Bohumil Kučera
O pohybu otáčivém

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 291--320

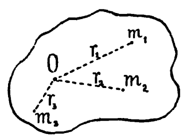
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124100

O pohybu otáčivém.

Pro žáky středních škol píše Dr. **Bohumil Kučera**, prof. čes. university.

1. Energie rotujícího tělesa. Moment setrvačnosti.

Rotuje-li těleso, zůstávají částice ležící na jisté přímce v klidu, ostatní opisují kruhové dráhy. Zmíněná přímka, která obsahuje veškeré středy kruhových drah, nazývá se *osou otáčení* nebo *osou rotační*. Rychlosti jednotlivých částic jsou různé dle jejich vzdálenosti od rotační osy. Nazveme-li hmotu jednotlivých



Obr. 1.

částic, z nichž se rotující těleso skládá, m_1, m_2, m_3 . . . jejich vzdálenosti od osy O (obr. 1.) postupně r_1, r_2, r_3 . . ., a *postupné rychlosti* v_1, v_2, v_3, . . . platí pro každé v_k vztahy

$$v_k = \frac{2\pi r_k}{T} \quad \text{a} \quad v_k = r_k\,\omega,$$

kde T je doba jednoho úplného oběhu a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ *rychlost úhlová* (angulárná), t. j. středový úhel v radianech příslušný dráze za vteřinu proběhnuté (viz učebnice M.-J.-N., stať „Rovnoměrný pohyb kruhový"). Místo oběžné doby T zavádíme často počet oběhů za vteřinu $n = \frac{1}{T}$, takže $\omega = 2\pi n$. Kinetická energie (živá síla) částice m_k jest jako vždy dána polovičním součinem

*) V několika článcích, z nichž dnešní je prvním, chce autor doplniti pěkné výklady středoškolské učebnice fysiky Mašek-Jeništa-Nachtikalovy pojednáním o různých zjevech fysikálních, které přesahují obor středoškolskému vyučování vyměřený, ač se dají zpracovati methodami naprosto elementárnými. Z mnoha pramenů, kterých užil, uvádí zejména *E. Edserovu* »General physics«, která mu byla vzorem.

z hmoty a čtverce postupné rychlosti $\frac{1}{2} m_k v_k^2$. Kinetická energie celého rotujícího tělesa je součtem energie všech jeho částí a tedy rovna

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \ldots) = \frac{1}{2}\omega^2(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots) =$$
$$\frac{1}{2}\omega^2 \Sigma m r^2,$$

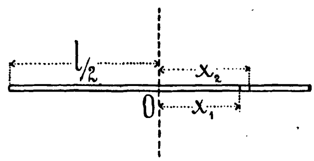
Z toho výrazu jest patrno, proč vhodně zavádíme rychlost úhlovou; jest pro všechny částice táž, a proto ji lze vytknouti před znamení součtu.

Výraz $K = \Sigma m r^2$ nazývá se *momentem setrvačnosti* daného tělesa. Závisí nejen na jeho hmotě, ale vzhledem k r také na způsobu rozložení hmoty kolem osy rotační a jest ovšem u téhož tělesa pro různé osy všeobecně různý. Veliký význam této veličiny vysvitne okamžitě, srovnáme-li výraz pro kinetickou energii tělesa rotujícího $\frac{1}{2} K\omega^2$ a tělesa v pohybu postupném $\frac{1}{2} Mv^2$. Jako odpovídá rychlosti postupné v rychlost úhlová ω, odpovídá i celkové hmotě tělesa M moment setrvačnosti K. Rozměr momentu setrvačnosti jest patrně hmota $\times$ (vzdálenost)^2 a jednička $g \cdot cm^2$. Násobíme-li ji čtvercem jedničky pro úhlovou rychlost, která jest, jak patrno ze vztahu $\omega = \frac{2\pi}{T}$ v absolutní míře $\frac{1}{sec}$, vznikne jednička $\frac{g\, cm^2}{sec^2}$, t. j. *erg* stejně jako u kinetické energie pohybu postupného, která vznikajíc z mechanické práce musí míti týž rozměr.

Vypočítati moment setrvačnosti daného tělesa jest úlohou počtu integrálního (viz *Bydžovský-Vojtěch*: Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií, § 4.). V případech zvlášť jednoduchého geometrického tvaru vedou k cíli i úvahy elementární, které však nejsou než obejitím integrace, jak uvidíme na některých příkladech, o nichž v následujících odstavcích pojednáme.

2. Moment setrvačnosti tenké tyče kol osy k ní kolmé a jejím středem procházející.

Hledaný moment setrvačnosti bude patrně dvakráte větším, než moment jedné její poloviny. Rozdělme si celou poloviční délku tyče $\frac{l}{2}$ (obr. 2.) na samé částice délky $x_2 - x_1$, kde x značí vzdálenosti od středu. Nazveme-li hmotu jedničky délkové



Obr. 2.

m, bude hmota celé tyče $M = ml$ a hmota elementu délky $(x_2 - x_1)$ rovna $m(x_2 - x_1)$. Jeho příspěvek k momentu setrvačnosti bude dK a patrně je

$$m(x_2 - x_1)x_1^2 < dK < m(x_2 - x_1)x_2^2,$$

neboť dle výměru máme hmotu částice násobiti čtvercem její vzdálenosti od osy a x_2^2 je větší než čtverec střední vzdálenosti, x_1^2 pak je menší.

Za střední hodnotu nabízejí se nám samy sebou rýrazy

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \quad \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \quad \text{nebo} \quad \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3}.$$

Mohli bychom užít kteréhokoli z nich, nebot všechny leží mezi hodnotami x_1^2 a x_2^2, které, je-li $x_2 - x_1$ velmi malé, již beztak se od sebe liší jen o nesmírně nepatrnou hodnotu. Vzpomeňme však, že musíme vytvořiti výrazy pro všechny částice tyče a tyto dohromady sečísti; proto hodí se nejlépe výraz poslední, který vede k příspěvku k momentu setrvačnosti

$$m(x_2 - x_1)\frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{3} = \frac{m}{3}(x_2^3 - x_1^3).$$

Rozdělíme-li nyní polovinu tyče na velmi veliký počet n částí řezy vedenými ve vzdálenostech $x_0 = 0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$, $x_n = \frac{l}{2}$, bude její moment setrvačnosti dán součtem

$$\frac{m}{3}[(x_1^3 - x_0^3) + (x_2^3 - x_1^3) + (x_3^3 - x_2^3) + \ldots$$

$$(x_{n-1}^3 - x_{n-2}^3) + (x_n^3 - x_{n-1}^3)] = \frac{m}{3}[x_n^3 - x_0^3] = \frac{ml^3}{24}$$

a vzpomeneme-li, že $ml = M =$ celé hmotě, a že moment setrvačnosti celé tyče má hodnotu dvojnásobnou

$$K = M\frac{l^2}{12}.$$

Užitím počtu integrálního (viz Bydž.-Vojtěch § 4 stať 34. a 35.) byl by celý výpočet dán daleko kratší úvahou následující: Příspěvek dK k momentu setrvačnosti od elementu délky dx, tedy hmoty mdx ve vzdálenosti x je dle výměru $dK = mdx \cdot x^2$ a tedy moment setrvačnosti celé tyče

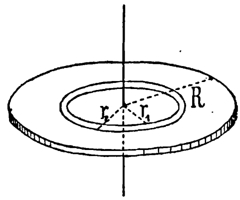
$$K = 2m\int_0^{\frac{l}{2}} x^2dx = 2m \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3} = \frac{ml^3}{12} = M\frac{l^2}{12}$$

Další výpočty budeme uváděti stručněji, neboť způsob úvahy jest úplně stejný. Jenom dvě okolnosti nutno ještě zvlášť vytknouti. Jest patrno, že hmota m jedničky délkové musí býti podél celé tyče táž, t. j. tyč musí býti homogenní a stejně tlustá, neboť jinak bychom nesměli vytknouti m před znamení integrační resp. před závorku při summaci. Za druhé musí býti tyč velmi tenkou, tak aby vzdálenost všech bodů téhož kolmého řezu x od osy rotační byla až na veličiny velmi malé táž.

