní, pořadové číslo označíme



Obr. 7. Návrh grafu, zastupujícího přenosovou cestu signálu dle obr. 2.

hvězdičkou. Přenos cesty signálu budeme popisovat buď symbolem  $a_{ij}$ , kde indexy  $i$  a  $j$  jsou směrové a definují postup signálu od veličiny  $i$  k veličině  $j$ , nebo symbolem  $g_{rs}$ , kde index  $r$  je určovací, totožný s pořadovým číslem proměnné veličiny, index  $s$  je pořadový, obvykle shodný s číslem veličiny, ze které cesta signálu vychází. Diskretní přenos signálu mezi dvěma diskretními veličinami označíme  $a_{ij}^*$ , nebo  $g_{rs}^*$ , kde oba

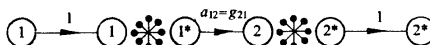


Obr. 8. Případy přerušení signálového toku štěpením uzlu a vzorkovacím členem (dole).

přenosy budou zastupovat *reziduální přenos* mezi těmito veličinami *převedený do diskretního tvaru*. Nemusí totiž platit ekvivalence mezi výrazy  $[a_{ij}]^*$ ,  $a_{ij}^*$ , resp.  $[g_{rs}]^*$  a  $g_{rs}^*$ . Formální rozdíl s pravidlem (a) bude z dalšího zřejmý, protože  $g_{rs}^*$ ,  $a_{ij}^*$  představuje dva kroky redukce grafu, vyhledání reziduálního přenosu mezi dvěma uzly a transformaci přenosu do diskretního tvaru. V případech, kdy obvody jsou

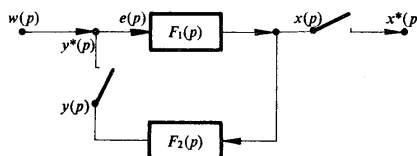
jednoduché, přehledné, grafu přiřadíme označení uzlů a cest stejné, jaké je použito v řešené soustavě rovnic s tím, že v jednoznačných případech můžeme vynechat i proměnnou ( $p$ ) nebo ( $z$ ). Např. obr. 2 topologicky transformujeme na obr. 7. Vstupní a výstupní signál je pomocí jednotkového přenosu zdvojen, symbol vzorkovacího členu  $z$  obr. 5 nahrazen hvězdičkou mezi rozštěpenými uzly a tak je zdůraz-

Obr. 9. Způsob označování uzlů a cest rozvětveného grafu signálových toků.



něna nespojitost toku analogového signálu obr. 8. V obecném případě budeme transformovat obr. 2 na obr. 9, resp. obr. 9 bude topologicky zastupovat soustavu rovnic (8). Dříve než stanovíme obecná pravidla pro transformaci hybridního grafu na

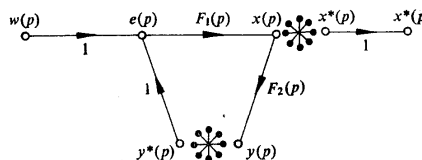
Obr. 10. Příklad diskretně řízené soustavy se zpětnou vazbou.



diskrétní, ukážeme základní vlastnosti hybridních grafů na několika příkladech. Blokové schéma na obr. 10 popíšeme soustavou rovnic

$$(8) \quad \begin{aligned} e(p) &= w(p) + y^*(p), & [y(p)]^* &= y^*(p), \\ x(p) &= F_1(p) e(p), & [x(p)]^* &= x^*(p), \\ y(p) &= F_2(p) x(p), \end{aligned}$$

Obr. 11. Zastupující graf k obr. 10.



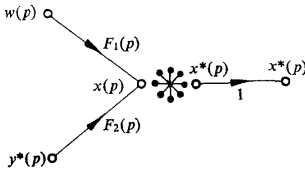
Soustavě rovnic (8) přiřadíme hybridní graf dle obr. 11. Vypočítejme pomocí pravidel ( $a \neq f$ ) ze soustavy rovnic (8) oba druhy výstupní veličiny  $x(p)$  a  $x^*(p)$

$$(9) \quad x(p) = F_1(p) w(p) + F_1(p) y^*(p),$$

$$(10) \quad x^*(p) = F_1 w^*(p) + F_1^*(p) y^*(p).$$

Pro obě rovnice (9), (10) je třeba stanovit veličinu  $y^*(p)$ , která se jeví jako jedno ze zřídél, určujících výstupní signál  $x(p)$ , resp.  $x^*(p)$  (obr. 12). Veličinu  $y(p)$  stanovíme z obr. 11

$$(11) \quad y(p) = F_1(p) F_2(p) w(p) + F_1(p) F_2(p) y^*(p).$$



Obr. 12. Formální štěpení obrazu diskrétního signálu.

