Karel Čupr

Příspěvek k analytické geometrii kuželoseček. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 284--290

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124105

jednotnosti, mohou býti velmi výhodny v případech, kdy kuželosečka jest dána formou, jak o ní hovořeno, nebo když její střed či druhé ohnisko ubíhá z nákresny, což se velmi často stává při řezu hyperbolickém.

Příspěvek k analytické geometrii kuželoseček.

Dr. Karel Čupr.

Úloha nalézti osy kuželosečky dané rovnicí

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

(a_{11}, a_{12}, ... a_{33} jsou čísla reálná) řešívá se pravidelně transformací souřadnic. V článku tomto bude podáno řešení jiné, transformačních vzorců vůbec neužívající. Též některé jiné detaily budou odvozeny způsobem jiným. Vyšetřování provedeme pro soustavu os kosoúhlou, za tím účelem odvodíme si dva vzorce.

1. Je-li dána soustava os svírajících úhel ω, jest vzdálenost dvou bodů M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) dána dle Carnotovy věty výrazem

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2\,(x_1 - x_2)\,(y_1 - y_2) \cos \omega.$$

Rovnice kruhu o středu (p, q) a poloměru r jest pak

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 + 2\,(x - p)\,(y - q) \cos \omega = r^2.$$

Spojme body M_1, M_2 se středem soustavy O; jest stanoviti úhel $M_1 O M_2$. Způsobem týmž jako v soustavě pravoúhlé odvodíme, že plocha trojúhelníka OM_1M_2 jest dána výrazem

$$\varDelta = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin \omega = \tfrac{1}{2}\,(x_1 y_2 - y_1 x_2) \sin \omega;$$

jest však též

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}\, r_1 r_2 \sin \varphi,$$

kdež φ jest hledaný úhel

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 \cos \omega, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2 \cos \omega.$$

Jest tedy

$$\sin \varphi = \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2) \sin \omega}{r_1 r_2}, \tag{1}$$

dále

$$cos\ \varphi = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\ cos\ \omega}{r_1r_2},$$

odkudž

$$tg\ \varphi = \frac{(x_1y_2 - y_1x_2)\ sin\ \omega}{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 + y_2x_1)\ cos\ \omega}.$$

Označme

$$\frac{y_1}{x_1} = A_1,\ \frac{y_2}{x_2} = A_2;$$

pak máme

$$sin\ \varphi = \frac{(A_2 - A_1)\ sin\ \omega}{\sqrt{1 + 2A_1\ cos\ \omega + A_1^2}\ \sqrt{1 + 2A_2\ cos\ \omega + A_2^2}} \qquad (1^*)$$

$$cos\ \varphi = \frac{(1 + A_1A_2) + (A_1 + A_2)\ cos\ \omega}{\sqrt{1 + 2A_1\ cos\ \omega + A_1^2}\ \sqrt{1 + 2A_2\ cos\ \omega + A_2^2}}$$

$$tg\ \varphi = \frac{(A_2 - A_1)\ sin\ \omega}{(1 + A_1A_2) + (A_1 + A_2)\ cos\ \omega}.$$

Jsou-li přímky rovnoběžné, musí býti

$$A_1 = A_2, \qquad (2)$$

jsou-li k sobě kolmé, musí býti $\varphi = 90^0$, čili

$$1 + A_1A_2 + (A_1 + A_2)\ cos\ \omega = 0,$$

odkudž

$$A_2 = -\frac{1 + A_1\ cos\ \omega}{A_1 + cos\ \omega}. \qquad (3)$$

2. Budiž dána kuželosečka mající střed v konečnu (= centrická) rovnicí

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Střed kuželosečky definujeme jako průsečík sdružených průměrů. Protněme danou kuželosečku svazkem rovnoběžných přímek daným rovnicí $y = Ax + b$, kdež A jest veličina stálá, b proměnná. Pak o abscissách průsečíků platí rovnice

$$(a_{11} + 2a_{12}A + a_{22}A^2)x^2 + 2[(a_{12} + a_{22}A)b + a_{13} + a_{23}A)]x$$
$$+ (a_{22}b^2 + 2a_{23}b + a_{33}) = 0.$$

Střed sečny má tedy abscissu

$$\xi = -\frac{(a_{12} + a_{22}A)\ b + (a_{12} + a_{23})\ A}{a_{11} + 2a_{12}A + a_{22}A^2};$$

pak pořadnice středu jest $\eta = A\xi + b$.