Z toho však plyne, že výraz nalezený platí také pro moment setrvačnosti hmotného rovnoběžnostěnu konečné délky l a šířky a, je-li jeho tloušťka b velmi malá a osa středem jdoucí rovnoběžna s tloušťkou. (Tenké, dlouhé prkno postavené na úzkou stranu a rotující kolem osy vertikální.) Lzeť si jej mysliti složený ze samých tenkých tyčí šířky $\frac{a}{n}$, kde n je veliké číslo, které hořením podmínkám vyhovují.

3. Moment setrvačnosti kruhové desky kol osy středem jdoucí a na rovině desky kolmé.

Budiž M celková hmota a R poloměr desky (obr. 3.). Mysleme si z ní vyříznutý kruhový prsténec o vnitřním poloměru r_1 a vnějším r_2. Je-li jeho hmota M_1 a lze-li jej považovati za nekonečně tenký, t. j. velmi přibližně $r_1 = r_2 = r$, jest jeho



Obr. 3.

příspěvek k momentu setrvačnosti patrně $M_1 r^2$, neboť všechny jeho částice mají od osy tutéž vzdálenost r. Celou desku lze si myslit složenou z takových prsténců. Nazveme m hmotu jedničky plošné, t. j. $m = \frac{M}{\pi R^2}$. Hmota prsténce mezi poloměry r_1 a r_2 jest $M_1 = m\pi(r_2^2 - r_1^2)$. Střední hodnota čtverce poloměru je $\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = r^2$, takže příspěvek od prsténce k momentu setrvačnosti jest $dK = m\frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2) = m\frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4)$. Myslíme-li si desku rozdělenou na veliký počet n prsténců kruhovými řezy poloměrů $r_o = o, r_1, r_2 \ldots r_{n-1}, r_n = R$, jest součet příspěvků čili celý moment setrvačnosti

$$K = m\frac{\pi}{2}[(r_1^4 - r_o^4) + (r_2^4 - r_1^4) + \ldots (r_n^4 - r_{n-1}^4)] =$$
$$= m\frac{\pi}{2}R^4 = M\frac{R^2}{2}.$$

Ježto složením stejných desek vznikne kruhový válec, dává náš vzorec také moment setrvačnosti válce celkové hmoty M a poloměru R, rotujícího kolem podélné osy. Kdyby se jednalo o kruhovou trubici vnitřního poloměru r a vnějšího R, bude výpočet stejný; jenom musíme pak klásti $r_o = r$, takže pak

$$K = m\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = m\frac{\pi}{2}(R^2 - r^2)(R^2 + r^2) = M\frac{R^2 + r^2}{2},$$

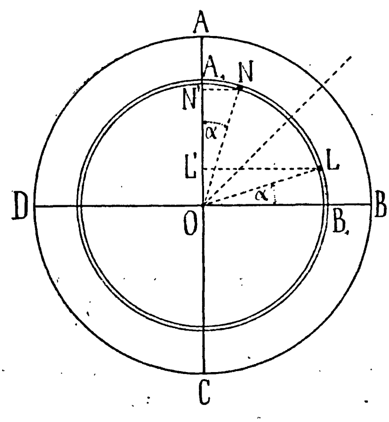
neboť nyní celková hmota jest $M = m\pi(R^2 - r^2)$. Vzorec hoření je specialisací pro $r = 0$.

Počtem integrálním plyne ve všeobecnějším případě trubice: Plocha mezikruží šířky $r_2 - r_1 = dr$ ve vzdálenosti r od osy jest $2\pi r\, dr$ a tedy hmota elementárního prsténce $m \,.\, 2\pi r\, dr$. Příspěvek k momentu setrvačnosti $dK = m \,.\, 2\pi r\, dr \,.\, r^2$ a tedy moment

$$K = 2\pi m\int_r^R r^3 dr = 2\pi m\frac{R^4 - r^4}{4} = m\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = M\frac{R^2 - r^2}{2}.$$

4. Moment setrvačnosti tenké kruhové desky kolem průměru jakožto osy.

Uvažujme nejprvé o momentu setrvačnosti tenkého kruhového prsténce poloměru r (obr. 4.). Rozdělme jej na čtyři



Obr. 4.

kvadranty a hledejme příspěvek jediného z nich, na př. A_1B_1, je-li AC osou rotační. Mysleme si, že sestává z velmi velikého počtu stejných hmotných elementů hmoty μ, z nichž jeden se nachází v bodě L. Je-li $LL' = r \cos \alpha$ kolmice spuštěná na osu rotační, bude jeho příspěvek k momentu setrvačnosti

$$\mu \,.\, \overline{LL'}^2 = \mu\, r^2 \cos^2 \alpha.$$

Vyhledejme nyní stejný element v bodě N, kde

$$\sphericalangle NOB = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

jehož příspěvek jest patrně

$$\mu \,.\, \overline{NN'}^2 = \mu\, r^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mu\, r^2 \sin^2 \alpha.$$

Příspěvek od obou elementů dohromady jest

$$\mu\, r^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \mu\, r^2.$$

Jest tudíž příspěvek ode všech elementů v kvadrantu $A_1 B_1$ dán součtem $r^2 \Sigma\mu$, kde $\Sigma\mu$ jest patrně celková hmota jedné poloviny kvadrantu, čili je-li hmota celého prsténce M_1, je $\Sigma\mu = \frac{M_1}{8}$. Ježto patrně jsou příspěvky všech čtyř kvadrantů k momentu setrvačnosti K prsténce stejně, je

$$K = 4\, r^2 \Sigma\mu = 4\, r^2 \frac{M_1}{8} = M_1 \,.\, \frac{r^2}{2}.$$

Srovnáním s § 3 vidíme, že moment setrvačnosti prsténce kolem průměru jest poloviční jeho momentu kolem osy na jeho rovině kolmé a středem jdoucí. Stejně tomu musí býti i u tenké kruhové desky, kterou lze si mysliti složenou ze samých prsténců o poloměrech rostoucích od 0 do R, takže její moment setrvačnosti jest pro průměr jakožto osu

$$K = M \frac{R^2}{4}.$$

U plochého prsténce šířky $R - r$ jest dle předchozího § obdobně

$$K = M \frac{R^2 + r^2}{4}.$$

Počtem integrálním provedeme úkol následovně: Částice u L budiž délky $dl = r \,.\, d\alpha$, její hmota $\mu = \frac{M_1}{2\pi r} \,.\, dl = \frac{M_1}{2\pi}\, d\alpha$

a příspěvek k momentu setrvačnosti

$$\mu \,.\, r^2 .\, cos^2 \alpha = \frac{M_1 r^2}{2\pi} cos^2 \alpha \, d\alpha .$$

Příspěvek kvadrantu jest pak

$$\frac{M_1 r^2}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 \alpha \, d\alpha = \frac{M_1 r^2}{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos\, 2\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \frac{M_1 r^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos\, 2\alpha)\, d\,(2\alpha) = \frac{M_1 r^2}{8\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\,(2\alpha) +$$

$$+ \frac{M_1 r^2}{8\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,(2\alpha)\,.\, d\,(2\alpha) = \frac{M_1 r^2}{8\pi}\, 2\, \frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{M_1 r^2}{8\pi} \left(sin\, 2 \frac{\pi}{2} - sin\, 2\,.\,0 \right) = \frac{M_1 r^2}{8}$$

Od všech čtyř kvadrantů pochodí moment setrvačnosti prsténce $\frac{M_1 r^2}{2}$.