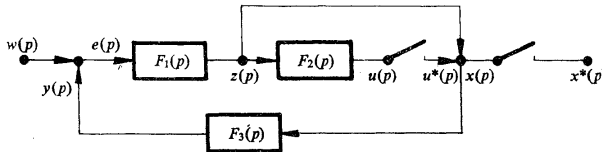
Pomocí pravidel (a), (b), (e) a úpravou, bude  $y^*(p)$  ve tvaru

$$(12) \quad y^*(p) = \frac{F_1 F_2 w^*(p)}{1 - F_1 F_2^*(p)}.$$

Analogová výstupní veličina  $x(p)$  po dosazení (12) do (9)

$$(13) \quad x(p) = F_1(p) w(p) + F_1(p) \frac{F_1 F_2 w^*(p)}{1 - F_1 F_2^*(p)}$$

bude mít dvě složky. První složka, *analogová*, není diskrétní zpětnou vazbou ovlivněna, protože cesta analogového signálu je vzorkovacím členem *přerušena*. Druhá, diskrétní složka, důsledkem činnosti vzorkovacího členu je ovlivněna zpětnou vazbou. Přenosová funkce druhé složky obsahuje determinant  $\Delta^* = 1 - F_1 F_2^*(p)$ .



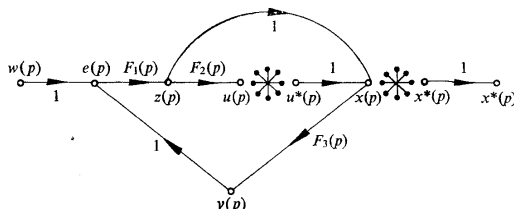
Obr. 13. Soustava s analogovou a diskrétní zpětnovazební smyčkou.

Hybridní blokové schéma jiné soustavy je na obr. 13. Schéma obsahuje analogovou i diskrétní smyčku. Soustavu si popíšeme rovnicemi

$$(14) \quad \begin{aligned} e(p) &= w(p) + y(p), & y(p) &= F_3(p) x(p), \\ z(p) &= F_1(p) e(p), & x(p) &= z(p) + u^*(p), \\ u(p) &= F_2(p) z(p). \end{aligned}$$

Přirazený graf je na obr. 14. Výstupní analogová veličina  $x(p)$  je rovna součtu  $z(p)$  a  $u^*(p)$ . Postupnou eliminací proměnných soustavy (14) stanovíme pomocí pravidel (a-f) obraz poruchy

$$(15) \quad z(p) = \frac{F_1(p) w(p)}{1 - F_1(p) F_3(p)} + \frac{F_1(p) F_3(p)}{1 - F_1(p) F_3(p)} u^*(p)$$



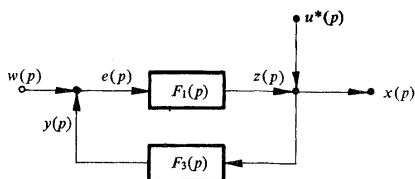
Obr. 14. Zastupující graf signálových toků k obr. 13.

a veličiny  $u^*(p)$

$$(16) \quad u^*(p) = \frac{\begin{bmatrix} F_1(p) & F_2(p) & w(p) \end{bmatrix}^*}{1 - \begin{bmatrix} F_1(p) & F_2(p) & F_3(p) \end{bmatrix}^*}$$

kde vztah (16) vznikl z (15) pomocí definiční rovnice pro  $u(p)$ . Výstupní analogová veličina  $x(p)$  sečtením (15), (16) a úpravou bude rovna

$$(17) \quad x(p) = \frac{F_1(p) w(p)}{1 - F_1(p) F_3(p)} + \frac{1}{1 - F_1(p) F_3(p)} u^*(p).$$



