

Bohumil Bydžovský

O vytvoření geodetických křivek na rotačních plochách centrálních druhého stupně

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 151--193

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/124104>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1915

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

jehož povrch je limitou plochy

$$x^n + y^n + z^n = a^n$$

(v souřadnicích bodových) pro *sudé* n (viz pojednání na str. 144. dole pod čarou uvedené).

Naproti tomu limita téže plochy pro *liché* a bez konce vzrůstající n skládá se z bočných stěn pravidelného čtyřstěnu a z nekonečné roviny jeho základny, z níž však tato základna jest vyňata. — Ve všech uvažovaných případech se ovšem předpokládá, že exponent n je číslo *celé*.

O vytvoření geodetických křivek na rotačních plochách centrálních druhého stupně.

B. Bydžovský.

Vycházejí ze zajímavého výsledku G. H. Halphenova ukázaný jsem v tomto Časopisu ¹⁾, jak lze křivky vzniklé promítnutím geodetických křivek rotačních ellipsoidů do roviny rovníku vytvořiti kotálením ellipsy, při němž buď střed ellipsy je pevný (případ ellipsoidu protáhlého; výsledek Halphenův), nebo vzdálenost tohoto středu od středu plochy, měřená kolmo k rovině ellipsy, je stálá (případ ellipsoidu sploštělého). Pokládáme-li tuto stálou vzdálenost za výšku přímého kužele majícího ellipsu za základnu, běží tu — v druhém případě — o valení kužele po rovině rovníku.

Je-li r průvodič kotálející se ellipsy, ρ průvodič projekce geodetiky, je v obou případech rozdíl $r^2 - \rho^2$ veličina stálá; v prvním případě kladná, v druhém záporná.

Odvozením uvedených vět je nejen nalezena zajímavá vlastnost geodetických křivek rotačních ellipsoidů, nýbrž lze na základě jich učiniti si velmi snadno představu o jejich průběhu. Pokládal jsem proto za zajímavé zkoumat, zdali i pro ostatní (centrální) rotační plochy druhého stupně lze nalézt podobné názorné věty. Výsledek svých úvah předkládám v tomto článku.

¹⁾ O vytvoření geodetických křivek na rotačních ellipsoidech; roč. XLI. str. 319—330 (číslo Koláčkovo).

I.

1. Abych nepřerušoval svých výkladů, předešlu řadu výsledků Halphenovy theorie geodetických křivek na rotačních plochách druhého stupně, jichž znalosti je třeba k pochopení dalšího²⁾; jakož i některé výsledky mého článku výše zmíněného.

Souřadnice bodu geodetické křivky rotační plochy druhého stupně

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1 - \frac{z^2}{b^2} \quad (1)$$

lze vyjádřiti parametricky užitím elliptických funkcí. Položí-li se

$$z^2 = \tau^2 (e_\beta - pu) \quad (2)$$

kde $p(u)$ je známá Weierstrassova funkce a $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ kořeny rovnice

$$p'(u) = 0,$$

pak element oblouku geodetiky je dán rovnicí

$$ds = \tau \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} (e_\alpha - pu) du. \quad (3)$$

τ značí faktor úměrnosti. Veličiny $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ souvisí s rozměry rotační plochy relacemi

$$\left. \begin{aligned} \tau^2(e_\alpha - e_\beta) &= \frac{b^4}{a^2 - b^2} \\ \tau^2(e_\beta - e_\gamma) &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} b^2 \\ \tau^2(e_\alpha - e_\gamma) &= \frac{a^4 - a^2c^2 + b^2c^2}{a^2(a^2 - b^2)} b^2 \end{aligned} \right\} (4)$$

z nichž ovšem jedna závisí na druhých dvou. Při tom je c integrační konstanta a značí poloměr rovnoběžky, které se geodetika dotýká. Je pak toto číslo pro reálnou geodetiku nutně reálné.

Ze vzorců (4) plynou užitím základního vztahu

$$e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0 \quad (5)$$

²⁾ V. G. H. Halphen: *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* II. díl kap. VI. — Některé výsledky, jež v této kapitole I. bez důkazu uvádím, nejsou v knize H. obsaženy, ale plynou z ostatních výkladů jeho téměř bezprostředně.

další vzorce:

$$\left. \begin{aligned} e_\alpha &= \frac{b^2}{3a^2\tau^2(a^2 - b^2)} (a^4 + a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2) \\ e_\beta &= \frac{b^2}{3a^2\tau^2(a^2 - b^2)} (a^4 - 2a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2) \\ e_\gamma &= \frac{b^2}{3a^2\tau^2(a^2 - b^2)} (-2a^4 + a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2) \end{aligned} \right\} (6)$$

Je-li ρ průvodič bodu geodetiky, platí

$$\rho^2 = \tau^2 \frac{a^2 - b^2}{b^2} pu + \frac{1}{3a^2} (2a^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2). \quad (7)$$

Podle volby čísla c obdržíme různé geodetiky na ploše. Na elipsech může c nabývatí všech hodnot mezi 0 a a ; pro $c > a$ obdržely by se geodetiky imaginární. Naproti tomu pro hyperboloidy může c nabýti libovolných reálných hodnot.

2. Nazveme s_1 oblouk, ρ_1 průvodič křivky, kterou obdržíme promítnutím geodetiky do roviny rovníku.³⁾ Element oblouku s_1 lze vyjádřití vzorcem

$$ds_1 = \frac{a}{b} \tau(p_1 v - \varepsilon_\alpha) dv, \quad (8)$$

kde $p_1(v)$ je Weierstrassova funkce a $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma$ kořeny rovnice

$$p_1^2(v) = 0.$$

Platí pak pro souvislost těchto čísel s čísly a, b, c tyto vzorce — z nichž ovšem jen dva jsou nezávislé —:

$$\left. \begin{aligned} \tau^2(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) &= \frac{b^4 c^2}{a^4} \\ \tau^2(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma) &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} b^2 \\ \tau^2(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma) &= \frac{a^4 - a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^4} b^2 \end{aligned} \right\} (9)$$

Z nich plynou vzhledem k základní relaci

$$\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma = 0 \quad (10)$$

³⁾ Pro to, co v dalším je uvedeno, srv. můj článek výše uvedený.

další vzorce

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{b^2}{3\tau^2 a^4} (a^4 - a^2 c^2 + 2b^2 c^2) \\ \varepsilon_\beta &= \frac{b^2}{3\tau^2 a^4} (a^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2) \\ \varepsilon_\gamma &= \frac{b^2}{3\tau^2 a^4} (-2a^4 + 2a^2 c^2 - b^2 c^2) \end{aligned} \right\} (11)$$

Pro průvodič projekce geodetiky platí

$$\varrho_1^2 = \frac{a^2 \tau^2}{b^2} p_1 v + \frac{2a^4 + c^2(a^2 + b^2)}{3a^2}. \quad (12)^4$$

II.

3. Přistoupím nyní v souhlasu s tím, co bylo řečeno v úvodu, k řešení této obecné úlohy:

Jest určití křivky, jichž kotálením lze vytvořiti projekce geodetických křivek rotačních ploch (centrálních) druhého stupně na rovinu rovníku; kotálení pak necht' je toho druhu, jaké bylo vytčeno v úvodu, při němž totiž rozdíl čtverců průvodičů křivky se kotálejší a křivky vytvořené je veličina stálá.

Budiž σ oblouk, r průvodič hledané křivky. Element oblouku této křivky musí býti ovšem týž jako element oblouku křivky vytvořené, t. j. musí — dle vzorce (8) —

$$d\sigma = \frac{a}{b} \tau(p_1 v - \varepsilon_\alpha) dv \quad (13)$$

Vedle toho má býti rozdíl $r^2 - \varrho_1^2$ veličina stálá; z toho plyne se zřetelem ke vzorci (12), že pro průvodič hledané křivky platí rovnice

$$r^2 = \frac{a^2 \tau^2}{b^2} (p_1 v - k); \quad (14)$$

konstantní rozdíl obou čtverců je pak

$$D = -k \frac{a^2 \tau^2}{b^2} - \frac{2a^4 + c^2(a^2 + b^2)}{3a^2} \quad (15)$$

⁴⁾ Což je rovnice (29) mého článku, místo r však je psáno ϱ_1 .

Křivky hledané vyhovují tedy rovnicím (13) a (14); řešením těchto rovnic dospějeme k řešení úlohy výše vyslovené.

4. Nazveme ϑ polární úhel v rovině hledané křivky. Pak platí

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 = \frac{a^2}{b^2} \tau^2 (p_1 v - \varepsilon_\alpha)^2 dv^2. \quad (16)$$

Násobme obě strany této rovnice $p_1' v$ a nahraďme tento výraz na levé straně známým výrazem jemu rovným

$$4(p_1 v - \varepsilon_\alpha)(p_1 v - \varepsilon_\beta)(p_1 v - \varepsilon_\gamma);$$

zkrátíme-li ještě $p_1 v - \varepsilon_\alpha$, obdržíme rovnici

$$4(dr^2 + r^2 d\vartheta^2)(p_1 v - \varepsilon_\beta)(p_1 v - \varepsilon_\gamma) = \frac{a^2}{b^2} \tau^2 (p_1 v - \varepsilon_\alpha) p_1' v dv^2.$$

Pišme pro stručnost $p_1 v = \omega$;

pak $p_1' v dv = d\omega$,

tak že máme

$$4(dr^2 + r^2 d\vartheta^2)(\omega - \varepsilon_\beta)(\omega - \varepsilon_\gamma) = \frac{a^2}{b^2} \tau^2 (\omega - \varepsilon_\alpha) d\omega^2. \quad (17)$$

Z rovnice (14) differencováním se obdrží

$$2r dr = \frac{a^2 \tau^2}{b^2} d\omega$$

a odtud

$$dr^2 = \frac{a^4 \tau^4}{4b^4 r^2} d\omega^2$$

a opětným užitím rovnice (14)

$$dr^2 = \frac{a^2 \tau^2}{4b^2(\omega - k)} d\omega^2.$$

Nahraďme v rovnici (17) r^2 dle vzorce (14) a dr^2 dle posledního vzorce; obdržíme — krátíme hned $\frac{a^2 \tau^2}{b^2}$ —

$$\left[\frac{d\omega^2}{\omega - k} + 4(\omega - k) d\vartheta^2 \right] (\omega - \varepsilon_\beta)(\omega - \varepsilon_\gamma) = (\omega - \varepsilon_\alpha) d\omega^2$$

a odtud jednoduchou úpravou

$$\begin{aligned} 4d\vartheta^2(\omega - k)^2(\omega - \varepsilon_\beta)(\omega - \varepsilon_\gamma) = \\ = d\omega^2[\omega(\varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha - k) + k\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma] \end{aligned}$$

Užitím relace (10) změní se koeficient při ω na pravé straně $v - 2\varepsilon_\alpha - k$; konečná úprava pak nás dovede k rovnici

$$d\vartheta = \frac{d\omega}{2(\omega - k)} \sqrt{\frac{k\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma - \omega(2\varepsilon_\alpha + k)}{(\omega - \varepsilon_\beta)(\omega - \varepsilon_\gamma)}}. \quad (18)$$

Ježto k dle svého zavedení je arbitrární konstanta, je zřejmo, že obecně $2\varepsilon_\alpha + k$ není rovno 0.

I pišme $k\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma = \varepsilon(2\varepsilon_\alpha + k)$ (19)

čímž zavádíme pohodlnější konstantu

$$\varepsilon = \frac{k\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma}{2\varepsilon_\alpha + k};$$

pišme mimo to pro stručnost

$$2\varepsilon_\alpha + k = -\Delta. \quad (20)$$

Pak hořejší vzorec nabude tvaru — násobíme-li ještě čitatele i jmenovatele odmocninou z $\omega - \varepsilon$ —

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2(\omega - k)} \frac{(\omega - \varepsilon)d\omega}{\sqrt{(\omega - \varepsilon)(\omega - \varepsilon_\beta)(\omega - \varepsilon_\gamma)}} \quad (21)$$

5. Integraci této rovnice provedeme zavedením Weierstrassovy funkce. Učiníme substituci

$$\omega = \omega' - m \quad (22)$$

a určíme m tak, aby

$$\varepsilon'_\alpha + \varepsilon'_\beta + \varepsilon'_\gamma = 0, \quad (23)$$

kde $\varepsilon'_\alpha = m + \varepsilon$, $\varepsilon'_\beta = m + \varepsilon_\beta$, $\varepsilon'_\gamma = m + \varepsilon_\gamma$.