Eliminací b z posledních dvou rovnic obdržíme rovnici sdruženého průměru ku průměru rovnoběžnému s přímkou $y = Ax + b$. Rovnice ta po několika úpravách zní

$$(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}) + (a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23})A = 0. \quad (4)$$

Na přímce této leží i střed naší kuželosečky. Rovnice sdruženého průměru k ose X obdržíme položíce $A = 0$; dělme (4) A a položme $A = \infty$, tak obdržíme rovnici sdruženého průměru k ose Y. Střed kuželosečky jest tedy dán průsečíkem přímek

$$a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13} = 0, \quad (4^*)$$

$$a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23} = 0, \quad (4^{**})$$

jež řešeny dle ξ, η dávají souřadnice středu:

$$\xi = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad \eta = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Má-li tedy kuželosečka míti střed v konečnu, musí býti

$$\partial = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Násobme rovnici (4*) ξ a (4**) η, jest pak, sečteme-li

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 = -(a_{13}\xi + a_{23}\eta) \quad (5^*)$$

V dalším budeme potřebovat výraz

$$a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}.$$

Rozložme determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

dle elementů posledního řádku; jest pak

$$D = a_{13}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\partial,$$

odkudž snadno obdržíme

$$a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33} = \frac{D}{\partial}. \quad (5^{**})$$

Jest možno, aby střed kuželosečky ležel na téže kuželosečce? Pak by musilo být

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + 2a_{13}\xi + 2a_{23}\eta + a_{33} = 0,$$

čili

$$\xi(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}) + \eta(a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23}) \\ + (a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}) = 0;$$

s ohledem na rovnice (4*), (4**) jest

$$a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33} = 0. \qquad (5^{**})$$

Rovnice (4*), (4**), (5**) nesmí pak obsahovati spor; musí tedy býti

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

čili $D = 0$. Kuželosečka taková není již kuželosečkou v pravém slova smyslu, zvrhá se ve dvě přímky protínající se v bodě určeném dvěma z rovnic (4*), (4**), (5**). Z odvození jest patrno, že $D = 0$ jest podmínkou nutnou a postačující, aby kuželosečka zvrhla se ve dvě přímky; pak nerovnina $D \neq 0$ jest podmínkou nutnou a postačující, aby rovnice $f(x, y) = 0$ definovala kuželosečku skutečnou, nezvrhlou; má-li tato býti ještě centrickou, jest nutno, aby $\partial \neq 0$.

Určíme nyní tečnu ke kuželosečce v bodě (x_1, y_1). Veďme přímku tímto bodem a středem kuželosečky; směrnice její jest $\frac{y_1 - \eta}{x_1 - \xi}$. Sdružený průměr k tomuto směru jest rovnoběžný s tečnou v bodě (x_1, y_1). Z rovnice (4) vyplývá, je-li A směrnice jednoho průměru, že směrnice sdruženého průměru jest

$$A_1 = -\frac{a_{11} + a_{12}A}{a_{12} + a_{22}A}.$$

Jest tedy směrnice tečny dána výrazem

$$A_t = -\frac{a_{11} + a_{12}\dfrac{y_1 - \eta}{x_1 - \xi}}{a_{12} + a_{12}\dfrac{y_1 - \eta}{x_1 - \xi}} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 - (a_{11}\xi + a_{12}\eta)}{a_{12}x_1 + a_{22}y_1 - (a_{12}\xi + a_{22}\eta)},$$

kterýžto zlomek s ohledem na rovnice (4*), (4**) dá

$$A_t = -\frac{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}}{a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}.$$

Značme k vůli stručnosti

$$a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} = f_1,$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} = f_2;$$

pak jest

$$A_t = -\frac{f_1}{f_2}, \tag{6}$$

a rovnice tečny

$$T \equiv f_1 \,.\, x + f_2 \,.\, y - (x_1 f_1 + y_2 f_2) = 0. \tag{6*}$$

Rovnice normály jest, užijeme-li vzorce (3)

$$\begin{aligned} N \equiv (f_2 - f_1 \cos \omega)\, x + (-f_1 + f_2 \cos \omega)\, y \\ - [x_1 f_2 - y_1 f_1 - (x_1 f_1 - y_1 f_2) \cos \omega] = 0. \end{aligned} \tag{6**}$$

Poznamenejme si ještě směrnici normály

$$A_n = \frac{f_2 - f_1 \cos \omega}{f_1 - f_2 \cos \omega}.$$

Ze sdružených průměrů vynikají průměry k sobě kolmé. Zoveme je osami kuželosečky. Směrnice os snadno určíme: směry A a $A_1 = -\frac{a_{11} + a_{12}A}{a_{12} + a_{22}A}$ jsou pak k sobě kolmé, musí tedy dle vzorce (3) býti

$$A^2 (a_{12} - a_{22} \cos \omega) + A (a_{11} - a_{22}) + (a_{11} \cos \omega - a_{12}) = 0. \tag{7*}$$