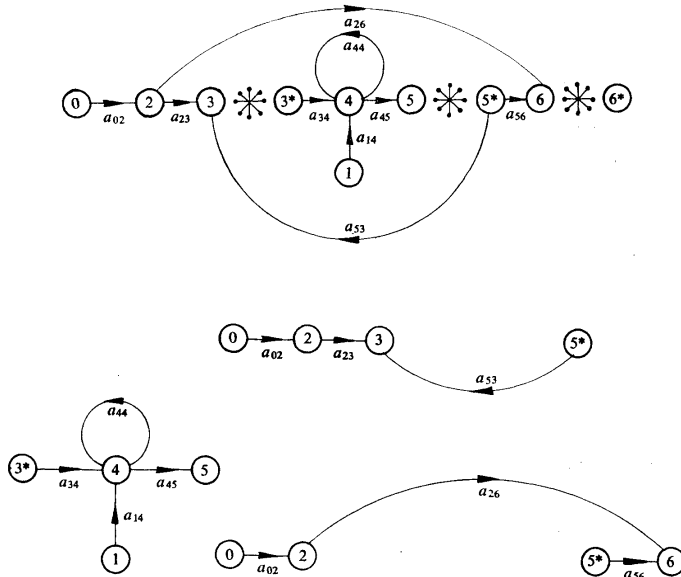
Obr. 15. Princip superpozice účinků analogových a diskretních signálů soustav se zpětnou vazbou bez vzorkovacího členu.

První složka (17) je analogová přenosová funkce nezávisle proměnné  $w(p)$ , druhá složka je ovlivněna analogovou smyčkou a jeví se jako přenosová funkce poruchy  $u^*(p)$  působící na výstupu analogové smyčky. Blokové schéma, popisující přenos (17), je na obr. 15. Shrneme-li několik skutečností, které z uvedených příkladů



vyplývají, vidíme, že vzorkovací členy jednak představují pro analogovou část grafu přerušeni cesty signálu, jednak se jeví jako nezávislé diskretní zřídlo signálu analogové veličiny. Z toho vyplývá důležitý důsledek, že i přenos každého diskretního signálu je ovlivněn analogovými obvody, které souvisí s jeho cestou. Tyto závěry jsou v souladu s Ashem, Kimem a Krancem [7].

Dříve než uvedené vlastnosti hybridního grafu zobecníme, definujeme několik pojmů, potřebných ke stanovení reziduálních přenosů.



Obr. 16. Hybridní graf s množinou hlavních podgrafů, přiřazených analogovým veličinám před vzorkovacím členem.

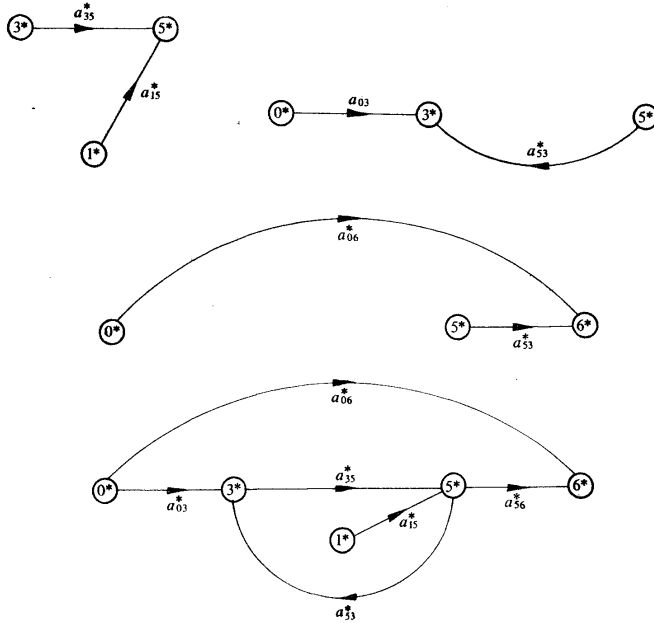
*Diskretní cesta, nebo smyčka grafu* obsahuje alespoň jediný vzorkovací člen. *Analogová cesta, nebo smyčka grafu* neobsahuje vzorkovací člen.