Z této podmínky se obdrží

$$m = -\frac{\varepsilon + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma}{3} = \frac{\varepsilon_\alpha - \varepsilon}{3}.$$

Výraz pro $d\vartheta$ změní se zavedením ω' , ε'_α , ε'_β , ε'_γ tak, že zní

$$\begin{aligned} d\vartheta &= \frac{(\omega' - \varepsilon'_\alpha) \sqrt{\Delta} \cdot d\omega'}{2(\omega' - m - k) \sqrt{(\omega' - \varepsilon'_\alpha)(\omega' - \varepsilon'_\beta)(\omega' - \varepsilon'_\gamma)}} = \\ &= \sqrt{\Delta} \frac{d\omega'}{2 \sqrt{(\omega' - \varepsilon'_\alpha)(\omega' - \varepsilon'_\beta)(\omega' - \varepsilon'_\gamma)}} + \\ &+ \sqrt{\Delta} (m + k - \varepsilon'_\alpha) \frac{d\omega'}{2(\omega' - m - k) \sqrt{(\omega' - \varepsilon'_\alpha)(\omega' - \varepsilon'_\beta)(\omega' - \varepsilon'_\gamma)}}. \end{aligned}$$

Položme

$$u = \int_{\omega'}^{\infty} \frac{d\omega'}{2 \sqrt{(\omega' - \varepsilon'_\alpha)(\omega' - \varepsilon'_\beta)(\omega' - \varepsilon'_\gamma)}};$$

pak vzhledem ke vztahu (23) je

$$\omega' = pu, \quad (24)$$

kde p je Weierstrassova funkce (ovšem jiná, než ta, o níž je řeč v odstavci 1. — nedorozumění zde nemůže nastati); kořeny p'^2u jsou $\varepsilon'_\alpha, \varepsilon'_\beta, \varepsilon'_\gamma$.

Z tohoto zavedení plyne

$$du = - \frac{d\omega'}{2 \sqrt{(\omega' - \varepsilon'_\alpha)(\omega' - \varepsilon'_\beta)(\omega' - \varepsilon'_\gamma)}}$$

a tedy výraz pro $d\vartheta$ nabude konečného tvaru

$$d\vartheta = -\sqrt{\Delta} du - \sqrt{\Delta} (m + k - \varepsilon'_\alpha) \frac{du}{pu - m - k}.$$

Položme

$$m + k = p(u_0), \quad (25)$$

čímž je definována hodnota u_0 . Užijme známého vzorce

$$\frac{p'(u_0)}{p(u_0) - p(u)} = \xi(u_0 + u) + \xi(u_0 - u) - 2\xi(u_0),$$

kde ξ značí funkci známou z theorie elliptických funkcí. Je tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{pu - m - k} &= \frac{-1}{p(u_0) - p(u)} = \\ &= \frac{-1}{p'(u_0)} [\xi(u_0 + u) + \xi(u_0 - u) - 2\xi(u_0)], \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} d\vartheta &= -\sqrt{\Delta} du + \\ &+ \sqrt{\Delta} \frac{p(u_0) - \varepsilon'_\alpha}{p'(u_0)} [\xi(u_0 + u) + \xi(u_0 - u) - 2\xi(u_0)] du. \end{aligned}$$

Tento vzorec lze integrovati užitím Weierstrassovy σ -funkce; obdržíme

$$\begin{aligned} \vartheta - \vartheta_0 &= -\sqrt{\Delta} u + \\ &+ \sqrt{\Delta} \frac{p(u_0) - \varepsilon'_\alpha}{p'(u_0)} [\log \sigma(u_0 + u) - \log \sigma(u_0 - u) - 2u\xi(u_0)], \end{aligned}$$

což po jednoduché úpravě lze psáti

$$\frac{\vartheta - \vartheta_0}{\sqrt{A}} p'(u_0) = -u [p'(u_0) + 2(p(u_0) - \varepsilon'_\alpha) \xi(u_0)] + \\ + (p(u_0) - \varepsilon'_\alpha) \log \frac{\sigma(u_0 + u)}{\sigma(u_0 - u)}. \quad (26)$$

Připíšme k tomu rovnici (14) pro průvodič, do níž hned dosadíme za p, v výraz $pu - m$ dle vzorců (22) a (24); obdržíme

$$r^2 = \frac{a^2 \tau^2}{b^2} (pu - m - k)$$

čili dle (25)

$$r^2 = \frac{a^2 \tau^2}{b^2} [pu - pu_0] \quad (27)$$

Obě rovnice vyjadřují parametricky polární souřadnice bodu hledaných křivek; je tedy rovnicemi (26) a (27) řešen úkol odst. 3.

Je možno zjistiti — a to pro stručnost vynechávám — že lze k vždy voliti — v širokých mezích — tak, aby pro každou geodetickou křivku odpovídalo tomuto analytickému řešení reálné řešení geometrické.

III.

6. Vybereme nyní z nalezených křivek takové, jež by byly pokud možno nejjednodušší, což se ovšem stane vhodnou volbou veličiny k . Lze očekávati nápadné zjednodušení, když elliptické funkce, jež v řešení se vyskytly, degenerují; *i je na snadě probrati všechny možné případy, kdy se tak stane, a vytknouti, jak dalece jimi jsou vyčerpány všechny druhy geodetických čar na uvažovaných plochách.* Místo však, abychom příslušné úvahy připjali ke konečným rovnicím (26), (27), vrátíme se k výrazu (18) a budeme zkoumati, kdy integrand tam obsažený, obecně elliptický, přestane jím býti. Je zřejmo, že to nastane především, když $2\varepsilon_\alpha + k = 0$, ježto pak běží jen o odmocninu z kvadratického trojčlenu. Mimo to ukazuje vzorec (21), že se to dále stane, když dva ze tří lineárních činitelů ve jmenovateli

se vyskytujících se stotožní. Je však vyloučeno, aby $\varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$, neboť pak by elliptická funkce, sloužící k vyjádření projekce geodetické křivky, degenerovala, což pro obecnou geodetiku nastane. I může býti jen $\varepsilon = \varepsilon_\beta$, nebo $\varepsilon = \varepsilon_\gamma$.

Máme tedy tři případy, jež budeme postupně zkoumati, totiž:

- I. $k = -2\varepsilon_\alpha$,
 - II. $\varepsilon = \varepsilon_\beta$,
 - III. $\varepsilon = \varepsilon_\gamma$.
7. — I. $k = -2\varepsilon_\alpha$.

Pak $k\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma = -2\varepsilon_\alpha^2 - \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma = -\varepsilon_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha(\varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma) - \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma = -(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma)$, kde bylo užito vlastností vyjádřené vzorcem (10).

Rovnice (18) nabude tvaru

$$d\vartheta = \frac{d\omega \sqrt{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)(\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha)}}{2(\omega + 2\varepsilon_\alpha) \sqrt{(\omega - \varepsilon_\beta)(\omega - \varepsilon_\gamma)}}.$$

Tento výraz integruje se známým způsobem substitucí

$$t = \sqrt{\frac{\omega - \varepsilon_\gamma}{\omega - \varepsilon_\beta}};$$

obdrží se

$$\vartheta - \vartheta_0 = \text{arc tg} \sqrt{\frac{\omega - \varepsilon_\gamma}{\omega - \varepsilon_\beta} \cdot \frac{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}}$$

čili

$$\text{tg}^2(\vartheta - \vartheta_0) = \frac{\omega - \varepsilon_\gamma}{\omega - \varepsilon_\beta} \cdot \frac{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}.$$

Avšak dle vzorce (14) je

$$\frac{b^2 r^2}{a^2 \tau^2} = \omega - k,$$

t. j. v našem případě

$$\omega = \frac{b^2 r^2}{a^2 \tau^2} - 2\varepsilon_\alpha.$$

To dosadíme a obdržíme

$$\text{tg}^2(\vartheta - \vartheta_0) = \frac{b^2 r^2 - a^2 \tau^2 (2\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\gamma)}{b^2 r^2 - a^2 \tau^2 (2\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)} \cdot \frac{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta},$$

což užitím vztahu (10) přejde v rovnici

$$tg^2 (\vartheta - \vartheta_0) = \frac{b^2 r^2 - a^2 \tau^2 (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)}{b^2 r^2 - a^2 \tau^2 (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma)} \cdot \frac{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}$$

čili

$$\sin^2 (\vartheta - \vartheta_0) (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) [b^2 r^2 - a^2 \tau^2 (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma)] + \\ + \cos^2 (\vartheta - \vartheta_0) (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma) [b^2 r^2 - a^2 \tau^2 (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)] = 0.$$

Zavedeme pravoúhlé souřadnice

$$x = r \cos (\vartheta - \vartheta_0), \quad y = r \sin (\vartheta - \vartheta_0),$$

načež obdržíme z předchozí rovnice po krátké úpravě

$$b^2 x^2 (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma) + b^2 y^2 (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) = a^2 \tau^2 (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma),$$

což pišme

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad (28)$$

kde
$$a'^2 = \frac{a^2 \tau^2}{b^2} (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta), \quad b'^2 = \frac{a^2 \tau^2}{b^2} (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma).$$

Dosadíme sem ze vzorců (9); obdržíme

$$a'^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2}, \quad b'^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 - c^2. \quad (29)$$

Obdrželi jsme tedy v tomto prvním případě kuželosečku, jejíž poloosy jsou vyjádřeny dle posledních vzorců konstantami určujícími geodetiku.

Abychom hned také poznali, jakého druhu je kotálení této kuželosečky, určíme pro tento případ veličinu $D - v$. (15) —; ona se rovná

$$2\varepsilon_\alpha \frac{a^2 \tau^2}{b^2} - \frac{2a^4 + c^2 (a^2 + b^2)}{3a^2};$$

dosadíme-li sem za ε_α dle (11), obdržíme po krátké úpravě

$$r^2 - \varrho_1^2 = \frac{c^2}{a^2} (b^2 - a^2). \quad (30)$$

8. Je ještě třeba rozhodnouti, zdali a v kterých případech nalezená kuželosečka je reálná a jakého je druhu. Podkladem diskuse jsou vzorce (29); nutno při ní přihlížeti jednak ke znaménku poloos a^2 , b^2 , jednak k velikosti čísla c .

a) Pro $a^2 > 0$, $b^2 > 0$, t. j. pro oba elipsoidy, je — v. odst. 1. — $c^2 < a^2$ a tedy $a'^2 > 0$, $b'^2 > 0$; rovnice (28)

značí reálnou ellipsu. Vzorec (30) ukazuje, že pro $a^2 > b^2$ — t. j. ellipsoid sploštělý — je $r^2 - e_1^2 < 0$, pro $a^2 < b^2$ — t. j. ellipsoid protáhlý — je $r^2 - e_1^2 > 0$.

Tím jsou dokázány znovu věty, uvedené již v úvodu; těmi netřeba se dále zabývat.

b) Pro $a^2 > 0$, $b^2 < 0$, t. j. v případě hyperboloidu jednoplochého, je dle (29) $a'^2 < 0$. Aby kuželosečka byla reálná, musí

$$b'^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 - c^2 > 0,$$

$$\text{t. j.} \quad 0 < c < \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} < a. \quad (31)$$

Zároveň je $r^2 - e_1^2 < 0$, t. j. případ valení kužele. Kotálející se kuželosečka je hyperbola; nevytvoří pak se kotálením projekce všech možných geodetik hyperboloidu, nýbrž jen jednoho jejich druhu, jenž bude v dalším blíže charakterisován.

c) Pro $a^2 < 0$, $b^2 > 0$, t. j. v případě hyperboloidu dvojplochého, obdrží se $a'^2 < 0$, $b'^2 < 0$; to však dává kuželosečku imaginární.

