Vincenc Jarolímek
O určité ploše třetí třídy

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 142--151

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124099

# O určité ploše třetí třídy.

Sepsal prof. **Vinc. Jarolímek.**

Předmětem naší úvahy jest plocha třetí třídy $\varphi^{III}$, která v soustavě souřadnic rovinových má nejprostší rovnici

$$u^3 + v^3 + w^3 = \alpha^3. \tag{1}$$

Každým bodem v prostoru, jehož rovnice jest obecně

$$mu + nv + pw = 1,$$

prochází patrně $\infty^1$ rovin tečných ku $\varphi^{III}$, jež obalují kuželovou plochu třetí třídy. V této příčině zvláštním jest bod $r$ (obr. 1.), jehož rovnice

$$r \equiv u + v + w - \alpha = 0. \tag{2}$$

Eliminací souřadnice $w$ z rovnic (1) a (2) obdržíme

$$(u + v)\left[\alpha^2 - (u + v)\,\alpha + uv\right] = 0$$

čili

$$(u + v)(\alpha - u)(\alpha - v) = 0,$$

posléze

$$(u - \alpha)(v - \alpha)(w - \alpha) = 0. \tag{3}$$

Rovnici této lze vyhověti způsobem trojím. Rovnice

$$u - \alpha = 0$$

přísluší bodu $c_1$ na ose $X$, jehož vzdálenost od počátku souřadnic

$$\overline{oc_1} = -\frac{1}{\alpha} = a,$$

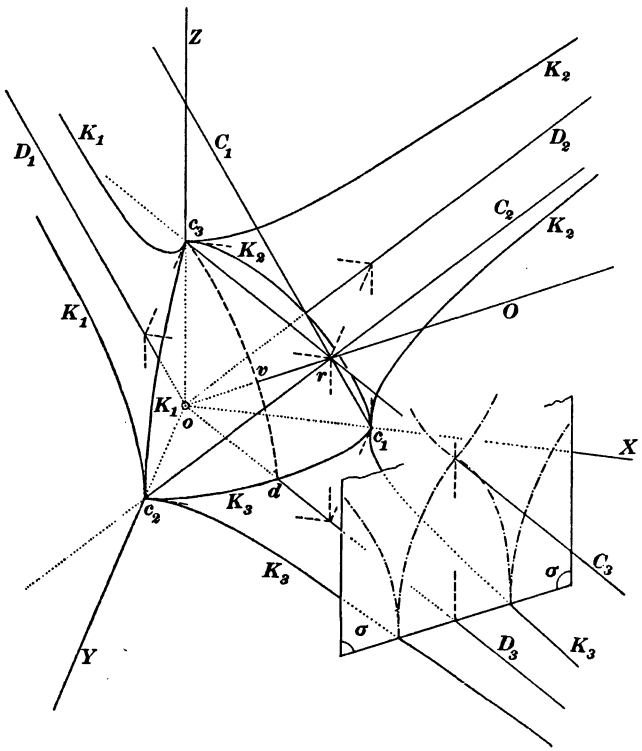
rovnice $v - \alpha = 0$ bodu $c_2$ na ose $Y$, jehož $\overline{oc_2} = a$, posléze rovnice $w - \alpha = 0$ bodu $c_3$ na ose $Z$, jehož $\overline{oc_3} = a$.

Svazek tečných rovin o středu $r$ rozpadá se tedy ve tři rovinové svazky třídy prvé na osách $\overline{rc_1} \equiv C_1$ (obr. 1), $\overline{rc_2} \equiv C_2$, $\overline{rc_3} \equiv C_3$. Tyto tři přímky jsou tudíž površkami plochy $\varphi^{III}$, a průsečík jejich $r$ *hrotem* plochy. Později se ukáže, že hrany plochy $C_1$, $C_2$, $C_3$ jsou přímky dvojné, hrot $r$ trojnásobným bodem na ploše.

Transformací rovnice (1) v soustavu souřadnic bodových obdržíme, jakožto obalovou plochu roviny, jejíž souřadnice $u$, $v$, $w$ hoví rovnici (1), rovnici plochy $\varphi^{\mathrm{III}}$ ve formě

$$x^{\frac{3}{2}} \pm y^{\frac{3}{2}} \pm z^{\frac{3}{2}} = \pm a^{\frac{3}{2}}, \tag{5}$$

kdež $a = -\frac{1}{\alpha}$ jest konstantní délka ($\overline{oc_1} = a$, obr. 1.), parametr plochy.