Každé hlavní analogové veličině, která je před vzorkovacím členem, přiřadíme hlavní analogový podgraf, obsahující všechna analogová i diskretní zřídla, ze kterých vedou analogové cesty signálu k této veličině. Determinant podgrafu nazveme přiřazeným analogovým determinantem a označíme pořadovým číslem příslušné veličiny. Tyto podgrafy redukuje některou ze známých metod. Typický příklad uvádíme na obr. 16, kde jsou vyznačeny současně všechny hlavní podgrafy, přiřazené

analogovým veličinám, za kterými následuje vzorkovací člen. Je zřejmé, že pouze jediný podgraf obsahuje analogovou klíčku a jediný uzel 5 má přiřazený determinant

$$(18) \quad \Delta_5 = 1 - a_{44}^*.$$

Podgrafy přiřazené ostatním analogovým veličinám nazveme *vedlejšími*. Abychom mohli vypočítat libovolnou závislou veličinu, musíme mít možnost stanovit explicitně



Obr. 17. Množina reziduálních hlavních podgrafů z obr. 16 v diskretním tvaru s úplným diskretním grafem, který vznikl jejich součtem (dole).

i její diskretní tvar. To provedeme transformací hybridního grafu na graf diskretní, topologickou eliminací vzorkovacích členů. To znamená, že provedeme redukcí a transformací ve všech podgrafech a jejich zpětným složením vytvoříme úplný diskretní graf soustavy. Transformace přenosu větve, kde zdrojem je diskretní signál je jednoduchá a provádí se podle pravidla (e). Transformace přenosu větve, kde vstupním signálem je veličina analogová, provádí se podle pravidla (b). Máme-li tuto okolnost vždy na paměti, nemusíme je topologicky zvlášť zdůrazňovat. Transfor-

maci dle úmluvy provedeme současně se stanovením reziduálních přenosů mezi jednotlivými uzly. Pro příklad dle obr. 16 je tato operace provedena na obr. 17. Jednotlivé diskretní přenosy mezi uzly budou pomocí pravidel (a + f), resp. Masonova pravidla

$$(19) \quad \begin{aligned} a_{15}^* &= \left[ \frac{a_{44} \cdot a_{45} \cdot x_1}{1 - a_{44}} \right]^*, & a_{56}^* &= [a_{56}]^*, \\ a_{35}^* &= \left[ \frac{a_{34} \cdot a_{45}}{1 - a_{44}} \right]^*, & a_{53}^* &= [a_{53}]^*, \\ a_{03}^* &= [a_{02} \cdot a_{23} \cdot x_0]^*, \\ a_{03}^* &= [a_{02} \cdot a_{26} \cdot x_0]^*, \end{aligned}$$

V uzlech 0 a 1 předpokládáme podle [6] jednotkový zdroj signálu  $1^*(p)$ . Diskretní graf je možno řešit klasicky, vzhledem k formální podobnosti s analogovým grafem signálových toků. Jednotlivé podgrafy (obr. 16) nám konečně definují analogové veličiny, které někdy máme také stanovit. Determinant diskretního grafu označujeme dle úmluvy hvězdičkou  $\Delta^*$ . Pro příklad na obr. 17, kde

$$(20) \quad \Delta^* = 1 - a_{53}^* a_{35}^*,$$

vychází diskretní veličina  $x_6^*(p)$ , ( $1^*(p) \equiv 1$ )

$$(21) \quad x_6^*(p) = a_{06}^* \cdot 1^*(p) + \frac{a_{03}^* \cdot a_{35}^* \cdot a_{56}^*}{1 - a_{53}^* a_{35}^*} 1^*(p) + \frac{a_{15}^* \cdot a_{56}^*}{1 - a_{53}^* \cdot a_{35}^*} 1^*(p).$$

Dosazením (19) do (21) můžeme po zpětné transformaci stanovit i časový průběh  $x_6^*(t)$ .

#### SHRnutí A PŘÍKLADY

Analýza hybridních obvodů metodou grafů signálových toků nevyžaduje zvláštní pravidla výpočtu. V soustavách s analogovými i diskretními veličinami platí princip nezávislosti analogových podgrafů na diskretním grafu. Vzorovací člen znamená pro analogový signál přerušeni cesty signálu. Diskretní graf je však závislý na analogových podgrafech. V analogovém podgrafu se diskretní veličiny jeví jako soubor nezávislých zdrojů signálu. Tímto způsobem je zavedena „zpětná vazba“ mezi oběma druhy signálů. Pravidla redukce hybridního grafu shrneme takto:

1. *Analogová veličina hybridního grafu* zastupovaná uzlem, je definována přiřazeným analogovým podgrafem, který tento uzel obsahuje, zdroji signálu jsou jednak analogové, jednak některé diskretní proměnné hybridního grafu, spojené cestami s tímto uzlem.