Výsledek diskuse je tedy tento:

Projekce geodetik rotačních ellipsoidů a jednoho druhu geodetik rotačního hyperboloidu jednoplochého na rovinu rovníku lze vytvořit kotálením kuželoseček; pro ellipsoidy ellipsy, pro hyperboloid hyperboly. Při ellipsoidu protáhlém je střed kotálející se ellipsy pevný; v obou zbývajících případech běží o valení přímého kužele, majícího příslušnou kuželosečku za základnu, po rovině.

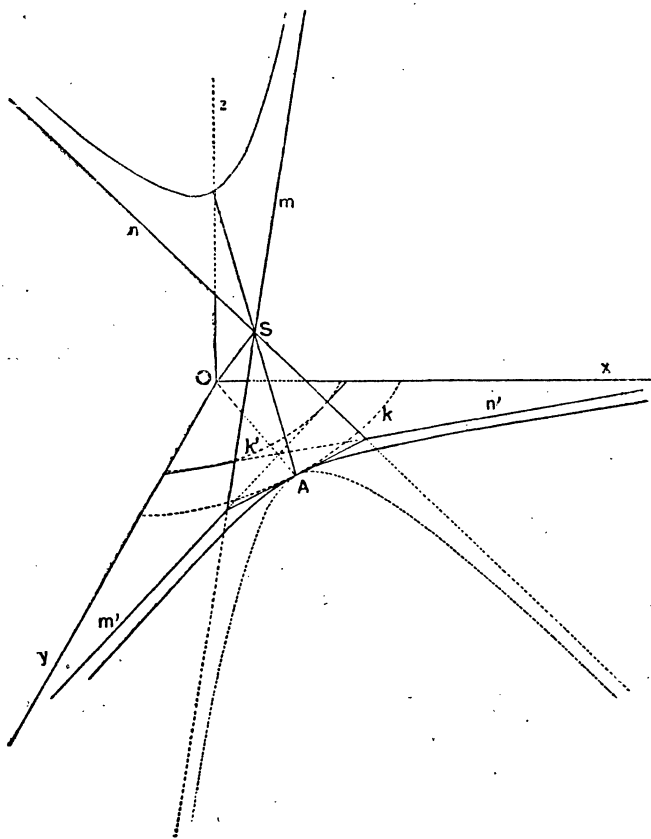
9. Blíží studium případu b) vede k zajímavým podrobnostem. Hlavní poloosa kotálející se hyperboly je

$$\sqrt{\frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 - c^2},$$

poloosa vedlejší $\frac{c}{a} \sqrt{-b^2}$; vzdálenost roviny této hyperboly

od středu hyperboloidu je $\frac{c}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$ a prochází ovšem středem hyperboly.

Sledujme způsob kotálení. (V. obr. 1.) Představme si hyperbolu v té poloze, kdy se dotýká roviny rovníku jedním svým vrcholem A . Příslušný bod projekce geodetiky má průvodič e_1 ,



Obr. 1.

který obdržíme z rovnice (30), dosadíme-li

$$r^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 - c^2;$$

t. j.
$$e_1^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 - c^2 - \frac{c^2}{a^2} (b^2 - a^2) = a^2.$$

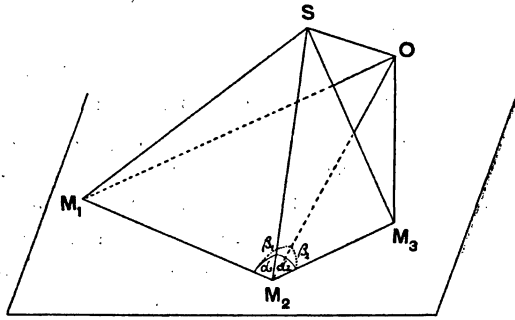
Obdržíme tedy bod na rovníku: t. j. příslušná geodetika protíná rovník.

V této poloze jedna větev hyperboly, na př. ta, jež se roviny dotýká, je pod rovinou rovníku, druhá nad ní; střed hyperboly S a tedy i spojnice jeho se středem plochy nad rovinou. Když nastane kotálení některým směrem, vzdaluje se dotyčný bod od kružnice rovníkové; střed hyperboly se sklání k rovině rovníku. Střed tento octne se v rovině rovníku, když dotyčný bod vzdálí se do nekonečna; pak rovina hyperboly protíná rovinu rovníku kolmo v jedné asymptotě hyperboly. Ježto každá tečna kotálejší se hyperboly v bodě dotyčném s rovinou je zároveň tečnou křivky vytvořené, je asymptota hyperboly v této poloze zároveň asymptotou projekce geodetiky. (V obr. 1. jsou označeny m' , n' .) Její vzdálenost od středu plochy je ovšem rovna konstantní vzdálenosti středu hyperboly, totiž $\frac{c}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$.

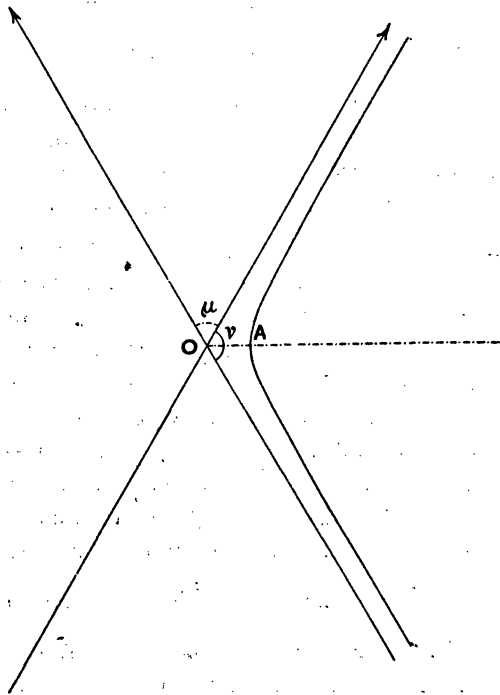
Ježto pak dle (31) je $c \sqrt{a^2 - b^2} < a^2$, je tato vzdálenost menší než a , t. j. *asymptota projekce geodetiky protíná rovník plochy ve dvou reálných bodech a dotýká se tedy kružnice k' soustředné s rovníkem k , avšak o menším poloměru.*

Další kotálení děje se tak, že druhá větev hyperboly se počne dotýkati roviny; střed hyperboly klesá pod rovinu, dostoupí nejnižšího místa, když se roviny dotkne druhý vrchol hyperboly, a stoupá pak k rovině, v níž se ocitne současně s druhou asymptotou hyperboly. Pak opět kotálení přejde na první větev hyperboly a tak se věc stále opakuje. Tím způsobem vznikne nekonečně mnoho shodných větví tvaru hyperbolického, vytvořených střídavě jednou a druhou větví hyperboly; všechny ty větve dotýkají se rovníku v bodech equidistantních. *Každá větev vytvořené kotálnice má dvě asymptoty; všechny asymptoty dotýkají se kružnice o poloměru $\frac{c}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$. Každé dvě po sobě vytvořené větve mají společnou asymptotu, ležící po téže její straně, což je způsobeno tím, že smysl otáčení roviny obsahující hyperbolu se mění, když kotálení přejde s jedné větve na druhou.*

Ve zvláštních případech mohla by se ovšem křivka vytvořená skládati z konečného počtu větví.



Obr. 2.



Obr. 3.

10. Lze snadno ještě zjistiti, že úhel obou asymptot téže větve křivky kotálením vytvořené je větší, než úhel asymptot kotálející se hyperboly. Neboť nahradíme-li křivku lomenou čarou $M_1M_2M_3 \dots$, nahradí se valcí se kužel jehlanem. Je-li $\alpha_1 + \alpha_2$ úhel dvou sousedních stran této lomené čáry (v. obr. 2.), je $\beta_1 + \beta_2$ úhel příslušných dvou sousedních stran lomené čáry, jež vznikne z první kotálením. Ježto však délka \overline{SO} je kolma k rovině první lomené čáry, je α_1 pravouhlý průmět úhlu β_1 , α_2 pravouhlý průmět úhlu β_2 a tedy $\alpha_1 + \alpha_2 < \beta_1 + \beta_2$, což znamená, že kotálením naším způsobem se úhly sousedních elementů — stručně řečeno — zvětšují, z čehož plyne — přejde-li lomená čára v křivku — že kotálením úhly tečen se zmenšují. Zmenší se tedy také úhel μ obou asymptot, jenž je seřven oběma souhlasnými směry těchto přímek; úhel ν k němu výplňkový, ježž je zvykem nazývati „úhlem asymptot“ v užším slova smyslu, se tedy zvětší (v. obr. 3.).

Obr. 4. naznačuje celkový průběh několika prvních větvi (čísllice vyznačují, jak jedna po druhé vzniká). Průběh geodetiky samy lze na základě toho snadno si představit; jen se nesmí zapomenouti, že vždy jedna polovina větve projekce vznikla promítnutím části geodetiky ležící nad rovinou rovníku, druhá polovina promítnutím části geodetiky ležící pod rovinou; neboť kdyby obě tyto části ležely na téže straně roviny rovníku, geodetika by se rovníku dotýkala, což je vyloučeno, ježto $c < a$ a c značí — v. odst. 1. — poloměr rovnoběžky, již se geodetika dotýká.

11. Sledujme, jak se mění projekce geodetiky, když c nabývá všech přípustných hodnot od 0 do $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. Pro $c = 0$ je $a'^2 = 0$; hyperbola přejde v dvojnásobnou přímku; její rovina má od roviny rovníku vzdálenost rovnou 0 (v. výraz (30), jenž pro $c = 0$ stane se rovným nule). Kotálení v tom případě přejde v pouhé přiložení přímky k rovině rovníku; tak vznikne v této rovině přímka jdoucí středem plochy. To pak je skutečně projekce geodetiky, totiž meridiánu hyperboloidu, jenž náleží mezi geodetiky.

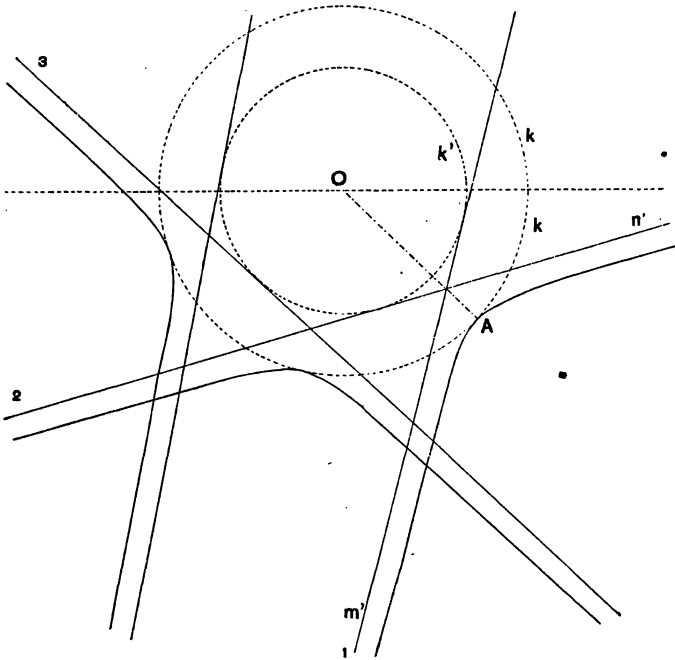
Pro
$$c = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

je sice $a'^2 \geq 0$, ale

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} + a^2 - \frac{a^4}{a^2 - b^2} = 0,$$

t. j. opět dvojnásobná přímka v rovině, jejíž vzdálenost od středu plochy je

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \sqrt{a^2 - b^2} = a.$$



Obr. 4.

Otočíme-li rovinu tak, aby tato přímka padla do roviny rovníku, splyne s jednou tečnou rovníkové kružnice. To pak skutečně je projekce geodetiky, totiž plošné přímky, neboť ta se promítá do tečné rovníkové kružnice.