Obr. 1.

Usměrněním rovnice (5) vyjde

$$\begin{aligned} & x^{12} + y^{12} + z^{12} - 4(x^3 + y^3) z^9 - 4(x^3 + z^3) y^9 - 4(y^3 + z^3) x^9 \\ & + 6(x^6 y^6 + x^6 z^6 + y^6 z^6) + 4x^3 y^3 z^3 (x^3 + y^3 + z^3) \\ & + 4a^3 (x^6 y^3 + x^6 z^3 + x^3 y^6 + x^3 z^6 + y^6 z^3 + y^3 z^6) \\ & - 4a^3 (x^9 + y^9 + z^9) - 40 a^3 x^3 y^3 z^3 + 6a^6 (x^6 + y^6 + z^6) \\ & + 4a^6 (x^3 y^3 + x^3 z^3 + y^3 z^3) - 4a^9 (x^3 + y^3 + z^3) + a^{12} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Jest tedy plocha $\varphi^{III}$ řádu *dvanáctého.* [1])

Substitucí $z = a$ do rovnice (6) dostaneme rovnici řezu plochy $\varphi^{III}$ rovinou $\varrho_1 \parallel (XY)$ ve vzdálenosti $a$; po redukci a náležité úpravě nabude tato rovnice tvaru

$$(x^3 - y^3)^2 . [(x^3 - y^3)^2 - 8a^3(x^3 + y^3) + 16a^6] = 0. \quad (7)$$

Tento řez rozpadá se tedy v křivku řádu šestého a v šest přímek, totiž: ve *dvojnou reálnou* přímku $C_3$, jejíž rovnice jsou $y = x$, $z = a$, a ve dvě dvojné přímky imaginárné, jichž rovnice $y = x\sqrt[3]{1}$, $z = a$, kdež

$$\sqrt[3]{1} = \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \text{ nebo } \tfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$$

Analogicky dají roviny $\varrho_2 \equiv y - a = 0$, $\varrho_3 \equiv x - a = 0$ řezy shodné s (7); rovina $\varrho_2$ obsahuje druhou dvojnou reálnou přímku $C_2 \equiv x - z = 0$, $y = a$, a rovina $\varrho_3$ třetí $C_3 \equiv y - z = 0$, $x = a$. Společný průsečík $r$ těchto tří reálných povrchových přímek, hrot plochy, má souřadnice $x = y = z = a$.

Z rovnice plochy (5) přímo vysvítá, že všecky reálné body plochy mají souřadnice kladné, ježto negativná hodnota jedné z nich činí příslušný člen rovnice (5) imaginárným, neboť exponent jeho $= \frac{3}{2}$. Reálný díl plochy $\varphi^{III}$ obsažen jest tedy cele v prvém oktantu prostoru, děleného rovinami souřadnými. Výjimku činí toliko reálné přímky $C_1$, $C_2$, $C_3$, jež v celé své délce ploše náležejí, vnikajíce i do sousedních prostorů, resp. III., VIII. a VI., a tvoříce tam *isolované* površky plochy. Vskutku, udělíme-li *dvěma* souřadnicím touž hodnotu negativnou, na př. $x = y = -p$, zruší se v rovnici (5)

$$x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$$

---

[1]) O reciproké ploše řádu třetího a třídy dvanácté, jejíž rovnice v soustavě souřadnic bodových jest

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3$$

a v soustavě souřadnic rovinových

$$u^{\frac{3}{2}} + v^{\frac{3}{2}} + w^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}},$$

autor pojednal ve výroční zprávě c. k. první české reálky pražské za rok 1901—2.

oba imaginárné členy $\sqrt{-p^3}, -\sqrt{-p^3}$, načež $z = a$, t. j. bod ten připadá na přímku $C_3$.