2. *Hlavní analogová veličina* je zastoupena uzlem před vzorovacím členem, podgraf k němu přiřazený, nazýváme *hlavní*.

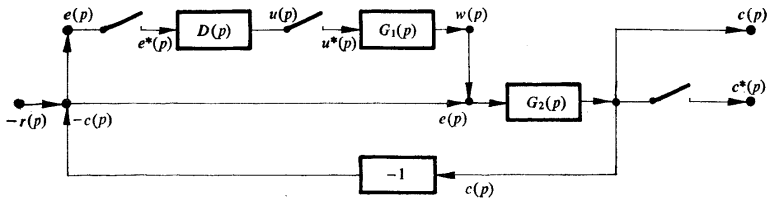
3. *Diskrétní veličina hybridního grafu* zastupovaná uzlem, je definována úplným diskrétním grafem, který vznikne složením všech hlavních podgrafů, u kterých byla provedena transformace všech reziduálních přenosů, reziduálních přenosových funkcí a veličin do diskrétního tvaru.

4. *Úplný diskrétní graf* řešíme v důsledku podobnosti některým ze známých způsobů redukce analogových grafů, např. modifikovaným Masonovým pravidlem

$$(22) \quad x_k^*(p) = \frac{\sum_i {}^k P_i^*(p) {}^k \Delta_i^*}{\Delta^*},$$

kde  ${}^k P_i^*(p)$  jsou *přenosové funkce*  $k$ -té nezávislé diskrétní veličiny,  ${}^k \Delta_i^*$  přiřazené subdeterminanty,  $\Delta^*$  diskrétní determinant soustavy (v pojmu *přenosová funkce* připomínáme zvláštnosti transformace grafu).

Abychom si ilustrovali postup redukce hybridního grafu, uvedeme několik typických příkladů. Stanovíme oba druhy výstupního signálu  $c(p)$  a  $c^*(p)$  hybridní soustavy, definované blokovým schématem [3] z obr. 18. Blokové schéma převedeme dle úmluvy na graf, který doplníme přiřazenými podgrafy k uzlům, zastupujícím veličiny před vzorkovacími členy (obr. 19). V dalším



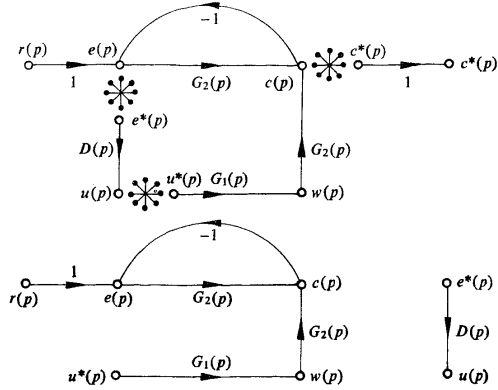
Obr. 18. Příklad hybridního blokového schématu dle [3].

kroku jsme respektovali při transformaci podgrafů do diskrétního tvaru spojitost obrazu vstupní funkce  $r(p)$  (obr. 20). Při odvozování jsme použili jediného hlavního podgrafu pro  $e(p)$  a  $c(p)$ , které jsou totožné.

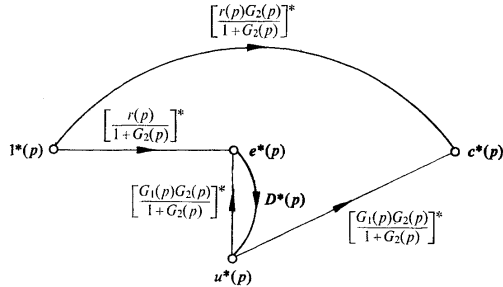
Výsledné přenosové funkce stanovíme ve tvaru

$$(23) \quad c(p) = \frac{r(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} + \frac{D^*(p) \left[ \frac{r(p)}{1 + G_2(p)} \right]^*}{1 + D^*(p) \left[ \frac{G_1(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^*} \cdot \frac{G_1(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)},$$

$$(24) \quad c^*(p) = \left[ \frac{r(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^* + \frac{D^*(p) \left[ \frac{r(p)}{1 + G_2(p)} \right]^* \left[ \frac{G_1(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^*}{1 + D^*(p) \left[ \frac{G_1(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^*}.$$



Obr. 19. Zastupující hybridní graf k obr. 18 s vyčleněnými hlavními podgrafy.