Je-li m hmota plošné jedničky desky, je hmota prsténce šířky dr $M_1 = m \,.\, 2\pi r\, dr$ a jeho příspěvek k momentu setrvačnosti $\frac{M_1 r^2}{2} = \frac{m \,.\, 2\pi r^3\, dr}{2}$. Moment setrvačnosti plochého prsténce šířky $R - r$ jest tudíž

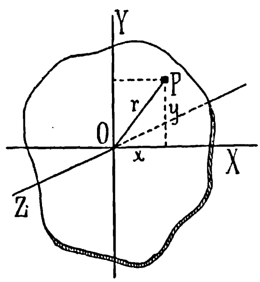
$$K = m\pi \int_r^R r^3\, dr = \frac{m\pi\, (R^4 - r^4)}{4}$$

a ježto jest jeho hmota $M = m\pi\, (R^2 - r^2)$, tedy

$$K = \frac{M\, (R^2 + r^2)}{4}.$$

U plné desky kruhové jest $r = 0$ a tedy $K = M \frac{R^2}{4}$.

Poznámka: Svrchu nalezený poznatek, že moment setrvačnosti prsténce nebo kruhové desky kolem průměru jakožto osy je polovinou momentu kolem osy na jeho rovině kolmé a středem jdoucí, jest zvláštním případem všeobecnější věty, kterou můžeme odvoditi následovně: Budiž dán v rovině papíru libovolný rovinný útvar (obr. 5). V téže rovině buďtež dány dvě navzájem kolmé osy X a Y; osa Z jejich průsečíkem O procházející stůjž na nich kolmo. Osy X a Y nazýváme jakožto osy rotační ekvatoreálnými, osu Z pak polárnou. Momenty setrvačnosti kol těchto os K_x a K_y nazýváme *momenty*



Obr. 5.

ekvatoreálnými, K_z momentem *polárným*. Je-li na malé plošce kolem bodu P souřadnic x a y hmota μ, jest patrně

$$K_x = \Sigma \mu y^2 \quad K_y = \Sigma \mu x^2$$

$$\text{a } K_z = \Sigma \mu r^2 = \Sigma \mu (x^2 + y^2) = K_x + K_y,$$

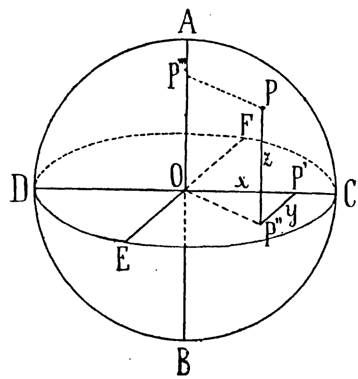
t. j. *moment polárný jest součtem obou momentů ekvatoreálných*. Ježto u kruhového prsténce nebo kruhové desky pro osy středem jdoucí jest $K_x = K_y$, musí nutně $K_z = 2 K_x = 2 K_y$.

6. Moment setrvačnosti kulové vrstvy a plné koule kolem průměru jakožto osy.

Budiž průměr kulové vrstvy AB (obr. 6.) osou rotační. Veďme dva další průměry DC a FE navzájem a na AB kolmé. Tím jest dána soustava pravoúhlých souřadnic v prostoru (viz Bydžovský-Vojtěch § 8 stať 72), z nichž označíme OC jakožto osu x-ovou, OE za y-ovou a OA za z-ovou. Promítněme známým způsobem bod P kulové vrstvy na roviny souřadnic, takže bude určen souřadnicemi $OP' = x$, $P'P'' = y$ a $P''P = z$. Velmi malá jedničková ploška kolem bodu P obsahujž hmotu m. Její příspěvek k momentu setrvačnosti kolem osy OA bude, je li PP''' kolmice na osu OA spuštěná:

$$m \,.\, \overline{P'''P}^2 = m \,.\, \overline{OP''}^2 = m\,(x^2 + y^2).$$

Moment setrvačnosti celé kulové vrstvy kolem osy Z bude potom $K_z = \Sigma m\,(x^2 + y^2)$. Zcela týmž právem můžeme psát za moment setrvačnosti kolem osy X-ové $K_x = \Sigma m\,(y^2 + z^2)$ a kolem Y-ové $K_y = \Sigma m\,(z^2 + x^2)$. Ale vzhledem k všestranné



Obr. 6.

symmetrii musí $K_x = K_y = K_z = K$, takže sečteme-li nalezené tři vztahy, obdržíme

$$K = \frac{K_x + K_y + K_z}{3} = \frac{2}{3}\,\Sigma m\,(x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$= \frac{2}{3}\,r^2 \Sigma m = M_1 \,.\, \frac{2}{3}\,r^2,$$

kde jest $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 =$ čtverci poloměru kulové vrstvy, jenž jest pro všechny body týž a $\Sigma m = M_1$ rovna celkové hmotě vrstvy.

Jedná-li se o moment setrvačnosti plné koule, rozložme ji na kulové vrstvy vepsanými koulemi poloměrů

$$r_0 = 0,\ r_1,\ r_2,\ \ldots\ r_{n-1},\ r_n = R.$$

Je-li celková hmota koule M, jest hmota jedničky prostorové $m = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Objem kulové vrstvy obsažené mezi koulemi r_2 a r_1 můžeme psát ve tvaru $4\pi r_{12}^2 (r_2 - r_1)$, kde r_{12}^2 značí hodnotu ležící mezi r_1^2 a r_2^2. Hmota té vrstvy bude pak $M_1 = m \cdot 4\pi r_{12}^2 (r_2 - r_1)$ a její příspěvek k momentu setrvačnosti

$$M_1 \cdot \frac{2}{3} r_{12}^2 = \frac{8}{3} m\pi r_{12}^4 (r_2 - r_1).$$

Ježto se $r_2 - r_1$ navzájem liší libovolně málo, můžeme za hodnotu r_{12}^4, kde $r_1^4 < r_{12}^4 < r_2^4$ psáti

$$r_{12}^4 = \frac{1}{5}(r_1^4 + r_1^3 r_2 + r_1^2 r_2^2 + r_1 r_2^3 + r_2^4),$$

kterážto napsanou podmínku splňuje. Pak je příspěvek kulové vrstvy

$$dK = \frac{8}{15} m\pi (r_2^5 - r_1^5)$$

a celý moment setrvačnosti

$$K = \frac{8}{15} m\pi [(r_1^5 - r_0^5) + (r_2^5 - r_1^5) + \ldots + (r_n^5 - r_{n-1}^5)] =$$

$$= \frac{8}{15} m\pi (r_n^5 - r_0^5) = \frac{8}{15} m\pi R^5 = M \cdot \frac{2}{5} R^2.$$

Jak by vypadl moment setrvačnosti pro kouli dutou, je bezprostředně patrno; stačí dosaditi, je-li vnitřní poloměr r, za $r_0 = r$.