Máme-li tedy na mysli jen geodetiky procházející týmž daným bodem rovníku, pak, když c se mění od 0 do $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$,

přechází projekce geodetiky z přímky jdoucí středem plochy zne-
náhla v přímku k ní kolmou. Avšak tím je geometricky charakteri-
sován ten druh geodetik na jednoplošném hyperboloidu, o který
tu běží: vedeme-li bodem, v němž jedna větev takové geodetiky
protíná rovník, obě plošné přímky a meridián, probíhá geodetika
v tom úseku plochy, přímkami vymezeném, v němž probíhá také
meridián. Stručně: jsou to geodetiky ležící mezi meri-
diánem a plošnou přímkou.

12. — II. $\varepsilon = \varepsilon_\beta$.

Pak dle vzorce (19) je

$$k\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma = 2\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta + l\varepsilon_\beta$$

a odtud $k(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) = \varepsilon_\beta(2\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\gamma) = \varepsilon_\beta(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)$

t. j. $k = \varepsilon_\beta$.

Dále dle vzorce (20) je

$$\Delta = -2\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha.$$

Rovnice (21) pro polární úhel hledané křivky nabude tvaru

$$d\vartheta = \frac{d\omega \sqrt{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}}{2(\omega - \varepsilon_\beta) \sqrt{\omega - \varepsilon_\gamma}}; \quad (32)$$

integrace této rovnice dává

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}} \int \frac{\sqrt{\omega - \varepsilon_\gamma} - \sqrt{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}}{\sqrt{\omega - \varepsilon_\gamma} + \sqrt{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}}.$$

Odtud

$$\frac{\sqrt{\omega - \varepsilon_\gamma} - \sqrt{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}}{\sqrt{\omega - \varepsilon_\gamma} + \sqrt{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}} = e^{2(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}}$$

a dále

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\omega - \varepsilon_\gamma}}{-\sqrt{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}} &= \frac{e^{2(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}} + 1}{e^{2(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}} - 1} = \\ &= \frac{e^{(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}} + e^{-(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}}}{e^{(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}} - e^{-(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}}}. \end{aligned}$$

Avšak čtverec zlomku $\frac{e^m + e^{-m}}{e^m - e^{-m}}$ lze psátí

$$\frac{(e^m - e^{-m})^2 + 4}{(e^m - e^{-m})^2} = 1 + \frac{4}{(e^m - e^{-m})^2}.$$

Užijme toho na předchozí rovnici; umocníme-li obě strany, obdržíme

$$\frac{\omega - \varepsilon_\beta}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma} = 1 + \frac{4}{\left[e^{(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}} - e^{-(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}} \right]^2}.$$

Převědeme 1 na levou stranu a odmocníme:

$$\sqrt{\frac{\omega - \varepsilon_\beta}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}} = \frac{2}{e^{(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}} - e^{-(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}}}.$$

Avšak dle vzorce (14) je v našem případě

$$r^2 = \frac{a^2 \tau^2}{b^2} (\omega - \varepsilon_\beta); \quad (33)$$

dosadíme-li odtud za $\omega - \varepsilon_\beta$ a upravíme, obdržíme rovnici kotálející se křivky v souřadnicích polárních:

$$\begin{aligned} r \left[e^{(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}} - e^{-(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha}} \right] &= \\ &= 2\tau \sqrt{\frac{a^2}{b^2} (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Dosadíme sem ještě dle vzorců (9); tím se rovnice upraví na tvar

$$\begin{aligned} r \left[e^{(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{a^2(c^2 - a^2)}{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2}} - e^{-(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{a^2(c^2 - a^2)}{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2}} \right] &= \\ &= 2\sqrt{a^2 - c^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Uřídíme veličinu D dle vzorce (15); obdržíme

$$D = -\varepsilon_\beta \frac{a^2 \tau^2}{b^2} - \frac{2a^4 + c^2(a^2 + b^2)}{3a^2};$$

dosadíme-li sem za ε_β dle (11), obdržíme po krátké úpravě

$$r^2 - \varrho_1^2 = -a^2. \quad (36)$$

13. Diskuse, již připneme k rovnici (35), přiblíží nyní hlavně k hodnotě čísla c^2 u srovnání s a^2 .

A) $a^2 > c^2$. Ježto $c^2 > 0$, je také $a^2 > 0$. Pravá strana rovnice (35) je reálná; má-li křivka býti reálná, musí také levá strana býti reálná, což vyžaduje — jak lze snadno uvážití — reálnost mocnitelů. I musí tedy

$$\frac{a^2(c^2 - a^2)}{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2} > 0.$$

Avšak $a^2 > 0$, $c^2 - a^2 < 0$, tedy

$$b^2c^2 + a^2(a^2 - c^2) < 0. \quad (37)$$

Ježto pak $a^2(a^2 - c^2) > 0$, musí $b^2 < 0$. Je to tedy případ jednoplochého hyperboloidu, avšak nikoliv případ těch geodetik, o nichž bylo jednáno v odst. 8b), nýbrž běží nyní o jiný druh geodetik, neboť číslo c vyhovuje nerovnostem

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} < c < a. \quad (38)$$

Řadí se tedy tento druh geodetik bezprostředně ke druhu právě zmíněnému, pro který platí nerovnosti (31).

B) $a^2 < c^2$. Ježto pravá strana rovnice (35) je imaginární, musí býti i levá strana imaginární, aby křivka byla reálná; toho se dosáhne — jak lze opět snadno zjistiti — když exponenty budou imaginární, t. j. když bude

$$\frac{a^2(c^2 - a^2)}{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2} < 0.$$

Ježto $c^2 - a^2 > 0$, je tedy

$$a^2(b^2c^2 + a^4 - a^2c^2) < 0.$$

I nutno rozeznávati dva případy:

a) $a^2 > 0$. Pak musí $b^2c^2 + a^4 - a^2c^2 < 0$. Při tom nemůže $b^2 > 0$, neboť to by byl případ ellipsoidů, při nichž je vždy $c^2 < a^2$. I musí $b^2 < 0$; lze pak snadno zjistiti, že napsané nerovnosti, jež je totožna s nerovností (37), vyhovuje $c^2 > a^2$. Běží nyní opět o hyperboloid jednoplochý, ale o druh geodetik, odlišný od obou předchozích, totiž o ten druh, jenž obsahuje geodetiky, jež se dotýkají rovnoběžky, jež pro $c > a$ ovšem reálně existuje.

b) $a^2 < 0$. Pak musí $b^2c^2 + a^4 - a^2c^2 > 0$ čili

$$b^2c^2 + a^2(a^2 - c^2) > 0.$$

Ježto nyní $a^2(a^2 - c^2) > 0$, je této nerovnosti jistě vyhověno pro $b^2 > 0$. Ježto pak c může nabýti všech možných hodnot, máme tu případ všech geodetik na dvojploché hyperboloidu.

Nežli přistoupím k podrobné geometrické diskusi nalezeného výsledku, odbudu hned případ další.

14. — III. $\varepsilon = \varepsilon_\gamma$.

Dle vzorce (19) je pak

$$\begin{aligned} k\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma &= 2\varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma + k\varepsilon_\gamma, \\ k(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma) &= \varepsilon_\gamma(2\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) = \varepsilon_\gamma(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma) \end{aligned}$$

a odtud $k = \varepsilon_\gamma$.

Rovnice (21) nabude nyní tvaru

$$d\vartheta = \frac{d\omega \sqrt{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}}{2(\omega - \varepsilon_\gamma) \sqrt{\omega - \varepsilon_\beta}}, \quad (39)$$

jenž vznikne z rovnice (32) případu II. výměnou ε_β a ε_γ . I obdržíme v tomto případě řešení

$$\begin{aligned} r \left[e^{(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\beta}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}} - e^{-(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\beta}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}} \right] &= \\ &= 2\tau \sqrt{\frac{a^2}{b^2} (\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\beta)}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li sem opět ze vzorců (9), obdržíme

$$\begin{aligned} r \left[e^{(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{a^2(a^2 - c^2)}{b^2c^2}} - e^{-(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{a^2(a^2 - c^2)}{b^2c^2}} \right] &= \\ &= 2\sqrt{c^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

15. Diskuse je obdobná případu II.

A) $a^2 > c^2$. Ježto $c^2 > 0$, je tedy také $a^2 > 0$. Pravá strana rovnice (40) je imaginární, musí tedy býti i levá, t. j. musí

$$\frac{a^2(a^2 - c^2)}{b^2c^2} < 0.$$

Ježto $a^2(a^2 - c^2) > 0$, je $b^2 < 0$, tedy případ hyperboloidu jednoplochého; a ježto c je omezeno na interval od 0 do

α , běží tu o ty dva druhy geodetik, jež byly uvedeny v odst. 8. b) a 13. A).

B) $a^2 < c^2$. I musí nyní

$$\frac{a^2(a^2 - c^2)}{b^2c^2} > 0.$$

Ježto pak $a^2 - c^2 < 0$, je $a^2b^2 < 0$. I nutno zase rozeznávati:

a) $a^2 > 0$; pak $b^2 < 0$; máme tedy případ hyperboloidu jednoplochého a sice ten druh geodetik, jež se dotýkají rovnoběžky, ježto $c > a$.

b) $a^2 < 0$; pak $b^2 > 0$; to je případ hyperboloidu dvojplochého. Pro číslo D obdržíme dle (15) výraz

$$- \varepsilon_\gamma \frac{a^2 r^2}{b^2} - \frac{2a^4 + c^2(a^2 + b^2)}{3a^2}$$

a dosadíme-li za ε_γ , vyjde

$$r^2 - \varrho_1^2 = -c^2, \quad (41)$$

což je číslo vždy záporné.

16. Přistoupím k podrobné geometrické interpretaci dosavadních výsledků. Rovnice (35) a (40) jsou ovšem téhož tvaru; každá z nich pak podává — vzhledem k různosti případů A), B) — dvě podstatně různé křivky, dle toho, je-li exponent reálný nebo ryze imaginární.

a) V prvném případě mají obě rovnice tvar

$$r[e^{A(\vartheta - \vartheta_0)} - e^{-A(\vartheta - \vartheta_0)}] = 2B, \quad (42)$$

kde A , B jsou čísla reálná. Je zřejmo, že r konverguje k 0, když ϑ roste do nekonečna — ať hodnotami kladnými nebo zápornými —; křivka má v počátku asymptotický bod, jako hyperbolická spirála, které se velmi podobá. K této křivce jsme dospěli v případě II. A) a v případě III. B) a) i b). V případě II. A) běží o geodetiky na hyperboloidu jednoplochého, jež protínají rovník, ježto je $c < a$ (ostatně v. o tom podrobně odst. 18.). Jejich projekce se tedy dotýká rovníku, majíc minimální průvodič a ; dosadíme-li tuto hodnotu za ϱ_1 do vzorce (36), obdržíme $r = 0$ jakožto hodnotu příslušného průvodiče křivky se

kotálejší. Ale rovina křivky dané rovnicí (42) musila by se otočiti nekonečněkrát, aby se dosáhlo tohoto průvodiče, a tato křivka kotálením blíží se rovníku jen asymptoticky, aniž ho kdy dosáhne. V případě III. B) a) běží o geodetiky na hyperboloidu jednoplochém, jež neprotínají rovníku dotýkajíce se rovnoběžky o poloměru c ; minimální průvodič projekce geodetiky je tedy c . V případě III. B) b) jsou kotálením vytvořeny projekce geodetik na hyperboloidu dvojplochém; i pro ty je minimální průvodič c . Dosadíme-li v obou těchto případech c za ϱ_1 do rovnice (41), obdržíme $r = 0$ jakožto hodnotu příslušného průvodiče kotálejší se křivky — tedy též výsledek jako nahoře. Z této úvahy je tedy patrné, že užitím křivky (42) nelze sledovati vznik projekce geodetiky kotálením, ježto některým bodům této křivky bychom se blížili jen asymptoticky — i vyloučíme tuto křivku z dalších geometrických úvah.

b) V druhém případě mají obě rovnice tvar

$$r[e^{Ai(\vartheta - \vartheta_0)} - e^{-iA(\vartheta - \vartheta_0)}] = 2iB,$$

kde A a B jsou čísla reálná; jinak psáno:

$$r \sin A(\vartheta - \vartheta_0) = B. \quad (43)$$

Tato křivka nemá asymptotického bodu, tedy závada, již jsme našli v případě a), zde nenastává. Přehlédneme-li pak znovu diskusi provedenou pro případ II. a III., shledáváme, že křivka tohoto druhého druhu se vyskytne: u těch geodetik na jednoplochém hyperboloidu, jež se dotýkají reálné rovnoběžky (případ II. B) a)); u všech geodetik na hyperboloidu dvojplochém (případ II. B) b)); u všech geodetik jednoplochého hyperboloidu, jež se nedotýkají reálné rovnoběžky (případ III. A)).