Obr. 20. Přifažený úplný diskretní graf odvozený z obr. 19.

Výsledek (24) není jednoznačný, např. v [3], je uvedena pro  $c^*(p)$  tato přenosová funkce

$$(25) \quad c^*(p) = \frac{\left[ \frac{G_1(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^* D^*(p) r^*(p)}{1 + D^*(p) \left[ \frac{G_1(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^*} + \frac{\left[ \frac{G_2(p) r(p)}{1 + G_2(p)} \right]^*}{1 + D^*(p) \left[ \frac{G_1(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^*},$$

$$\begin{aligned}
 (26) \quad c(p) &= G_2(p) w(p) + G_2(p) e(p), \\
 e(p) &= r(p) - c(p), \\
 w(p) &= G_1(p) u^*(p), \\
 u(p) &= D(p) e^*(p).
 \end{aligned}$$

Tato dvojnásobnost řešení je na první pohled zarážející, i když se nám zdá, že analyticky je tvar (24) jednodušší. Provedme však zkoušku. Rovnají-li se levé strany rovnic (24) a (25), musí být rovní i strany pravé. Po převedení (24) na společného jmenovatele, vynásobením pravých stran rovnic (24) a (25) determinátem  $D^*$  dostaneme

$$\begin{aligned}
 (27) \quad & \left[ \frac{r(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^* + \left[ \frac{r(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^* D^*(p) \left[ \frac{G_1(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^* + \\
 & + D^*(p) \left[ \frac{r(p)}{1 + G_2(p)} \right]^* \left[ \frac{G_1(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^* = \\
 & = \left[ \frac{G_1(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^* D^*(p) r^*(p) + \left[ \frac{G_2(p) r(p)}{1 + G_2(p)} \right]^*.
 \end{aligned}$$

Odečtením stejných výrazů na obou stranách rovnice (27) a dělením výrazem  $[G_1(p) \cdot G_2(p)]^* / (1 + G_2(p))^* D^*(p)$  můžeme stanovit  $r^*(p)$

$$(28) \quad \left[ \frac{r(p) G_2(p)}{1 + G_2(p)} \right]^* + \left[ \frac{r(p)}{1 + G_2(p)} \right]^* = r^*(p).$$

Pomocí pravidla součtu (c) rovnice (28) přejde po zřejmé úpravě na tvar

$$(29) \quad \left[ \frac{r(p) (1 + G_2(p))}{1 + G_2(p)} \right]^* = r^*(p),$$

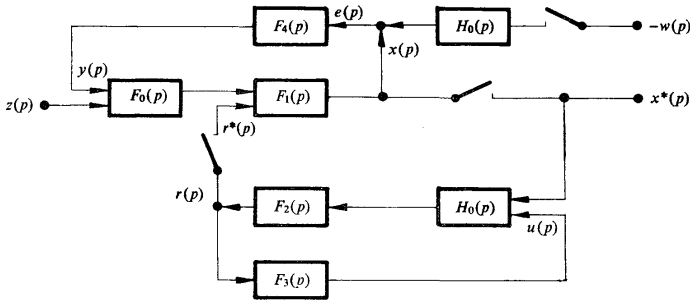
kteřá vede k ekvivalenci obou stran rovnice (29).

Důsledkem této úvahy je i ekvivalence obou přenosových funkcí (24) a (25).

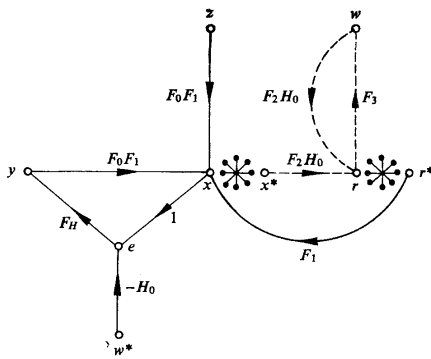
Stanovíme přenosovou funkci  $x(z)$  rozvětveného obvodu, definovaného blokovým schématem obr. 21, hybridním grafem a podgrafy dle obr. 22.