Přímku $\overline{or} \equiv O$, jejíž rovnice $x = y = z$, jmenujme *osou* plochy $\varphi^{III}$. Roviny souřadné omezují spolu s rovinami $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ krychli (obr. 1.), jejíž hrana $= a$, úhlopříčka pak $\overline{or}$ jest osou $O$; úhlopříčky v stěnách krychle jsou $\overline{c_1 r} \equiv C_1$, $\overline{c_2 r} \equiv C_2$, $\overline{c_3 r} \equiv C_3$. Z okolnosti, že rovnice (5) se nemění, zaměníme-li v ní kterékoli dvě souřadnice spolu, jde na jevo, že plocha $\varphi^{III}$ dělí se každou z rovin $(XO)$, $(YO)$, $(ZO)$ ve dvě orthogonálně symmetrické části.

Průsečíky osy $O$ s plochou $\varphi^{III}$ dostaneme řešením rovnic $x = y = z$ a (6). Výsledek jest

$$9x^{12} - 28a^3x^9 + 30a^6x^6 - 12a^9x^3 + a^{12} = 0,$$

čili

$$(9x^3 - a^3) \,.\, (x^3 - a^3)^3 = 0.$$

Rovnice $9x^3 - a^3 = 0$ dává tři kořeny $x = \frac{a}{\sqrt[3]{9}}$, z nichž reálný svědčí vrcholu plochy $v$ (obr. 1.), jehož vzdálenost od počátku

$$\overline{ov} = x\sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt[6]{3}} = 0{\cdot}8327a;$$

ostatní dva jsou pomyslné sdružené.

Rovnice pak

$$(x^3 - a^3)^3 = 0$$

má 9 kořenů $=$

$$x = a\sqrt[3]{1},$$

z nichž tři o reálné hodnotě $x = a$ svědčí hrotu $r$, jenž tudíž jeví se býti trojnásobným (vzdálenost jeho od počátku $\overline{or} = a\sqrt{3}$); ostatní náležejí dvěma trojnásobným bodům imaginárným, spolu sdruženým. Celkem tedy osa $O$ seče plochu $\varphi^{III}$ ve dvanácti bodech, z nichž jeden jest reálný jednoduchý, jeden reálný trojnásobný, dva jsou imaginárné spolu sdružené, a dva trojnásobné imaginárné, tolikéž sdružené.

Pozoruhodny jsou dále břitké křivé hrany $K_1$, $K_2$, $K_3$, jimiž se plocha opírá o roviny souřadné (obr. 1.). V rovině $(XY)$

má tato hrana $K_3$ rovnici, která z rovnice (6) plyne substitucí $z = 0$ a po náležité úpravě nabude tvaru

$$K_3 \equiv [(x^3 - y^3)^2 - 2a^3(x^3 + y^3) + a^6]^2 = 0. \qquad (9)$$

Křivka $K_3$ jest tedy *dvojná*, řádu šestého, která na osách $X$, $Y$ má po jednom bodu úvratu $c_1$, $c_2$. Rovnice její

$$x^{\frac{3}{2}} \pm y^{\frac{3}{2}} = \pm a^{\frac{3}{2}} \qquad (10)$$

plynoucí z rovnice (5) svědčí o symmetrii její ku přímce

$$D_3 \equiv x - y = 0,$$

jež zároveň jest asymptotou křivky. Z rovnice (11) jde

$$y = \sqrt[3]{(\sqrt{a^3} \pm \sqrt{x^3})^2};$$

na př. pro $a = 10$ jest

$$y = \sqrt[3]{(31{\cdot}62 \pm \sqrt{x^3})^2},$$

dle kteréžto rovnice lze souřadnice jednotlivých bodů vypočítati a tyto konstruovati.

Poloměr křivosti pro bod $(x_1, y_1)$ křivky $K_3$ jest

$$R = 2\sqrt{x_1 y_1 \left(\frac{x_1 + y_1}{a}\right)^3},$$

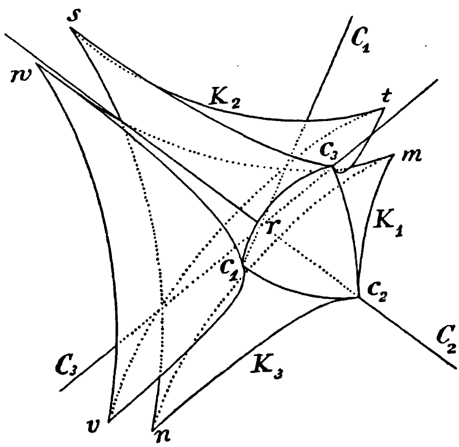
tedy pro vrchol křivky $d$ (obr. 1.) v průsečíku $(DK_3)$, jehož

$$x_1 = y_1 = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}, \quad \overline{od} = \frac{a}{\sqrt[6]{2}}, \text{ jest}$$