Můžeme tedy prozatím shrnouti výsledek úvah odst. 12. až 15. ve větu:

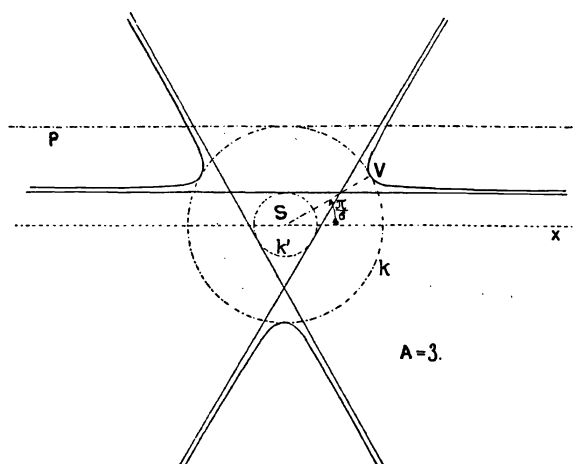
Projekce všech geodetik rotačních hyperboloidů na rovinu rovníku lze vytvořiti kotálením křivky o rovnici (43), při němž rozdíl čtverců průvodiče křivky se kotálejší a průvodiče křivky vytvořené je stálý.

17. Geometrické studium křivky (43) je jednoduché. Ježto změna arbitrární konstanty ϑ_0 znamená jen pootočení celé křivky,

stačí uvažovati jen případ $\vartheta_0 = 0$, t. j. křivku o rovnici

$$r \sin A\vartheta = B. \quad (44)$$

Průvodič stává se nekonečný pro $\vartheta = 0, \frac{\pi}{A}, \frac{2\pi}{A}, \dots$; stává se minimálním, totiž roven B , pro $\vartheta = \frac{\pi}{2A}, \frac{3\pi}{2A}, \frac{5\pi}{2A}, \dots$. Když ϑ se mění od 0 do $\frac{\pi}{A}$, proběhne bod souměrnou větev sahající



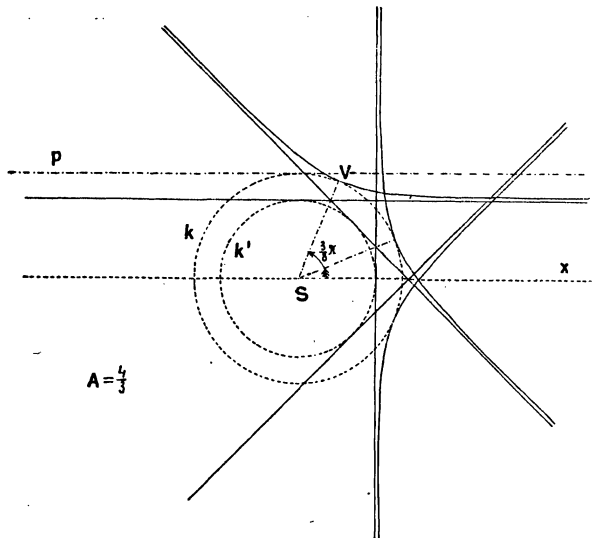
Obr. 5 a).

do nekonečna, jež se dotýká kružnice o poloměru B ; když ϑ roste dále od $\frac{\pi}{A}$ do $\frac{2\pi}{A}$, změní r znaménko a bod proběhne větev s předchozí shodnou, položenou ve vedlejším úseku roviny, avšak opačně orientovanou. Každá větev má dvě asymptoty. Neboť polární subtangenta křivky je

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dr} = - \frac{B}{A \cos A\vartheta}$$

což pro $r = \infty$, t. j. $\sin A\vartheta = 0$ nabývá — až na znaménko — hodnoty $\frac{B}{A}$. Má tedy větev dvě asymptoty vzdálené od počátku

o délku $\frac{B}{A}$ a svírající spolu úhel $\frac{\pi}{A}$. Dvě po sobě jdoucí větve mají vždy jednu asymptotu společnou a leží ovšem po téže její straně. Co do tvaru nutno rozéznávat — nehledě k případu $A = 1$, kdy křivka přechází v přímku — dva případy:

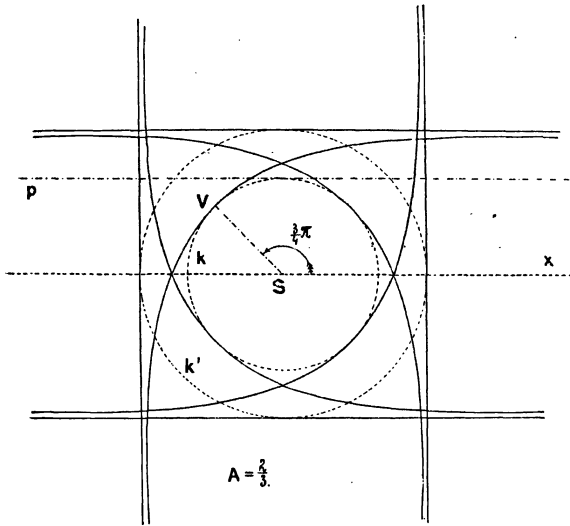


Obr. 5 b).

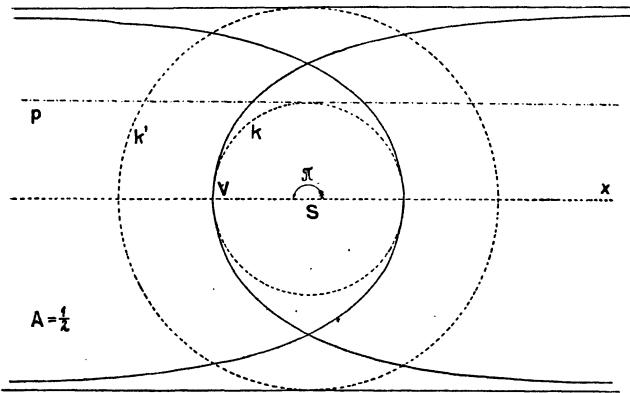
a) $A > 1$. Úhel asymptot je menší nežli π ; kružnice o poloměru B dotýká se větví vně. Obr. 5 a) b) ukazují průběh několika větví této křivky pro $A = 3, \frac{4}{3}$; je z nich patrné, jak s klesajícím A křivka se blíží přímce p .

b) $A < 1$. Úhel asymptot je větší nežli π ; kružnice o poloměru B dotýká se větví vnitř. V. obr. 6 a), b), kde $A = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$.

Když A klesne pod $\frac{1}{2}$, větev sama sebe přetne; pro $A = \frac{1}{3}$ oběhne větev jednou kolem kružnice; když A ještě klesá, zvyšuje se počet těchto oběhů (v obr. 6 c); $A = \frac{1}{4}$).



Obr. 6 a).



Obr. 6 b).

Je ovšem zřejmé, že počet větví je konečný, je-li A číslo racionální, jinak nekonečný.

Konstrukce děje se pohodlně užitím okolnosti, že křivka (44) přejde transformací $A\vartheta = \vartheta'$ v přímku

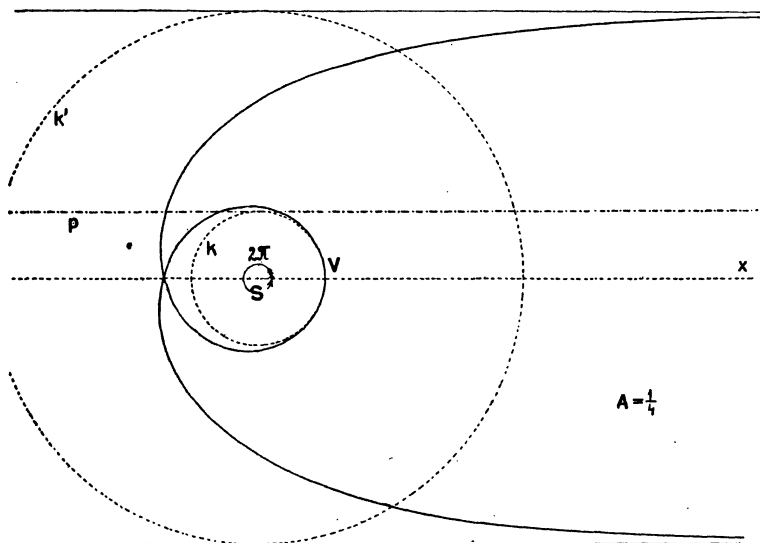
$$r \sin \vartheta' = B.$$

18. Probereme nyní jednotlivé případy shrnuté v závěrečné větě odst. 16. Na hyperboloidu jednoplochem rozeznávejme tři druhy geodetik, k nimž jsme v dřívějších výkladech již došli:

a) Geodetiky, pro něž

$$0 < c < \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Jejich projekce může být vytvořena kotálením hyperboly, jak bylo obšírně vyloženo v odst. 9.; mimo to jsme se s tímto



Obr. 6 c).

případem setkali v případě III. A). Rovnice (40) nabude zde — ježto $c < a$ — tvaru

$$r \sin \sqrt{\frac{a^2(c^2 - a^2)}{b^2c^2}} (\vartheta - \vartheta_0) = \sqrt{a^2 - c^2}. \quad (45)$$

Při tom je $\frac{a^2(c^2 - a^2)}{b^2c^2} > 1$, neboť násobíme-li obě strany této nerovnosti b^2c^2 , obdržíme — pamatujíc, že $b^2 < 0$ —

$$a^2(c^2 - a^2) < b^2c^2$$

a odtud

$$c^2 < \frac{a^4}{a^2 - b^2},$$

což souhlasí s hořejší nerovností. Kotálející křivka má tedy tvar typu vyznačeného v obr. 5.

Projekce tohoto druhu geodetik vytvoří se tedy valením přímého kužele o výšce rovné c — v. rovnici (41) — jehož základnou je křivka tvaru právě vyznačeného a vrchol tkví ve středu plochy.

Průběh kotálení této křivky je pro jednotlivou větev právě takový, jako při valení hyperboly, jež jsme podrobně sledovali v odst. 9.; avšak při přechodu od větve k větvi sousední je tu ten rozdíl, že smysl otáčení roviny se nemění, ježto dvě větve o společné asymptotě leží vždy na téže straně této asymptoty; proto také střed otáčeující se roviny zůstává stále na téže straně rovníku. Mimo to tento střed nikdy se v této rovině neoctne, ježto asymptota valící se křivky jím neprochází. Snadno se opět potvrdí, že vzdálenost asymptot křivky kotálením vytvořené od středu plochy je $\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ (v. odstavec 9.)

Průběh projekce geodetiky je nám znám již z obr. 4.