Celý postup je vlastně zakrytou integrací: Jeť hmota kulové vrstvy poloměru r a tloušťky dr rovna $M_1 = m 4\pi r^2 \cdot dr$, příspěvek k momentu setrvačnosti

$$dK = M_1 \cdot \frac{2}{3} r^2 = \frac{8}{3} m\pi r^4 \, dr$$

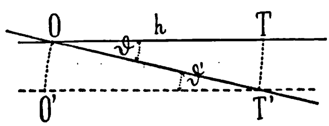
a tedy u plné koule

$$K = \frac{8}{3} m\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{15} m\pi R^5 = M \cdot \frac{2}{5} R^2.$$

Cvičení: Moment setrvačnosti kulové vrstvy i koule plné kolem průměru lze vypočísti také tak, že rozložíme si tyto útvary řadou rovinných řezů, na rotační ose kolmých, v samé prsténce nebo kruhové desky o proměnlivém poloměru a užijeme výsledku § 5. Pokuste se o to.

7. Moment setrvačnosti tělesa kolem libovolné osy.

V dosavadních úvahách vyčíslili jsme moment setrvačnosti typicky jednoduchých těles kolem os, které vždy procházely jejich těžištěm. Mělo to dobrý důvod. Lze totiž dokázati, že známe moment setrvačnosti tělesa kolem libovolné osy, známe-li hmotu tělesa a jeho moment setrvačnosti kolem osy těžištěm procházející a s danou osou rovnoběžné. Důkaz provedeme nejsnadněji takto: Nechť se těleso otáčí kolem osy O k papíru kolmé (obr. 7.); T budiž těžiště tělesa. Spojme OT přímkou.



Obr. 7.

Otočilo-li se těleso o velmi malý úhel ϑ kolem O, takže naše přímka přišla do polohy OT' a těžiště tělesa opsalo velmi malý, skoro přímý oblouček $TT' = h \,.\, \vartheta$, kde h je vzdálenost osy od těžiště, můžeme si celý děj představiti tak, že se nejprvé celé těleso pohybovalo pohybem postupným do polohy $O'T'$, načež se otočil o oúhel $\vartheta' = \vartheta$ kolem osy s danou rovnoběžné, ale těžištěm T' procházející. Kinetická energie při otáčení kolem osy O se skládá tedy ze dvou částí. Prvá, odpovídající pohybu postupnému, jest

$$\frac{1}{2} M \left(\frac{h\vartheta}{\tau}\right)^2 = \frac{1}{2} M h^2 \omega^2,$$

je-li τ doba, za kterou se otočení událo, a ω příslušná rychlost úhlová a druhá

$$\frac{1}{2} K_0 \left(\frac{\vartheta'}{\tau}\right)^2 = \frac{1}{2} K_0 \omega^2,$$

kde K_0 je moment setrvačnosti tělesa kolem osy s danou rovnoběžné a těžištěm procházející. Je-li K moment setrvačnosti tělesa kol dané osy, jest tudíž

$$\frac{1}{2} K\omega^2 = \frac{1}{2} Mh^2\omega^2 + \frac{1}{2} K_0\omega^2$$

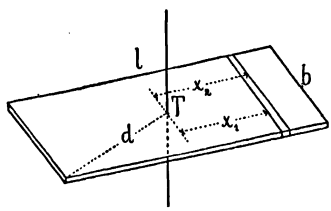
čili

$$K = K_0 + Mh^2.$$

Tím jest hořejší tvrzení dokázáno. Napsaný vztah, pro počítání momentů setrvačnosti velmi důležitý, nazývá se někdy *větou Steinerovou.*

8. Moment setrvačnosti plochého pravoúhlého rovnoběžnostěnu, kolem osy těžištěm jdoucí.

Úlohu tuto lze řešiti jakožto příklad na užití věty Steinerovy. Rozdělme si (obr. 8.) daný útvar na řadu tyčí $2n$ řezy



Obr. 8.

s osou rovnoběžnými a na př. na délku l kolmými, tedy se šířkou b rovnoběžnými. Hmota jedné tyče, jichž počet je $2n$, bude rovna $m = \frac{M}{2n}$, kde M je hmota celková.

Příspěvek jedné z nich mezi řezy x_1 a x_2 k momentu setrvačnosti bude dle věty Steinerovy a § 2.

$$dK = mx_{12}^2 + m\frac{b^2}{12},$$

kde zase $x_1^2 < x_{12}^2 < x_2^2$. Celý moment setrvačnosti jest pak dán výrazem

$$K = 2\sum_{x_0=0}^{x_n=\frac{l}{2}} m x_{12}^2 + \sum_{0}^{2n} m\frac{b^2}{12}.$$

Prvý člen pravé strany jest stejný jako moment setrvačnosti tenké tyče celkové hmoty M a délky l, to jest

$$2\sum_{x_0=0}^{x_n=\frac{l}{2}} m\, x_{12}^2 = M\frac{l^2}{12},$$

druhý pak jest

$$2n\, m\frac{b^2}{12} = M\frac{b^2}{12},$$

takže celkem

$$K = M\frac{l^2+b^2}{12}.$$

Tento výraz mohli jsme napsati okamžitě na základě poznámky k § 5. Jestiť hledaný moment polárným, k němuž patří axiálné momenty dle § 2.

$$K_b = M\frac{l^2}{12} \text{ a } K_l = M\frac{b^2}{12}.$$

Všimněme si, že $l^2 + b^2 = d^2$, kde d je délka diagonály u strany k ose kolmé.

Cvičení: 1. Proveďte řešení počtem integrálním. — 2. Dokažte, že moment setrvačnosti válce kruhového průřezu o poloměru R, délky l a hmoty M kolem osy těžištěm jdoucí a na ose válce kolmé jest $K = M\left(\frac{l^2}{12}+\frac{R^2}{4}\right)$. Jak veliký je moment setrvačnosti kruhové trubice kolem osy kolmé na její vlastní ose?

9. Gyrační poloměr.

Někdy je pohodlno vyjadřovati moment setrvačnosti všeobecným tvarem $K = M\varrho^2$, kde M jest celá hmota tělesa a ϱ jakási délka, různá pro různé osy v tělese, délka, kterou zveme *poloměrem setrvačnosti* neboli *gyračním*. Chceme-li vyjádřiti slovy jeho význam, můžeme říci, že jest to kolmá vzdálenost od osy, v níž by se musil nacházeti bod, v němž by byla soustředěna veškerá hmota tělesa tak, aby tento zjednodušený systém měl týž moment setrvačnosti jako dané těleso. Z dřívějších výsledků vidíme, že gyrační poloměr koule pro otáčení kolem průměru je

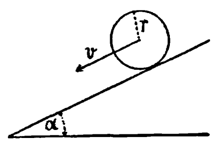
$$\varrho = R\sqrt{\frac{2}{5}},$$

tyče délky l pro otáčení kolem osy na ní kolmé a těžištěm jdoucí

$$\varrho = l\sqrt{\frac{1}{12}} \text{ atd.}$$

10. Příklad.

Dosavadních vědomostí můžeme užít k řešení následujícího příkladu: Těleso valí se kruhem poloměru r bez smýkání po nakloněné rovině sklonu α. Jest nalézti jeho zrychlení a dráhu v daném čase.



Obr. 9.

Je-li postupná rychlost těžiště rovnoběžná s délkou nakloněné roviny v jistém okamžiku v a počet otoček tělesa za vteřinu n, jest patrně $2\pi r n = v$, t. j. těleso se otáčí úhlovou rychlostí $2\pi n = \omega = \frac{v}{r}$.