Má-li býti jedna z os kuželoseček rovnoběžna s osou úseček, musí býti kořenem rovnice (7) $A = 0$; t. j., musí býti $a_{11} \cos \omega - a_{12} = 0$. Má-li býti jedna z os rovnoběžna s osou pořadnic, musí býti $A = \infty$ kořenem rovnice (7); t. j.

$$a_{11} \cos \omega - a_{12} = 0.$$

Kružnice má nekonečně mnoho os; rovnice (7) poskytuje pak pro A hodnotu neurčitou; jest tedy, má-li kuželosečka dána býti kružnicí,

$$a_{11} = a_{22} = \frac{a_{12}}{\cos \omega}.$$

Existují nějaké tečny, jež by šly středem kuželosečky? Pak 3 přímky

$$\begin{aligned} f_1 \,.\, x + f_2 \,.\, y - (x_1 f_1 + y_1 f_2) &= 0, \\ a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0, \\ a_{12}a + a_{22}y + a_{23} &= 0, \end{aligned}$$

jdou jedním bodem; jest tedy

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & -(x_1 f_1 + y_1 f_2) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & f_1 \\ a_{12} & a_{22} & f_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{22}f_1^2 - 2a_{12}f_1 f_2 + a_{11}f_2^2 = 0, \qquad (8^*)$$

při čemž s determinantem jsme provedli snadnou transformaci. Tečny tohoto druhu známe u hyperboly, jsou to asymptoty. Snadno odvodíme podmínku, aby kuželosečka $f(x, y) = 0$ byla hyperbolou. Rovnici (8*) lze též psát se zřetelem ku (6)

$$a_{22}A_t^2 + 2a_{12}A_t + a_{11} = 0, \qquad (8^{**})$$

kterážto rovnice podává směrnice asymptot. Mají-li asymptoty býti reálné, musí býti $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, čili $\partial < 0$. Případ $\partial > 0$, jak hned uvidíme, definuje elipsu; elipsa má tedy asymptoty imaginárné. Aby jedna asymptota hyperboly byla rovnoběžna s osou X, musí býti $a_{11} = 0$; je-li $a_{22} = 0$, jest jedna z asymptot rovnoběžná s osou Y; je-li konečně

$$a_{11} = a_{22} = 0,$$

jsou asymptoty rovnoběžny s osami souřadnicovými.

Odvoďme společnou rovnici asymptot. Jsou-li kořeny rovnice (8**) A_1, A_2, jsou rovnice asymptot

$$\begin{aligned} y - \eta - A_1 (x - \xi) &= 0, \\ y - \eta - A_2 (x - \xi) &= 0. \end{aligned}$$

Znásobením obdržíme

$$(y - \eta)^2 - (A_1 + A_2)(y - \eta)(x - \xi) + A_1 A_2 (x - \xi)^2 = 0,$$

čili — poněvadž $A_1 + A_2 = -\dfrac{2a_{12}}{a_{22}}$, $A_1 A_2 = \dfrac{a_{11}}{a_{22}}$ —,

$$a_{22}(y - \eta)^2 + 2a_{12}(y - \eta)(x - \xi) + a_{11}(x - \xi)^2 = 0.$$

Další úprava dává

$$
\begin{aligned}
a_{11}x^2 &+ 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2x(a_{11}\xi + a_{12}\eta) \\
&- 2y(a_{12}\xi + a_{22}\eta) + a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 \\
&= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y - a_{13}\xi + a_{23}\eta \\
&= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} - \frac{D}{\partial} = 0.
\end{aligned}
$$

Je-li tedy dána kuželosečka $f(x, y) = 0$, jest společná rovnice asymptot

$$
f(x, y) = \frac{D}{\partial}. \tag{8***}
$$

3. Dosud jsme předpokládali, že $D \neq 0$; je-li $D = 0$, degeneruje kuželosečka ve dvě přímky, jichž vzájemnou polohu určíme z rovnice (8**). Určíme úhel těchto dvou přímek. Jest pak

$$
tg^2\varphi = \frac{(A_1 - A_2)^2 \sin^2\omega}{[(1 + A_1A_2) + (A_1 + A_2)\cos\omega]^2}.
$$

Z rovnice (8**) plyne

$$
A_1 + A_2 = -\frac{2a_{12}}{a_{22}},
$$

$$
A_1A_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}},
$$

$$
A_1 - A_2 = \sqrt{(A_1 + A_2)^2 - 4A_1A_2};
$$

jest tedy

$$
tg^2\varphi = -\frac{4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\sin^2\omega}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)^2} =
$$

$$
-\frac{4\delta \sin^2\omega}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)^2}. \tag{9*}
$$

(Dokončení.)