Oba krajní případy, jež tento druh geodetik poskytuje, obdržíme zde snadno. Pro $c = 0$ je dle (9) $\varepsilon_\beta = \varepsilon_\alpha$ a rovnice (39) nabude tvaru $d\vartheta = 0$, z něhož plyne $\vartheta = \vartheta_0$, t. j. přímka středem. To odpovídá meridiánu jako geodetice. Pro

$$c = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{ je } \frac{a^2(c^2 - a^2)}{b^2 c^2} = 1, \quad a^2 - c^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2};$$

rovnice (45) přejde ve tvar

$$r \sin(\vartheta - \vartheta_0) = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}}, \quad (46)$$

což je rovnice přímky, jež vhodně přiložena na rovinu rovníku dává projekci plošné přímky. (Srv. odst. 11.)

b) Geodetiky, pro něž

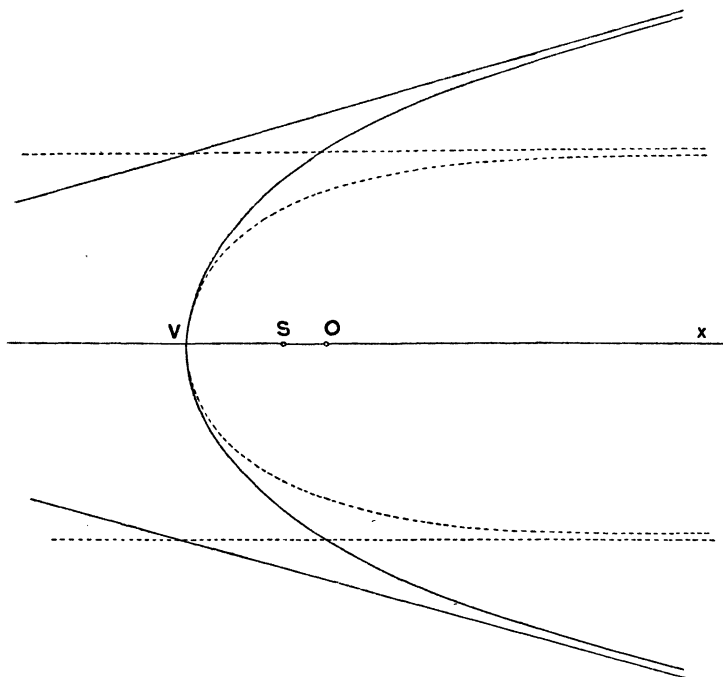
$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} < c < a,$$

což byl rovněž případ III. A). Kotálející se křivka, ležící v ro-

vině mající od středu plochy vzdálenost c , je opět dána rovnicí (45), avšak nyní

$$\frac{a^2(c^2 - a^2)}{b^2c^2} < 1.$$

Běží tu tedy o kotálení téhož způsobu, jako v případě předchozím, avšak kotálejší se křivka má tvar naznačený na



Obr. 7.

obr. 6. Průběh kotálení pak je zcela takový, jako v případě předchozím, ježto i u této křivky dvě sousední větve leží po téže straně společné asymptoty. Rozdíl je jen v tom, že střed otáčející se roviny je vždy po téže straně rovníku, jako kotálejší se větev, čímž kotálení se stává názornější. Křivka kotálením vzniklá má též tvar jako křivka se kotálejší, ovšem je úhel asymptot opět větší. (Obr. 7. ukazuje křivku vzniklou kotálením křivky naznačené v obr. 6b). Rozdíl obou druhů geo-

detik jeví se zcela názorně, ježto projekce prvního druhu dotýká se rovník vně, projekce tohoto druhého druhu pak uvnitř; geodetika prvního druhu probíhá tedy na hyperboloidu tak, že její zakřivení směřuje — celkem — od středu, kdežto geodetika druhého druhu je zakřivena směrem ke středu plochy. Je zvláště zajímavé sledovati, jak se tato geodetika mění, když c rostouc blíží se a . Při vzrůstajícím c výraz $\frac{a^2(c^2 - a^2)}{b^2c^2}$ stále klesá; to znamená — v. odst. 17. b) — že křivka, jejímž kotálením vznikne projekce geodetiky, obíhá střed v počtu závitů stále větším; totéž tedy platí pro projekci samu. Geodetika nabývá tedy tvaru šroubovitého, probíhající hyperboloid v závitěch, jichž s rostoucím c stále přibývá; při tom každá větev ovšem rovník protíná, probíhající po obou jeho stranách tímž způsobem. Čím více je závitů, tím více se hromadí v blízkosti rovníku.

Jeden krajní případ tohoto druhu obdrží se pro $c = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, což dá ovšem rovnici přímky (46).

Druhý krajní případ je $c = a$. Tato podmínka dává — vzhledem k rovnicím (9) — výsledek $\varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$. Rovnice (39) přejde tím ve tvar

$$d\vartheta = \frac{d\omega \sqrt{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}}{2\sqrt{(\omega - \varepsilon_\beta)^3}}$$

a odtud

$$\vartheta - \vartheta_0 = - \frac{\sqrt{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}}{\sqrt{\omega - \varepsilon_\beta}};$$

avšak dle rovnice (33) je

$$\sqrt{\omega - \varepsilon_\beta} = \frac{br}{a\tau};$$

dosadíme-li mimo to za $\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha$ dle rovnic (9), obdržíme

$$r(\vartheta - \vartheta_0) = -\sqrt{-b^2}.$$

To je rovnice hyperbolické spirály, mající počátek za bod asymptotický; jejím kotálením vznikne v rovině rovníku křivka spirálovitá, jež se blíží asymptoticky rovníku. Příslušná geodetika tedy obepíná hyperboloid v nekonečně mnoha závitěch, jež se asymptoticky blíží rovníku.

Lze tedy tento druhý druh geodetik charakterisovati stručně: geodetiky ležící mezi plošnou přímkou a rovníkem.

c) Geodetiky, pro něž $c > a$. S těmi jsme se setkali v případě II. B) a). Rovnice (35) nabude tvaru

$$r \sin \sqrt{\frac{a^2 (a^2 - c^2)}{b^2 c^2 + a^4 - a^2 c^2}} (\vartheta - \vartheta_0) = \sqrt{c^2 - a^2}. \quad (47)$$

Avšak

$$\frac{a^2 (a^2 - c^2)}{b^2 c^2 + a^4 - a^2 c^2} = \frac{a^2 (c^2 - a^2)}{a^2 (c^2 - a^2) - b^2 c^2} < 1,$$

neboť $-b^2 c^2 > 0$. Vzniknou tedy projekce tohoto druhu geodetik kotálením křivky typu, vyznačeného v obr. 6. Tvar geodetik je celkem takový, jako v případě b), jen ovšem geodetika dotknuvši se rovnoběžky vrací se do nekonečna zpět; větev skládá se ze dvou souměrných částí. Kdežto tedy u dosavadních druhů geodetik polovina projekce vznikla promítnutím geodetiky s jedné, druhá polovina promítnutím geodetiky s druhé části hyperboloidu, u tohoto druhu celá geodetika leží po jedné straně rovníku a jejím promítnutím obdržíme křivku výše zmíněnou v celém průběhu. Vzdálenost kotálející se roviny od středu plochy je nyní — v. (36) — a . Vzdálenost asymptot kotálející se křivky od jejího středu je — dle odst. 17. — $\frac{B}{A}$ t. j. v našem případě

$$\sqrt{c^2 - a^2} \cdot \sqrt{\frac{b^2 c^2 + a^4 - a^2 c^2}{a^2 (a^2 - c^2)}} = \sqrt{c^2 - a^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2}}.$$

Když se asymptota octne v rovině rovníku, má tedy od středu plochy vzdálenost, jejíž čtverec je

$$c^2 - a^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 = \frac{c^2}{a^2} (a^2 - b^2),$$

t. j. nalézáme opět týž výraz, jako v odst. 9.

Krajní případ u tohoto druhu vznikne jen pro $c = a$, což je případ výše již projednaný.

19. Obrátme se k hyperboloidu dvojplochému, o němž jednal případ II. B) b). Rovnice kotálející se křivky je nyní

opět (47); při tom

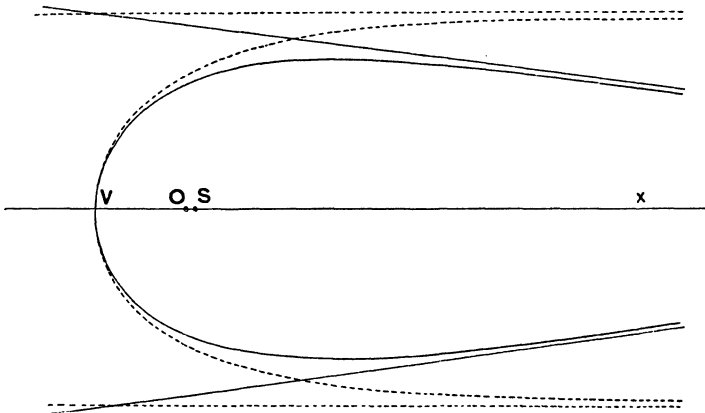
$$\frac{a^2 (a^2 - c^2)}{b^2 c^2 + a^4 - a^2 c^2} = \frac{1}{1 - \frac{b^2 c^2}{a^2 (c^2 - a^2)}} < 1,$$

neboť zlomek ve jmenovateli se vyskytující je záporný. Ježto nyní $-a^2 > 0$, je — v. (36) — výraz $r^2 - \varrho_1^2 > 0$. Z toho všeho plyne:

Projekci každé geodetiky na hyperboloidu dvojplochém lze vytvořiti kotálením křivky

$$r \sin A\vartheta = B \quad (A < 1)$$

po rovině rovníku a to takovým, při němž střed kotálející se křivky je pevný v kolmé vzdálenosti od středu plochy rovné vedlejší poloose hyperboloidu.



Obr. 8.

Tvar těchto projekcí bude tedy celkem takový, jako tvar kotálející se křivky (v. obr. 6.); avšak úhel asymptot se tentokráte zmenší, jak lze snadno uvážit. (V. křivku na obr. 8., jež vznikla kotálením křivky naznačené na obr. 6b.) Asymptoty

dotýkají se kružnice o poloměru $c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$.

Krajní případ nastane pro $c = 0$; pak je rovnice kotálející se čáry

$$r \sin (\vartheta - \vartheta_0) = \sqrt{-a^2}$$

t. j. přímka mající od pevného středu vzdálenost rovnou vedlejší poloose. Jestliže tedy pohyblivou rovinu postavíme kolmo k rovině rovníku, padne tato přímka právě do této roviny a vytvoří tak projekci geodetiky, totiž meridiánu, jenž náleží mezi geodetiky.

Tvar geodetiky lze si snadno představit; čím je větší poloměr rovnoběžky, jíž se geodetika dotýká, tím více závitů křivka tvoří.

20. Shledali jsme tedy celkem, že volíme-li k ve vzorci (18) tak, aby elliptické funkce intervenující při řešení obecné úlohy v odst. 3. vyslovené degenerovaly, obdržíme partikulární a poměrně jednoduché řešení této úlohy *pro všechny druhy geodetik na rotačních plochách centrálních druhého stupně*; i je tímto řešením dosaženo té názornosti, kterou jsme si vytkli v úvodě jako cíl.

Budiž jen upozorněno na to: když jsme si zjednali názor o tvaru projekcí geodetik, mohli bychom nazpět si zjednatí snadno alespoň přibližnou představu o tvaru obecných křivek daných rovnicemi (26), (27).

IV.

21. Ve svém článku výše zmíněném jsem ukázal, že nejen projekce geodetik rotačních ellipsoidů, ale i tyto geodetiky samy mohou býti vytvořeny kotálením vhodně volených ellips — tentokráte ovšem po ploše samotné — při kterémžto kotálení rozdíl čtverců průvodiče geodetiky a průvodiče kotálející se křivky je stálý. Tato možnost pak vyplývala z okolnosti, že element oblouku a průvodič geodetiky je vyjádřen ve tvaru naprosto témže jako element oblouku a průvodiče její projekce. Ale tato okolnost zůstává v platnosti pro každou plochu rotační druhého stupně, jak přesvědčí srovnání vzorců (3), (7) se vzorci (8), (12). Vzhledem k výsledku kapitoly III. lze tedy míti za jisté, že *také na ostatních plochách lze vytvořiti geodetiky přímo kotálením — udaného způsobu — vhodně volených křivek po ploše*. K nalezení příslušných křivek se nyní obrátíme.