Energie pohybu postupného je $\frac{1}{2} Mv^2$ a pohybu rotačního

$$\frac{1}{2} K\omega^2 = \frac{1}{2} M\varrho^2 \frac{v^2}{r^2}.$$

Celková energie kinetická je

$$\frac{1}{2} Mv^2\left[1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right].$$

Urazilo-li těleso původně klidné délku s, jest práce síly na ně působící, kterou jest složka zemské tíže $Mg \sin \alpha$, dána součinem síly a dráhy $Mg\,s\,.\,sin\,\alpha$ a dle principu zachování energie

$$\frac{1}{2}\,Mv^2\left[1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right]=Mg\;s\;sin\;\alpha.$$

Budiž v době t_1 od počátku pohybu proběhnutá dráha s_1 a konečná rychlost v_1, v době t_2 pak s_2 a v_2. Pak

$$\frac{1}{2}\,v_1^2\left[1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right]=s_1\,g\,sin\;\alpha,$$

$$\frac{1}{2}\,v_2^2\left[1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right]=s_2\,g\,sin\;\alpha.$$

Odečtením druhé rovnice od prvé plyne

$$\frac{1}{2}\,(v_2^2-v_1^2)\left[1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right]=(s_2-s_1)\,g\,sin\;\alpha.$$

Liší-li se časy t_2 a t_1 od sebe nesmírně málo, byla v čase (t_2-t_1) proběhnuta dráha (s_2-s_1) průměrnou rychlostí $\frac{v_1+v_2}{2}$, kterou lze považovati za stálou, takže

$$s_2-s_1=\frac{v_1+v_2}{2}\,.\,(t_2-t_1)$$

a poměr $\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$ dává nám zrychlení v čase $\frac{t_1+t_2}{2}$.

Přepsáním hoření rovnice plyne

$$(v_2-v_1)\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\left[1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right]=\frac{v_1+v_2}{2}\,.\,(t_2-t_1)\,.\,g\,sin\;\alpha,$$

z čehož urychlení

$$\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{g\;sin\;\alpha}{1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}.$$

Vidíme, že zrychlení je na čase nezávislé, stálé. Těleso postupuje pohybem stejnoměrně zrychleným, ale se zrychlením menším, než kdyby bez tření klouzalo po nakloněné rovině, jež by bylo rovno $g\;sin\;\alpha$. U téhož tělesa je zrychlení tím menší, čím je menší r. Dráha v čase t je dle známého vzorce dána výrazem

$$s = \frac{1}{2} \frac{g \sin \alpha}{1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2} \cdot t^2.$$

Z nalezeného výrazu plyne, že zrychlení koulí pohybujících se po padostroji Galileově je

$$\frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g \sin \alpha.$$

K změně r za stálého ϱ lze užít koule (nebo dvojkužele) valící se mezi dvěma rovnoběžnými skloněnými tyčemi, jichž vzdálenost lze měniti, takže koule zapadá mezi ně do různé hloubky.

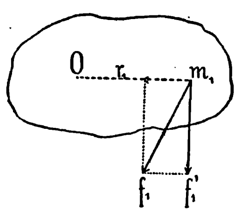
Cvičení. Šroubová matice pohybuje se bez tření podél vertikálního šroubu, který má n závitů na jednotce délkové. Najděte její zrychlení.

11. Základní rovnice pohybu otáčivého.

Při pohybu postupném jest základní rovnicí vztah Newtonův, který praví, že součin z hmoty a zrychlení (postupného) jest roven působící síle

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = f.$$

(Viz M.-J.-N. stať Dynamické měření sil. Hmota.)



Obr. 10.

Podobnou základní rovnici lze odvoditi také pro pohyb otáčivý. Mějme (obr. 10.) nějaké těleso, které se otáčí kolem osy O, a uvažujme o částici m_1 ve vzdálenosti r_1 od osy. Změní-li se jeho úhlová rychlost ω o obnos $d\omega$, změnila se jeho rychlost postupná $v_1 = r_1\omega$ o obnos dv_1, takže

$$v_1 + dv_1 = r_1(\omega + d\omega),$$

takže

$$dv_1 = r_1 d\omega.$$

Nastala-li tato změna v čase dt, jest změna rychlosti za jedničku časovou čili zrychlení postupné rovno $\frac{dv_1}{dt}$ a dle nahoře napsané základní rovnice mohlo se tak státi působením jisté síly f'_1, působící ve směru zrychlení, která jest dána vztahem

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = m_1 r_1 \frac{d\omega}{dt} = f'_1.$$

Vlastnost síly, že se snaží způsobiti otáčení kolem dané osy (nebo bodu), měříme momentem síly. (Viz M.-J.-N. stať Moment síly vzhledem k bodu.) Moment dané síly f_1 vzhledem k O je týž jako moment její složky f'_1 na r_1 kolmé, neboť patrně trojúhelníky Om_1f_1 a $Om_1f'_1$ jsou stejně veliké. Násobme tedy obě strany rovnice délkou r_1, čímž obdržíme

$$m_1 r_1^2 \frac{d\omega}{dt} = f'_1 r_1.$$

Podobné rovnice plynou pro jiné body tělesa, takže jejich součtem obdržíme

$$\frac{d\omega}{dt} \Sigma m r^2 = \Sigma f' r.$$

Změnu úhlové rychlosti za jedničku časovou $\frac{d\omega}{dt}$, kterou zveme *zrychlením úhlovým*, lze vyjmout před znamení součtu, ježto u tuhého otáčivého tělesa musí být pro všechny body táž. Na pravé straně stojí součet momentů všech sil. Tento však jest roven momentu jejich výslednice.

Plyne to ze všeobecné věty, kterou lze snadno dokázat a která není než všeobecnou větou *Varignonovou* (viz M.-J.-N.). Stačí provést důkaz pro dvě síly; rozšíření na další je na snadě. Máme-li dvě síly OA a OB a jejich výslednici OC (obr. 11.) a hledáme-li jejich momenty vzhledem k bodu M, spojme OM přímkou a sestrojme k ní kolmici OS; na tuto promítněme kolmo trati OA, OB a OC jakožto OA', OB' a OC'. Momenty sil jsou dány dvojnásobnými plochami trojúhelníků $\triangle\, OAM$, $\triangle\, OBM$, $\triangle\, OCM$. Pak plyne

$$2 \triangle OAM + 2 \triangle OBM = 2 \triangle OCM,$$

neboť

$$\triangle OAM = \triangle OA'M, \qquad \triangle OBM = \triangle OB'M$$

a

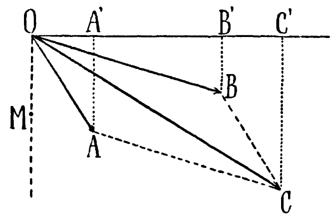
$$\triangle OCM = \triangle OC'M$$

a

$$\overline{OM} \,.\, \overline{OA'} + \overline{OM} \,.\, \overline{OB'} = \overline{OM} \,.\, \overline{OC'},$$

ježto

$$\overline{OC'} = OA' + A'C' = OA' + OB'.$$



Obr. 11.

Je-li tedy výsledná síla P a její moment vzhledem k O součin Pp, plyne

$$K \frac{d\omega}{dt} = Pp.$$

Jedná-li se o otáčení kolem pevné osy, jest P složkou výsledné síly ležící v rovině na ose kolmé a p její vzdálenosti od osy otáčecí. Součin Pp nazýváme *otáčecím momentem*. Ve výsledné rovnici vidíme úplnou analogii se základní rovnicí pohybu postupného. Jako tam je síla rovna hmotě násobené zrychlením postupným, je zde otáčecí moment roven momentu setrvačnosti (kolem dané osy) násobenému zrychlením úhlovým.