V grafu je použito jednoho ze způsobů úsporného popisu, kdy jsme pro jednoznačnost vyznačili proměnnou  $p$  a výrazně vyznačili všechny podgrafy. Diskrétní graf po transformacích je na obr. 23, takže přenosová funkce  $x^*(p)$  je dána rovnicí

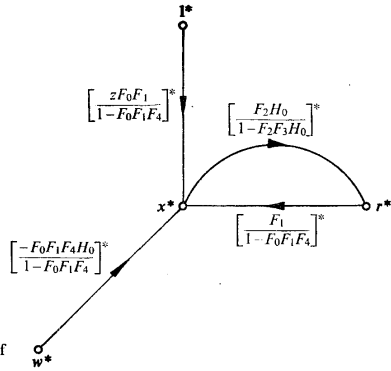
$$(30) \quad x^*(p) = \frac{\left[ \frac{F_0(p) F_1(p) z(p)}{1 - F_0(p) F_1(p) F_4(p)} \right]^* - \left[ \frac{F_0(p) F_1(p) F_4(p) H_0(p)}{1 - F_0(p) F_1(p) F_4(p)} \right]^* w^*(p)}{1 - \left[ \frac{F_1(p)}{1 - F_0(p) F_1(p) F_4(p)} \right]^* \left[ \frac{F_2(p) H_0(p)}{1 - F_2(p) F_3(p) H_0(p)} \right]^*}.$$



Obr. 21. Příklad rozvětveného hybridního blokového schématu.



Obr. 22. Zastupující hybridní graf k obr. 21 s graficky vyznačenými hlavními podgrafy.

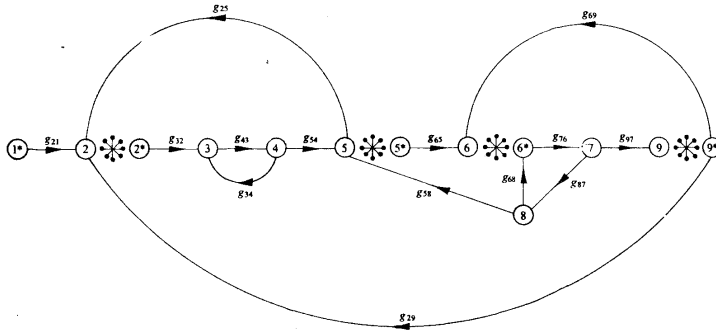


Obr. 23. Přifažený úplný diskretní graf k obr. 22.

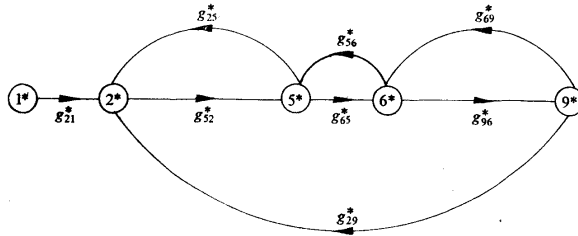
498 Převedeme-li přenosovou funkci  $x^*(p)$  do transformace  $\mathfrak{B}$ , rovnici (30) formálně převedeme na tvar

$$(31) \quad x(z) = \frac{3 \left[ \frac{F_0(p) F_1(p) z(p)}{1 - F_0(p) F_1(p) F_4(p)} \right] - 3 \left[ \frac{F_0(p) F_1(p) F_4(p) H_0(p)}{1 - F_0(p) F_1(p) F_4(p)} \right] w(z)}{1 - 3 \left[ \frac{F_1(p)}{1 - F_0(p) F_1(p) F_4(p)} \right] \cdot 3 \left[ \frac{F_2(p) H_0(p)}{1 - F_2(p) F_3(p) H_0(p)} \right]}$$

V grafu (obr. 22) máme dvě analogové smyčky, které se nedotýkají, přesto přenosová funkce neobsahuje součin jejich přenosů. Je to z toho důvodu, že obě smyčky jsou přiřazeny dvěma nezávislým podgrafům, odděleným vzorkovacím členem.



Obr. 24. Příklad rozvětveného zastupujícího hybridního grafu soustavy.



Obr. 25. Přiřazený úplný diskretní graf k obr. 24.