22. Ježto úloha nyní zní právě tak, jako úl. odst. 3., jen s tím rozdílem, že běží o geodetiku, tedy o vzorce (3), (7), je zřejmo, že hledané křivky vyhovují rovnicím

$$\left. \begin{aligned} ds &= -\tau \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} (pu - e_\alpha) du \\ r^2 &= \tau^2 \frac{a^2 - b^2}{b^2} (pu - k) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

což jsou formálně tytéž rovnice, jako rovnice (13), (14). Aniž se podrobně zabýváme obecným řešením, přistupme hned k speciálním případům, jež jsou zde téhož způsobu, jakó v kap. III.

23. — I. $k = -2e_\alpha$.

Týmž postupem jako v odst. 7. obdržíme jako řešení kužlosečku

$$(e_\alpha - e_\gamma) x^2 + (e_\alpha - e_\beta) y^2 = \tau^2 \frac{a^2 - b^2}{b^2} (e_\alpha - e_\beta) (e_\alpha - e_\gamma),$$

což pišme

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

kde

$$a'^2 = \tau^2 \frac{a^2 - b^2}{b^2} (e_\alpha - e_\beta),$$

$$b'^2 = \tau^2 \frac{a^2 - b^2}{b^2} (e_\alpha - e_\gamma).$$

Dosadíme sem ze vzorců (4) a obdržíme

$$a'^2 = b^2, \quad b'^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 - c^2. \quad (49)$$

Pro rozdíl čtverců průvodičů obdržíme

$$r^2 - \varrho^2 = 2e_\alpha \tau^2 \frac{a^2 - b^2}{b^2} - \frac{1}{3a^2} (2a^4 + 2a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^2 c^2);$$

dosadíme-li sem za e_α dle (6), zjednoduší se tento výraz po krátké úpravě na tvar

$$r^2 - \varrho^2 = \frac{c^2}{a^2} (b^2 - a^2). \quad (50)$$

Diskuse:

a) Pro $a^2 > 0$, $b^2 > 0$, t. j. případ ellipsoidů, je $a'^2 > 0$ a také $b'^2 > 0$, neboť $a^2 - c^2 > 0$. Obdržíme tedy ellipsy, jichž

kotálením po elipsech se na nich přímo vytvoří geodetické čáry. Je pak pro elipsoid sploštělý výraz (50) záporný, pro elipsoid protáhlý kladný.

Věty z toho plynoucí jsem vyslovil ve svém článku výše zmíněném.

Všimněme si blíže výsledku pro elipsoid sploštělý. Příslušná věta zní:

Přímý kužel eliptický, jehož výška je $\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ a jehož vrchol tkví ve středu plochy, kotálí se svou základnou, jejíž poloosy jsou dány vzorci (49), po elipsoidu a vytvoří tak na něm geodetickou čáru.

Kotálejší se elipsa má a' za vedlejší, b' za hlavní poloosu, neboť z nerovnosti

$$\frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 - c^2 > b^2$$

plyne $(a^2 - c^2)(a^2 - b^2) > 0$,

což je nerovnost správná, ježto $a^2 > b^2$, $a^2 > c^2$. Poloměr křivosti v hlavním vrcholu je — dle známého vzorce —

$$R_0 = \frac{a'^2}{b'} = \frac{b^2}{\sqrt{\frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 - c^2}} = \frac{ab^2}{\sqrt{b^2 c^2 + a^4 - a^2 c^2}}.$$

V libovolném bodu M rovníku elipsoidu je jeden hlavní poloměr křivosti poloměr rovníku a , druhý hlavní poloměr je poloměr křivosti meridiánu, totiž $\frac{b^2}{a}$.

Dosadíme-li do rovnice (50) a za ϱ , obdržíme

$$r^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 - c^2,$$

t. j. čtverec hlavní poloosy. Z toho plyne, že při kotálení padne na bod M , pro který je $\varrho = a$, hlavní vrchol kotálejší se elipsy. Položme tedy elipsu tak, aby její hlavní vrchol byl v bodě M . Ať je při tom elipsa v jakékoliv poloze, vždy

se v bodě M ellipsoidu dotýká. Neboť je-li O střed ellipsoidu, S střed ellipsy, je ihned zřejmo, že vedlejší osa ellipsy je kolma ke spojnici \overline{OM} . Ježto totiž \overline{OS} , známá konstantní vzdálenost středu ellipsy od středu plochy, je kolma k rovině ellipsy, tedy i k vedlejší ose, a tato je kolma k hlavní ose \overline{MS} , je vedlejší osa kolma k rovině OSM a tedy také k přímce OM v této rovině ležící. Ale tečná ellipsy v hlavním vrcholu je rovnoběžna s vedlejší osou a tedy stojí v bodě M kolmo na \overline{OM} , tedy je to také tečna ellipsoidu, čímž je hořejší tvrzení dokázáno. Normální řez ellipsoidu touto tečnou určený měžž poloměr křivosti R ; pak rovina ellipsy určuje na ellipsoidu řez, jehož poloměr křivosti dle věty Meusnierovy rovná se R násobenému cosinem úhlu, jež svírá rovina ellipsy s rovinou hlavního řezu; to je zřejmé úhel při vrcholu M v trojúhelníku OSM ; jeho cosinus je roven

$$\frac{b'}{a} = \frac{\sqrt{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2}}{a^2}$$

a poloměr křivosti zmíněného řezu

$$R \cdot \frac{\sqrt{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2}}{a^2}.$$

Uvedme ellipsu do takové polohy, aby řez její rovinou na ellipsoidu způsobený měl s ní v bodě M touž křivost; i musí

$$R \cdot \frac{\sqrt{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2}}{a^2} = R_0,$$

t. j.
$$R = \frac{a^3b^2}{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2},$$

čímž je dán poloměr křivosti normálního řezu o téže tečné. Je-li β vedlejší poloosa tohoto — elliptického — řezu, platí ovšem

$$R = \frac{\beta^2}{a} \text{ a tedy}$$

$$\frac{\beta^2}{a} = \frac{a^3b^2}{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2},$$

čili
$$\beta = \frac{a^2b}{\sqrt{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2}}.$$

Snadno se zjistí, že úhel α , který svírá tento řez s meridianem, je takový, že

$$\cos \alpha = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - c^2} < 1,$$

tedy úhel reálný. I nabyli jsme výsledku:

V bodě na rovníku ellipsoidu existují dvě tečné — souměrné dle rovníku — mající tuto vlastnost: umístíme-li kotálejší se ellipsu hlavním vrcholem do tohoto bodu tak, aby se některé z obou přímek dotýkala, má řez, způsobený na ellipsoidu rovinou ellipsy, tutéž křivost jako ellipsa sama.

Obě tečné svírají s osou rotační úhel, jehož cosinus je $\frac{1}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$. Dělí pak tečnou rovinu na dvě výseče: v jedné z nich ellipsa dotýká se plochy vně, ve druhé uvnitř; v obou tečných pak ji proniká majíc s ní styk druhého řádu. Když tedy ellipsa se udaným způsobem otáčí kol bodu M , v němž se ellipsoidu dotýká, blíží se jeden z dalších dvou průsečíků ellipsy s plochou bodu M ; octne se v tomto bodu pro směr tečné na př. t_1 ; při dalším otáčení pak postupuje tento průsečík po ellipse v témže směru dále. Vzhledem k tomu je jisto, že bod M , ležící na ellipse dosti blízko u bodu M octne se v některé poloze ellipsy na ellipsoidu. Tento bod ellipsoidu označme M'_1 . Je pak zřejmo jednak, že když M_1 se blíží neomezeně bodu M , spojnice $\overline{MM'_1}$ se blíží jedné z tečen t_1, t_2 ; jednak bod M'_1 v limitě náleží ke křivce vytvořené kotálením ellipsy od bodu M , ježto vzdálenosti $\overline{OM_1}$ a $\overline{OM'_1}$ jsou stejné.

Ale z toho plyne: *z bodu na rovníku, ač v něm ellipsa se plochy dotýká v každé své přípustné poloze, je kotálení možné jen ve dvou směrech, k rovníku souměrných. Kdybychom tedy položili ellipsu do bodu M jinak, než do udaného směru, bylo by kotálení nejprve pouhou rotací kol bodu M ; teprve až by se ellipsa otočila do směru t_1 nebo t_2 , nastal by postup po ploše.*

Tím je charakterisován počátek kotálení na rovníku; zároveň je dokázáno, že tečna geodetiky v bodě, kde protíná rov-

ník, svírá s osou rotace úhel, jehož cosinus je $\frac{1}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$ a tedy sinus $\frac{c}{a}$. Z toho je patrné, jak se tento úhel mění, když se mění c , t. j. poloměr rovnoběžky, které se geodetika dotýká.

24. b) Pro $a^2 > 0$, $b^2 < 0$, t. j. pro hyperboloid jednodušší, je $a'^2 < 0$; i musí $b'^2 > 0$, t. j. $\frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 - c^2 > 0$, což znamená geodetiky ležící mezi meridiánem a plošnou přímkou (v. odst. 11.). Výraz (50) je při tom záporný. *Vzniknou tedy tyto geodetiky kotálením přímého kužele o výšce $\frac{c}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$, jehož vrchol tkví ve středu plochy a jehož základnou je hyperbola o poloosách výše udaných, po hyperboloidu.*

Průběh kotálení je z části obdobný kotálení v případě ellipsoidu sploštělého. V každém bodu rovníku existují jen dva směry, podél nichž postupuje kotálení; geodetika protíná rovník opět pod úhlem, jehož cosinus je $\frac{c}{a}$. Kotálejší se hyperbolu nutno umístiti tak, aby jeden vrchol její byl na rovníku a aby se tam dotýkala jednoho z udaných dvou směrů. Část geodetiky ležící nad rovníkem je vytvořena kotálením jedné poloviny větve hyperboly. Příslušná asymptota při kotálení protíná hyperboloid a v limitě blíží se ovšem asymptotě geodetiky. Ježto asymptota geodetiky je zároveň asymptotou hyperboloidu, má asymptota geodetiky směr jedné povrchové přímky asymptotického kužele a svírá tedy s osou rotační úhel, jehož cosinus je $\sqrt{\frac{-b^2}{a^2 - b^2}}$. Avšak projekce asymptoty dotýká se — v. odst. 9. — kružnice se středem ve středu plochy a o poloměru $\frac{c}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$. Z toho plyne, že *asymptoty všech geodetik tohoto druhu příslušných téže konstantě c vyplňují rotační hyperboloid o hlavní poloose $\frac{c}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$ a mající s daným hyperboloidem společný kužel asymptotický.*

Krajní případy tohoto druhu geodetik obdržíme: pro $c = 0$; pak $a'^2 = b^2$, $b'^2 = a^2$, t. j. kotálejší se hyperbola se stotožní

s meridianem, jenž je geodetikou; pro $c = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$; pak $a'^2 = b^2$, $b'^2 = 0$. Obdržíme přímku v rovině, jejíž vzdálenost od středu plochy je — dle vzorce (50) — rovna a ; jejím přiložením na plochu obdržíme tedy přímou geodetiku.

25. c) Pro $a^2 < 0$, $b^2 > 0$, t. j. hyperboloid dvojplochý je $a'^2 > 0$, $b'^2 < 0$; dostáváme tedy reálnou hyperbolu. Výraz (50) je záporný; i nabyli jsme výsledku:

Geodetiky na rotačním hyperboloidu dvojplochém vzniknou kotálením přímého kužele o výšce $c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$, jehož vrchol tkví ve středu plochy a jehož základnou je hyperbola, po hyperboloidu.

Je zajímavo připomenouti si, že projekce těchto geodetik na rovinu rovníku nelze vytvořiti kotálením hyperboly (v. odst. 8. c).

Geodetika na dvojplochém hyperboloidu dotýká se rovnoběžky o poloměru c . Průvodič jejího bodu na této rovnoběžce je — jak se snadno vypočítá — $\sqrt{b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2}}$. Dosadíme-li toto číslo za ρ do rovnice (50), obdržíme $r = b$; to znamená, že při kotálení hyperbola dotkne se rovnoběžky o poloměru c svým hlavním vrcholem.