Výraz $m_1 r_1 \omega = m_1 v_1$ jest *hybností* částice m_1, kterou Angličané zovou „momentum", a výraz $m_1 v_1 \,.\, r_1 = m_1 r_1^2 \omega$ můžeme zváti *momentem hybnosti* částice kolem dané osy. V souhlase s tím nazývají Angličané výraz $\omega \Sigma mr^2 = \omega K$ „moment of momentum" daného tělesa. Němci zovou jej *otáčivým impulsem* (Drehimpuls). Vztah nahoře napsaný dá se tedy vysloviti větou: „Otáčecí moment jest roven změně otáčivého impulsu (momentu hybnosti) za jedničku časovou", kteráž jest analogickou s větou pro pohyb postupný: „Síla jest rovna změně $\left(m \frac{dv}{dt}\right)$ hybnosti za jedničku časovou."

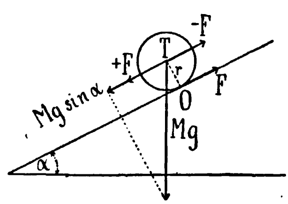
Otáčivý impuls jest veličinou mající směr a velikost, tedy vektorem, neboť jest určen teprve udáním osy a směru rotace. Znázorňuje se geometricky tratí, jejíž délka měří absolutní velikost součinu $K\omega$, a která se nanáší na osu rotační a to směrem k nám, díváme-li se podél osy otáčecí a děje-li se otáčení proti směru ručiček hodinových, směrem od nás, točí-li se těleso v témž smyslu jako ručičky hodinové.

Jako jest potřebí síly, aby se změnila buď velikost nebo směr hybnosti tělesa, tak jest potřebí otáčecího momentu, aby se změnila buď velikost nebo směr otáčivého impulsu (momentu hybnosti).

Je-li $Pp = 0$, tedy, poněvadž K jest stálé, musí $\frac{d\omega}{dt} = 0$, t. j. rychlost úhlová rotujícího tělesa se nemění.

12. Příklad na užití základní rovnice.

Jakožto příklad na používání základní rovnice pohybu otáčivého rozřešíme problem již řešený v § 10. Ježto valící se těleso se nesmýká po šikmé rovině, tedy bod, v němž se jí dotýká,



Obr. 12.

jest v okamžitém klidu, t. j. působí na něj jakási síla F, která mu ve smýkání brání. Kolem tohoto bodu otáčí se těleso okamžitou úhlovou rychlostí $\omega = \frac{v}{r}$, kde v je postupná rychlost těžiště a r poloměr valícího se tělesa.

Je-li okamžitá úhlová rychlost v okamžiku t rovna ω a postupná rychlost rovna v, bude v nejbližším okamžiku $t + dt$ úhlová rychlost $\omega + d\omega$ a postupná $v + dv$. Pak

$$\omega = \frac{v}{r}, \qquad \omega + d\omega = \frac{v + dv}{r} \quad \text{čili } d\omega = \frac{dv}{r}.$$

Vzrůst úhlové rychlosti za jedničku časovou, t. j. úhlové zrychlení jest

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot r = \frac{\gamma}{r},$$

označíme-li písmenou γ zrychlení postupné.

Abychom našli otáčivý moment, který způsobuje toto úhlové zrychlení, připojme v těžišti tělesa T působící dvě síly $-F$ a $+F$, které jsou patrně v rovnováze a nepůsobí tedy žádné změny v pohybu tělesa; otáčivým momentem jest patrně dvojice sil $+F$ v bodě T a F v bodě O, jejímž momentem jest Fr. Je-li moment setrvačnosti tělesa kolem osy $K = M\varrho^2$, jest základní rovnice

$$Fr = K\frac{d\omega}{dt} = M\varrho^2 \frac{\gamma}{r},$$

čili

$$F = M\gamma \frac{\varrho^2}{r^2}.$$

Abychom určili neznámou sílu F, napišme ještě základní rovnici pro postupný pohyb těžiště. Postupné zrychlení γ hmoty M jest způsobeno složkou $Mg \sin \alpha$ zemské tíže, k níž musíme přidati opačným směrem působící sílu $-F$, která zbývá z přidaných v těžišti dvou sil $+F$ a $-F$. Jest tudíž

$$M\gamma = Mg \sin \alpha - F = M\left[g \sin \alpha - \gamma \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right],$$

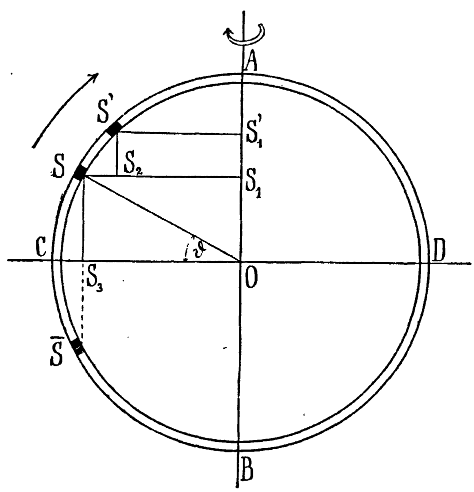
čili

$$\gamma = \frac{g \sin \alpha}{1 + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}.$$

Došli jsme tedy, jak je ovšem nutno, touto úvahou o silách k témuž výsledku jako dřívější úvahou energetickou.

13. Setrvačník.

Setrvačníkem nazýváme těleso velikého momentu setrvačnosti, které se může otáčeti s pokud možno malým třením kolem osy, kolem které je těžká hmota setrvačníku všestranně symmetricky rozložena. Je-li směr osy setrvačníku fixován, může moment hybnosti měniti svou velikost pouze následkem otáčivých momentů působících proti rotaci. Není-li jich, zůstává stálou, t. j. úhlová rychlost rotace se nemění. U dobře konstruovaných setrvačníků, kde tření v ose je pokud možno malé, lze toho dociliti, že byvše prudce roztočeny otáčí se hodinu i déle.



Obr. 13.

Představme si setrvačník otáčející se stálou úhlovou rychlostí kolem osy. Změní-li se směr osy, změní se směr momentu hybnosti, což, jak víme, může býti způsobeno pouze účinkem otáčecího momentu. Budeme se zabývati určením tohoto momentu.

Kruhový prsténec v obr. 13. znázorňujž setrvačník, který se otáčí úhlovou rychlostí ω ve směru ručiček hodinových kolem osy O kolmé na rovině papíru. Hmotu setrvačníku mysleme si koncentrovanou na kruhu poloměru r (poloměru gyračního).

Ptáme se, za kterých podmínek se může setrvačník otáčeti rychlostí ω_1 kolem osy AB ve směru naznačeném šipkou, t. j. směru ručiček hodinových při pohledu shora na osu od A k B.

Mysleme si celý setrvačník rozdělený na částice hmoty m_1 a uvažujme o silách, které musí působit na jednu z nich na př. v bodě S se nacházející.