Stanovíme přenosovou funkci  $x(p)$ , je-li soustava rovnic zastupována hybridním grafem dle obr. 24. Hlavní podgrafy po zjištění reziduálních přenosů a transformaci složíme do diskretního grafu na obr. 25. Determinant grafu  $A^*$  a  $x_2^*(p)$  stanovíme takto:

$$(32) \quad A^* = 1 - (g_{52}^* g_{25}^* + g_{56}^* g_{65}^* + g_{69}^* g_{96}^* + g_{52}^* g_{65}^* g_{96}^* g_{29}^*) + g_{25}^* g_{52}^* g_{96}^* g_{69}^*$$



$$(33) \quad x_{52}^*(p) = \frac{g_{21}^* g_{52}^* (1 - g_{69}^* g_{96}^*)}{\Delta^*}.$$

Jednotlivé diskrétní přenosy  $g_{rs}^*$  jsou pak definovány příslušnými transformovanými hlavními podgrafy. Např.:

$$(34) \quad g_{52}^* = \left[ \frac{g_{32} g_{43} g_{54}}{1 - g_{43} g_{34}} \right]^*, \quad g_{56}^* = \left[ \frac{g_{76} g_{87} g_{58}}{1 - g_{76} g_{87} g_{68}} \right]^*, \\ g_{96}^* = \left[ \frac{g_{76} g_{97}}{1 - g_{97} g_{89} g_{78}} \right]^*, \quad g_{69}^* = [g_{69}]^*.$$

Při stanovování přenosu  $g_{52}^*$  jsme použili pravidlo součtu, i když Masonovo pravidlo vede ke stejným výsledkům. Můžeme totiž psát

$$(35) \quad g_{52}^* = \left[ \frac{g_{32} g_{43} g_{53} (1 - g_{76} g_{87} g_{68})}{1 - (g_{76} g_{87} g_{68} + g_{43} g_{34}) + g_{43} g_{34} g_{78} g_{87} g_{68}} \right]^*.$$

Jednoduchou úpravou jmenovatele  $\Delta_5$  získáme výraz (36), který po vykrácení stanoví výsledek uvedený výše:

$$(36) \quad g_{52}^* = \left[ \frac{g_{32} g_{43} g_{53} (1 - g_{76} g_{87} g_{68})}{(1 - g_{76} g_{87} g_{96}) (1 - g_{43} g_{34})} \right]^*.$$

Po získání určité zkušenosti je možno provádět transformaci hybridního grafu na diskrétní bez rozkreslování hlavních podgrafů. Podgrafy slouží spíše k výpočtu analogových veličin. Klasické matematické řešení soustavy hybridních rovnic mnohdy vede k pracným úpravám bez možnosti průběžné kontroly. Výše popsaná metoda nevyžaduje zvláštních pravidel pro redukci hybridního grafu a při řešení některých úloh z teorie řízení může být cennou pomůckou.

(Došlo dne 18. února 1969.)

#### LITERATURA

- [1] M. Sedlar, G. A. Bekey: Signal Flow Graphs of Sampled-Data Systems: A New Formulation. IEEE Transactions on Automatic Control. *AC-12* (1967), 2, 154.
- [2] V. Hanta: Diplomní práce VŠCHT, 1968.
- [3] B. C. Kuo: Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems. Prentice-Hall, INC., N. Y. 1963, str. 104.
- [4] M. Tuero: Metoda grafů signálových toků. Slaboproudý obzor *20* (1959), 10, 608.
- [5] S. P. Chan, B. H. Bapna: A Modification of the Coates Gain Formula for the Analysis of Linear Systems. Int. J. Control. *5* (1967), 5, 483.
- [6] G. G. Lendaris, E. I. Jury: Input-output Relationships for Multiloop Sampled Systems. AIEE Transactions (Appl. and Ind.) (Jan. 1960), 375.
- [7] R. Ash, W. H. Kim, G. M. Kranc: A General Flow graph Technique for the Solution of Multiloop Sampled Systems. ASME Transactions (June 1960), 360.
- [8] G. Fodor: Laplace Transforms in Engineering, A. Kiadó, Budapest 1965.

## To the Method of Solving Hybrid Circuits by Signal—flow Graphs

MIROSLAV ROSENBAUM

The method of a reduction of an hybrid signal-flow graph corresponding to the set of simultaneous linear equations where the variables are either analog or discrete, is described.

The subgraphs corresponding to the analog variables before the sampler can be transformed to residual discrete subgraphs which are completed into a discrete signal-flow graph. The formal similarity of this with the graph corresponding to the group of analog variables and dependences enables the full application of all classical methods of reduction (Mason's, Coates' rules, loop elimination and so on).

*Doc. Dr. Miroslav Rosenbaum, CSc. Katedra automatizace chemických výroby, Vysoká škola chemicko-technologická, Technická 1905, Praha 6.*