Kotálení, jímž se vytvoří určitá geodetika, může se díti u této plochy dvojím způsobem: kotálení se hyperbolu přiložíme vrcholem k rovnoběžce c buď tak, že její křivost je souhlasná s křivostí řezu, způsobeného na ploše její rovinou; pak je střed hyperboly vně plochy; anebo ji přiložíme tak, že její zakřivení je opačné, pak je střed uvnitř plochy. Obojí toto kotálení musí ovšem vésti k téže geodetice, ježto vyhovuje týmž analytickým podmínkám. Lze snadno uvážit, že tato dvojí možnost se nevyskytne u ellipsoidů, ani u hyperboloidu jednoplošného.

Při druhém způsobu kotálení je zřejmo, že hyperbola leží stále vně plochy; všimněme si blíže prvního způsobu. Budiž M bod na rovnoběžce o poloměru c , v němž se plochy dotýká hyperbola svým vrcholem. Rovina hyperboly protne plochu v ellipse; zjistí se totiž snadno, že střed hyperboly je na téže

straně od rovníku, jako kotálející se větev. Budiž R poloměr křivosti této ellipsy v bodě M . Normální řez plochy mající s touto ellipsou v bodě M společnou tečnu je hlavní řez; dle věty všeobecně platné pro křivost plochy rotační rovná se jeho poloměr křivosti R_0 délce normály plochy mezi bodem M a osou rotační. Jednoduchým výpočtem, jež netřeba podrobně uváděti,

obdrží se $R_0 = \frac{\sqrt{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2}}{b}$. Poloměr křivosti R_1 , kotálející se hyperboly v hlavním vrcholu je — dle známého vzorce —

$$-\frac{b'^2}{a'} = \frac{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2}{-a^2b}.$$

Je pak $R_0 < R_1$, neboť z nerovnosti

$$\frac{\sqrt{b^2c^2 + a^4 - m^2c^2}}{b} < \frac{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2}{-a^2b}$$

plyne postupně

$$\begin{aligned} -a^2 &< \sqrt{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2} \\ a^4 &< b^2c^2 + a^4 - a^2c^2 \\ 0 &< c^2(b^2 - a^2), \end{aligned}$$

což je správné, ježto $b^2 - a^2 > 0$. Avšak dle věty Meusnierovy je $R < R_0$; je tedy $R < R_1$.

Ježto tedy hyperbola je méně zakřivená, než ellipsa plochy ležící v její rovině, leží hyperbola vně této ellipsy a tedy i hyperboloidu. Z toho však plyne — ježto i střed hyperboly i hyperbola sama při tomto kotálení leží vně hyperboloidu — že je snadno možno, toto kotálení mechanicky realizovati. Při ellipsoidu a hyperboloidu tomuto realizování vadí okolnost, že kuželosečka kotálející se protíná plochu v dalších dvou bodech (alespoň v blízkosti rovníku).

Krajní případ nastane u této plochy pro $c = 0$; pak $a'^2 = b^2$, $b'^2 = a^2$; to je rovnice meridiánu.

O asymptotách platí táž věta, kterou jsme našli pro hyperboloid jednoplochý (odst. 24.).

26. — II. $e = e_\beta$.

Řešení rovnic (48) je pak

$$\begin{aligned} r \left[e^{(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\gamma - e_\alpha - c}} - (\vartheta - \vartheta_0) \sqrt{\frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\gamma - e_\alpha}} \right] = \\ = 2r \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} (e_\beta - e_\gamma). \end{aligned}$$

Dosadíme sem ze vzorců (4); pak rovnice zní

$$\begin{aligned} r \left[e^{(\vartheta - \vartheta_0)} \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{b^2 c^2 + a^4 - a^2 c^2}} - (\vartheta - \vartheta_0) \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{b^2 c^2 + a^4 - a^2 c^2}} \right] = \\ = 2 \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^2}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Pro rozdíl čtverců průvodičů obdržíme

$$r^2 - \varrho^2 = -e_\beta r^2 \frac{a^2 - b^2}{b^2} - \frac{1}{3a^2} (2a^4 + 2a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^2 c^2);$$

dosadíme-li sem za e_β z rovnice (6), zjednoduší se tento výraz na tvar

$$r^2 - \varrho^2 = -a^2. \quad (52)$$

Případ, kdy pravá strana rovnice (51) je reálná, vypustíme z diskuse z důvodů vyložených v odst. 16. a) a obrátíme se hned k případu, kdy tento výraz je imaginární, t. j. kdy

$$\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^2} < 0.$$

Případ ellipsoidů je při tom ovšem vyloučen, tak že a^2 , b^2 mají nutně znaménka nesouhlasná.

A) $a^2 > c^2$. I musí $\frac{a^2 - b^2}{a^2} < 0$; t. j. $1 - \frac{b^2}{a^2} < 0$; ale tato nerovnost je nemožná, neboť $\frac{b^2}{a^2} < 0$.

B) $a^2 < c^2$. I musí $\frac{a^2 - b^2}{a^2} > 0$, což je vyplněno i pro $a^2 > 0$, $b^2 < 0$, i pro $a^2 < 0$, $b^2 > 0$. Ježto pak $a^2 - c^2 < 0$, musí tedy, aby exponent byl imaginární,

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2 c^2 + a^4 - a^2 c^2} > 0.$$

Je-li $a^2 > 0$, $b^2 < 0$, je $b^2 - a^2 < 0$ a musí
 $b^2c^2 + a^4 - a^2c^2 < 0$.

Této nerovnosti vyhovuje každé $c > \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, tedy také
 $c > a$.

Je-li $a^2 < 0$, $b^2 > 0$, je $b^2 - a^2 > 0$, i musí
 $b^2c^2 + a^4 - a^2c^2 > 0$,

což je nyní zřejmě vyplněno pro každé c .

Tento případ vede tedy jednak k těm geodetikám hyperboloidu jednoplochého, jež se dotýkají rovnoběžky, jednak ke geodetikám hyperboloidu dvojplochého. Rovnice kotálející se křivky je

$$r \sin \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)}{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2}} (\vartheta - \vartheta_0) = \sqrt{\frac{(b^2 - a^2)(a^2 - c^2)}{a^2}}, \quad (53)$$

což je ovšem rovnice téhož tvaru, jako (43). Abychom pak rozhodli, kterého z obou druhů v odst. 17. udaných křivka je, řešíme nerovnosti

$$\frac{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)}{b^2c^2 + a^4 - a^2c^2} \leq 1.$$

V případě $a^2 > 0$, $b^2 < 0$ je jmenovatel záporný. Z těchto nerovností tedy plyne v tomto případě

$$\begin{aligned} a^4 - a^2c^2 - a^2b^2 + b^2c^2 &\leq b^2c^2 + a^4 - a^2c^2 \\ \text{t. j.} \quad -a^2b^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Ale $a^2b^2 < 0$, tedy platí dolejší znaménko; t. j. v rovnici (53) koeficient při $\vartheta - \vartheta_0$ je < 1 . V případě $a^2 < 0$, $b^2 > 0$ je tomu zřejmě naopak. Konečně ještě v případě prvním je výraz (52) záporný, v druhém kladný.

I máme věty:

Geodetiky na jednoplochem hyperboloidu, jež se dotýkají rovnoběžky, lze vytvořit kotálením kužele přímého o výšce a , jehož vrchol tkví ve středu plochy a jehož základna je křivka, daná rovnicí (53) (a to tvaru, jaký se jeví na obr. 6.).

Geodetiky na hyperboloidu dvojplochem lze vytvořit kotálením křivky (53) (a to tvaru, jak se jeví na obr. 5.), jejíž střed má od středu plochy konstantní vzdálenost $\sqrt{-a^2}$; ko-

tálení pak je takové, že průvodič této křivky je stále přeponou v trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je tato vzdálenost, druhá průvodič geodetiky.

O průběhu kotálení a jiných podrobnostech netřeba zde již se šíriti.

27. — III. $e = e_\gamma$.

Řešení rovnic (48) je pak

$$\begin{aligned} r \left[e (\vartheta - \vartheta_0) \sqrt{\frac{e_\gamma - e_\beta}{e_\beta - e_\alpha}} - e (\vartheta - \vartheta_0) \sqrt{\frac{e_\gamma - e_\beta}{e_\beta - e_\alpha}} \right] = \\ = 2\tau \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} (e_\gamma - e_\beta). \end{aligned}$$

Sem dosadíme ze vzorců (4); rovnice nabude tvaru

$$\begin{aligned} r \left[e (\vartheta - \vartheta_0) \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)}{a^2 b^2}} - e (\vartheta - \vartheta_0) \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)}{a^2 b^2}} \right] = \\ = 2 \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)(c^2 - a^2)}{a^2}}. \end{aligned}$$

Pro rozdíl čtverců průvodičů obdržíme

$$r^2 - \varrho^2 = -e_\gamma \tau^2 \frac{a^2 - b^2}{b^2} - \frac{1}{3\tau^2} (2a^4 + 2a^2 b^2 + a^2 c^2 - b^2 c^2);$$

dosadíme-li sem za e_γ dle (6), zjednoduší se tento výraz na tvar

$$r^2 - \varrho^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2} - b^2 - c^2. \quad (54)$$

Přiblídneme opět jen k případu, kdy

$$\frac{(a^2 - b^2)(c^2 - a^2)}{a^2} < 0;$$

a^2 , b^2 mají pak znaménka nesouhlasná.

A) $a^2 > c^2$. Pak musí $\frac{a^2 - b^2}{a^2} > 0$, což je vždy vyplněno. Ježto pak $a^2 - c^2 > 0$, musí, aby exponent byl imaginární, $\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} < 0$.

Je-li $a^2 > 0$, $b^2 < 0$, je tato nerovnost vyplněna. Je-li $a^2 < 0$, $b^2 > 0$, je poslední zlomek kladný. Zbývá tedy jen

případ hyperboloidu jednoplochého, a to těch dvou druhů geodetik, při nichž je $c < a$. Rovnice kotálejší se křivky je

$$r \sin \sqrt{\frac{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}{a^2 b^2}} (\vartheta - \vartheta_0) = \sqrt{\frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{a^2}}. \quad (55)$$

Řešíme opět nerovnosti

$$\frac{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}{a^2 b^2} \geq 1.$$

Ježto jmenovatel je záporný, plyne odtud

$$a^2 c^2 - a^4 - b^2 c^2 + a^2 b^2 \leq a^2 b^2$$

$$\text{t. j.} \quad a^2 c^2 - a^4 - b^2 c^2 \leq 0$$

$$\text{č.} \quad b^2 c^2 + a^4 - a^2 c^2 \geq 0$$

$$\text{aneb} \quad \frac{b^2 c^2}{a^2} + a^2 - c^2 \geq 0.$$

Vidíme tedy hned: pro geodetiky, pro něž $0 < c < \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ obdržíme křivku tvaru prvního (v. obr. 5.); pro geodetiky, pro něž $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} < c < a$, obdržíme křivku tvaru druhého (obr. 6.).

Aby výraz (54) byl na př. záporný, musí

$$b^2 c^2 - a^2 b^2 - a^2 c^2 < 0,$$

z čehož plyne

$$c^2 (b^2 - a^2) < a^2 b^2$$

$$c^2 (a^2 - b^2) > -a^2 b^2$$

$$c > a \sqrt{\frac{-b^2}{a^2 - b^2}}.$$

Máme tedy větu:

Geodetiky na hyperboloidu jednoplochem, jež protínají rovník, lze vytvořiti kotálením křivky (55): toto kotálení je kotálením kužele známých vlastností pro geodetiky, pro něž

$c > a \sqrt{\frac{-b^2}{a^2 - b^2}}$; jinak je to kotálení toho druhu, jak bylo udáno v odst. 26. pro hyperboloid dvojplachý.

V celku tedy lze vytvořiti i geodetiky samy kotálením křivek, daných nejjednodušším řešením rovnic (48), po příslušné rotační ploše.