Aby vykonávala kruhový pohyb kolem O, musí na ni působiti síla dostředivá velikosti $\frac{m_1 v^2}{r}$ (viz uč. M.-J.-N.). Tato síla jeví se napětími v materiálu prsténce a loukotí, které jej spojují s osou. Dále: V okamžiku, když se uvažovaná částice nachází v bodě S, má následek rotace kolem osy AB postupnou rychlost $\omega_1 \,.\, SS_1$, která směřuje kolmo za papír. Po uplynutí krátké doby octne se táž částice v bodě S' a její postupná rychlost kolmá za papír je pak $\omega_1 \,.\, S'S'_1$. Její postupná rychlost za papír se tedy zmenšila, což může způsobiti pouze síla směřující kolmo před papír. Nastala-li změna rychlosti

$$\omega_1 (SS_1 - S'S'_1) = \omega_1 \,.\, SS_2$$

ve velmi krátkém čase τ, můžeme oblouček SS' považovati za přímku délky $r\omega\tau$, kde ω je úhlová rychlost částice kolem osy O. Za SS_2 můžeme psáti

$$SS_2 = SS' \,.\, sin\, \vartheta,$$

kde ϑ je úhel SOC, takže

$$SS_2 = r\omega\tau \,.\, sin\, \vartheta.$$

Změna rychlosti za jedničku časovou, t. j. zrychlení (zde ovšem negativní) částice je tedy

$$\frac{\omega_1 \,.\, SS_2}{\tau} = r\omega\omega_1 sin\, \vartheta$$

a síla k papíru kolmá je dána součinem z hmoty a zrychlení jakožto

$$m_1 \omega\omega_1 r\ sin\, \vartheta. \tag{1}$$

Součin $r\ sin\, \vartheta = SS_3$, t. j. kolmici z bodu S na poloměr OC. Síla je této kolmici úměrná. Neúčinkuje tedy žádná síla na bod C, maximální síla na bod A. Úvahou obdobnou o kvadrantu AD docházíme k poznání, že rychlost částic kolmá na papír a před něj, jdoucí při otáčení kolem O, vzrůstá, takže také zde musí působiti síly směřující před papír. V kvadrantech DB a BC naopak působí síly dané součinem z $m_1 \omega \omega_1$ a kolmice na průměr CD a směřující za papír, jak se velmi snadno můžeme přesvědčiti. Každou částici S ve vzdálenosti $SS_3 = d_1$ nad průměrem CD můžeme přidružiti k $\overline{S}$ ležící v téže vzdálenosti pod ním a tak dostáváme řadu silových dvojic. Jest tudíž podmínkou, která musí býti splněna, aby prsténec rotující rychlostí ω kolem O se současně otáčel kolem průměru AB rychlostí ω_1 existence otáčecího momentu, který by točil prsténcem, kdyby byl v klidu, kolem osy CD — na obou dřívějších kolmé a to ve směru ručiček hodinových, hledíme-li směrem od C k D. Velikost tohoto otáčecího momentu se snadno zjistí. Příspěvek od částice S jest

$$m_1 \omega \omega_1 r \sin \vartheta \;.\; d_1 = \omega \omega_1 m_1 d_1^2,$$

tedy ode všech

$$\omega \omega_1 \Sigma m_1 d_1^2 = \omega \omega_1 K_1, \tag{2}$$

kde K_1 je patrně moment setrvačnosti prsténce kolem osy CD.

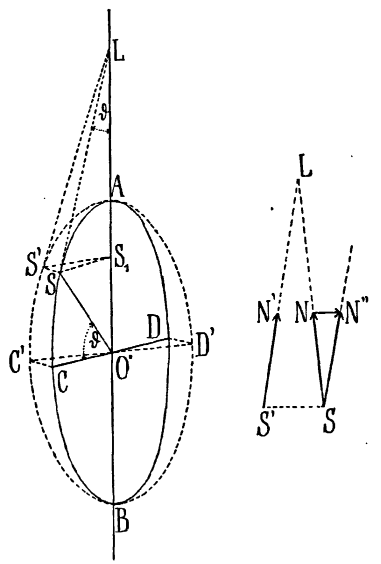
Tento otáčecí moment nekoná žádné práce: Zisk kinetické energie následkem zvýšení rychlosti některých částic jest právě vyvážen ztrátou energie jiných, jichž rychlost klesá. Všeobecně je práce vykonaná momentem otáčecím kolem jisté osy rovna součinu tohoto momentu a otočení kolem téže osy. Zde ale jest osou momentu CD a osou otočení k ní kolmé AB. Proto se práce rovná nulle, stejně jako práce dostředivé síly, kde podobně zase je síla kolmá na posunutí částice.

Nyní musíme ještě přihlédnouti k následkům té okolnosti, že se prsténec otáčí kolem osy AB. Rovina, v níž se uvažovaná částice pohybuje, se neustále mění. Obr. 14*a* znázorňujž prstenec perspektivně při pohledu z pravé strany k levé. V jistém okamžiku pohybuje se částice S směrem SL v rovině kruhu $ACBD$. V nejbližším okamžiku octne se kruh v poloze $AC'BD'$ a směr pohybu částice, kteráž nyní jest v S', bude $S'L$. Její rychlost tedy nezměnila svou velikost ωr, ale svůj směr, jak znázorňuje obr. 14*b*, kde $SN = \omega r$ značí rychlost původní, $S'N' = \omega r$ rychlost novou po krátkém otočení. Změna rychlosti jest dána vektorem NN'', který jsme obdrželi, nakreslivše SN'' rovnoběžné a co do velikosti stejné s $S'N'$. Událo-li se otočení z S do S'

za velmi krátkou dobu τ, jest zrychlení částice dáno podílem $\frac{NN''}{\tau}$ a je-li její hmota m_1, musila působiti příslušná síla $m_1 \cdot \frac{NN''}{\tau}$.

Vypočtěme změnu rychlosti NN''. Patrně jest $NN'' = SN \times$ úhel NSN'' v obloukové míře. Ale $\sphericalangle NSN'' = \sphericalangle SLS'$ a tento jest dle obr. 14*a*, kde $SL \perp SO$

$$\sphericalangle SLS' = \frac{SS'}{SL} = \frac{\omega_1 \tau \cdot SS_1}{SO \cdot cotg\, \vartheta} = \frac{\omega_1 \tau \cdot r \cdot cos\, \vartheta}{r \cdot cotg\, \vartheta} = \omega_1 \tau\, sin\, \vartheta.$$



Obr. 14.

Jest tudíž síla nutná k změně roviny, v níž se částice pohybuje, rovna

$$m_1 \cdot \frac{NN'}{\tau} = m_1 \frac{SN \cdot \omega_1 \tau\, sin\, \vartheta}{\tau} = m_1 \omega \omega_1 r\, sin\, \vartheta.$$

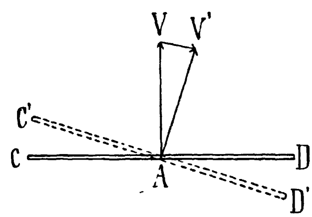
Tato síla jest tedy stejně veliká jako dříve vyšetřovaná síla (1), která mění velikost rychlosti částice kolem osy *AB*. Celková síla na částici působící jest tedy dvakráte větší síly (1) a celkový otáčecí moment, který musí působiti, aby se kolem *O* rotující prsténec otáčel stejnoměrně kolem průměru AB, jest dvojnásobný dříve vypočteného (2), čili roven

$$2\dot{\omega}\omega_1 K_1 = \omega\omega_1 K,$$

kde $K = 2K_1$ jest moment setrvačnosti kolem osy O, kterýž jakožto polárný jest u kruhového prsténce roven dvojnásobnému ekvatoreálnému (§ 5., poznámka).

14. Určení přímé.

Otáčecí moment, jehož určení jsme provedli názornou elementární úvahou, v níž jsme užili pouze základní rovnice pro pohyb postupný, mohli jsme vypočítati přímo ze základní rovnice pro pohyb otáčivý. Uvědomme si znovu problém, o který jde na základě obr. 15., který znázorňuje pohled shora. Setrvačník



Obr. 15.

k papíru kolmý otáčí se úhlovou rychlostí ω kolem osy v rovině papíru vertikálně pod A ležící, takže jeho částice putují nad papírem z bodu C přes A k D. Hledáme směr a velikost otáčecího momentu, který musí působiti, aby se setrvačník otáčel stálou úhlovou rychlostí ω_1 kolem osy AB, k papíru kolmé, takže jeho poloha po krátkém čase τ přejde z polohy CAD do $C'AD'$.

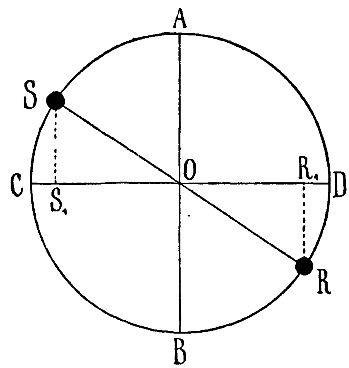
Znázorníme-li si dle § 11. původní moment hybnosti (otáčivý impuls) vektorem AV, jehož velikost je $K\omega$, má dle požadavku úlohy za dobu τ přejíti v nový AV' téže velikosti $K\omega$, který s původním svírá úhel $VAV' = \omega_1\tau$. Změna momentu hybnosti jest tedy dána vektorem $VV' = AV \,.\, \omega_1\tau = K\omega\omega_1\tau$.

Změna jeho za jedničku časovou dává dle základní rovnice pro pohyb otáčivý potřebný moment otáčecí, kterýž tedy jest

$$\frac{K\omega\omega_1\tau}{\tau} = K\omega\omega_1$$

a točí směrem ručiček hodinových, díváme-li se směrem VV', nebo což jest totéž, směrem průměru CD. Tak jsme došli okamžitě k témuž výsledku jako úvahou dřívější.

Snadno se přesvědčíme, že úvaha § 13. není vždy zbytečnou. Představme si anomální typ setrvačníku, sestávající ze dvou těžkých koulí S a R hmoty m_1, upevněných na nehmotné tyči SR, kteréž se otáčejí rychlostí ω ve směru hodinových ručiček kolem



Obr. 16.

osy k papíru kolmé a těžištěm O procházející. Má-li se tomuto setrvačníku uděliti úhlová rychlost ω_1 kolem osy AB, musí dle § 13. působit na S síla $2m_1\omega\omega_1 \,.\, SS_1$ ze zadu před papír jdoucí, na R pak síla stejně veliká směru opačného. Okamžitý otáčecí moment k docílení ω_1 potřebný je tedy dán výrazem

$$4m_1\omega\omega_1 \,.\, (SS_1)^2.$$

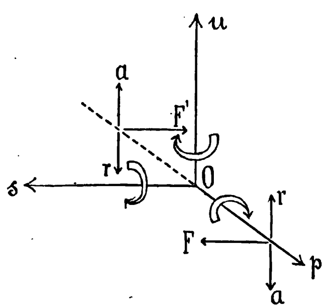
Není konstantní, nýbrž maximální $4m_1\omega\omega_1 r^2$, jsou-li koule v A a B minimální, rovný nulle, jsou-li v C a D.

Kdybychom užili přímé úvahy dle § 14., našli bychom pro otáčecí moment hodnotu $2m_1\omega\omega_1 r^2$, kteráž jest pouze střední hodnotou proměnného otáčecího momentu, kterého vskutku jest potřebí.

O těchto vlastnostech anomálního setrvačníku můžeme se snadno přesvědčit pokusem, snažíme-li se za různých poloh koulí rotační rovinu otáčeti.

15. Pravidlo.

Směr, v němž musí točiti otáčecí dvojice, lze si snadno pamatovati dle následujícího pravidla pravé ruky: Držme palec (p), ukazováček (u) a střední prst (s) pravé ruky tak, že tvoří

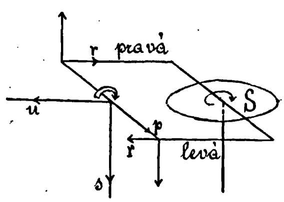


Obr. 17.

navzájem přibližně pravé úhly (obr. 17., kde p vystupuje před rovinu papíru). Otáčí-li se setrvačník kolem palce (na který se díváme stejně jako na ostatní prsty směrem od jeho konce ke kořenu) ve směru hodinových ručiček a má-li se mu současně sděliti otáčení kolem ukazováčku ve směru ručiček, musí působiti otáčecí moment kolem středního prstu jakožto osy také směrem ručiček, t. j. na osu Op musí působiti síla směrem shora dolů na osu Op' (za papírem) směrem zdola nahoru (šipky a). Osa pOp' sama tlačí směrem opačným, totiž vpředu nahoru, vzadu dolů (šipky r), působí tedy reakčním otáčivým momentem opačného směru, ale téže velikosti $K\omega\omega_1$. Máme-li setrvačník rotující kolem horizontální osy pp' (ve směru ručiček) a chceme-li jej dvojicí sil F a F' momentu P donutiti k otočení kolem vertikální osy u (směrem ručiček), tu — může-li se osa pp' otáčeti kolem horizontální osy s — nastane otáčení kolem této, k u kolmé osy úhlovou rychlostí $\omega_1 = \frac{P}{K\omega}$ a směrem šipek r. Říkáme, že setrvačník vykonává *precessní pohyb* kolem osy s.

16. **Pokusy.**

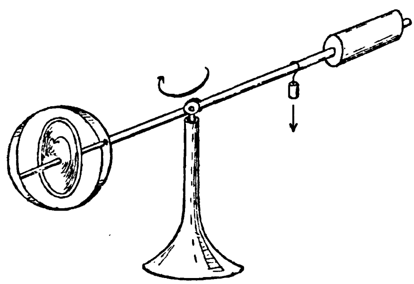
Dle dosavadních vývodů a pravidla uvedeného v předchozím paragrafu lze vysvětliti mnohé pokusy se setrvačníky, jako mimo jiné ty, kteréž jsou uvedeny v učebnici Mašek-Jeništa-Nachtikalově. Zvláště na přístroji Bohnenbergrově lze dobře zmíněná pravidla potvrditi. Dodatkem uvádíme pokus, který velmi přesvědčivě nás poučuje o reakční dvojici rr.



Obr. 18.

Je k němu potřebí stoličky S, na níž usedne experimentující, která se dá volně otáčeti kolem vertikální osy, a těžkého setrvačníku na př. osou opatřeného kola z bicyklu, jehož gumový ráfek pro docílení velikého momentu setrvačnosti se nahradí těžkou olověnou trubicí. Roztočme setrvačník, který v kuličkových ložiskách doznává poměrně malého tření, a držme jeho osu v horizontálně před sebe natažených rukách, jak znázorňuje schematický obrazec 18. Otočíme-li osu setrvačníku prudce kolem horizontální osy u, zvednuvše pravou ruku a sníživše levou, vzniká precesní dvojice rr tak veliká, že celým experimentátorem i se stoličkou otočí směrem, který snadno plyne dle pravidla § 25. a obr. 17.

V malém koná se obdobný pokus gyrostatem Fesselovým, schem. znázorněným na obr. 19. Setrvačník jest upevněn na



Obr. 19.

konci tyče, na jejímž druhém konci jej vyvažuje protizávaží. Jest v horizontální i vertikální rovině otáčivý kolem osy O. Roztočí-li se a dá-li se působiti buď na jedné nebo druhé straně tyče přívažku P, který hledí jej otáčeti kolem osy horizontální na tyči kolmé, počne obíhati kolem O v rovině horizontální.

Astronomická zpráva na duben, květen a červen 1915.

Veškerá časová udání vztahují se na meridián a čas středoevropský.

Slunce přechází v dubnu ze souhvězdí Ryb do souhvězdí Skopce, v květnu do souhvězdí Býka a v červnu odtud do souhvězdí Blíženců.