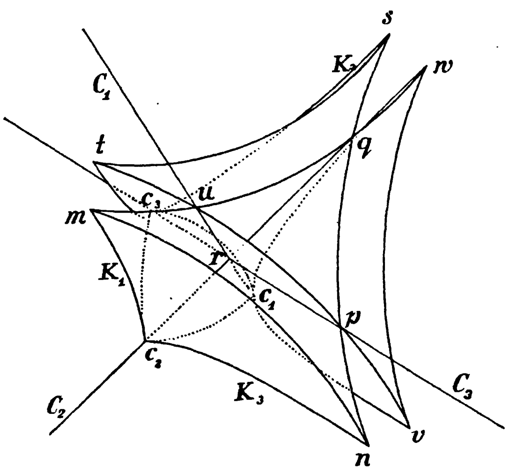
$$R = \frac{2a}{\sqrt[6]{2}} = 2 \, . \, \overline{od}.$$

Shodné dvojné hrany úvratu $K_2$, $K_1$ má plocha $\varphi^{\mathrm{III}}$ v rovinách $(XZ)$ a $(YZ)$. Jak břitkou jest každá tato hrana, na př. $K_3$, jest patrno v obr. 1. (na pravo) z proniku plochy rovinou $\sigma \perp D_3$.

Část plochy mezi $K_1$, $K_2$, $K_3$ a bodem $r$ — jmenujme ji „jádrem“ — plochy má tvar trojbokého jehlanu (obr. 2.) o vrcholu $r$, jehož pobočné hrany jsou (obr. 1.) $\overline{c_1 r}$, $\overline{c_2 r}$, $\overline{c_3 r}$, podstavou jest plocha konkávní, tvaru trojúhelníka $c_1 c_2 c_3$ skoro sférického, podobajíc se osmině plochy kulové (poněkud sploštěné při vrcholu plochy $v$), poboční stěny pak jsou mírně konvexní. Body $c_1$, $c_2$, $c_3$ jsou (mimo $r$) další tři hroty plochy $\varphi^{III}$.




Obr. 2.



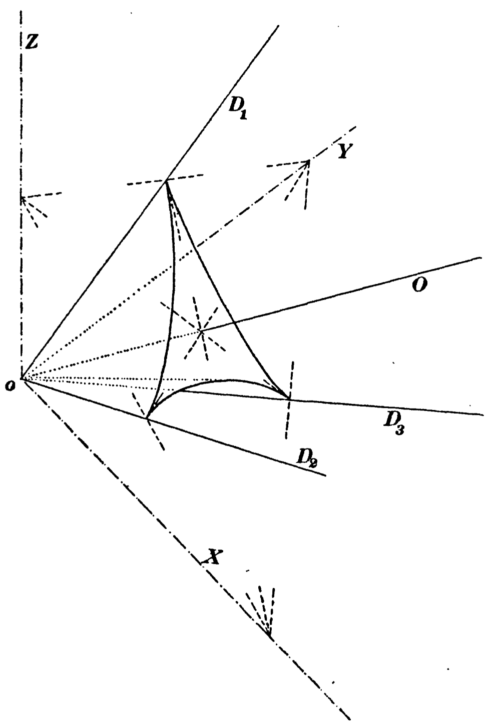

Obr. 3.

Na obr. 2. a 3. spatřujeme část plochy $\varphi^{III}$, která ve směrech $+X$, $Y$, $Z$, $O$ prostírá se do nekonečna (v měřítku

1 : 2 proti obr. 1.), kdež omezena jest pronikem s rovinou

$$x + y + z = 6a$$

kolmou na osu $O$ (v obr. 3. otočena do polohy, kdež pronik ten *mnpqstupvwm* jest viditelný).




Obr. 4.

Rovnice *asymptotického kužele* plochy $\varphi^{III}$ jest

$$x^{\frac{3}{2}} \pm y^{\frac{3}{2}} \pm z^{\frac{3}{2}} = 0, \qquad (11)$$

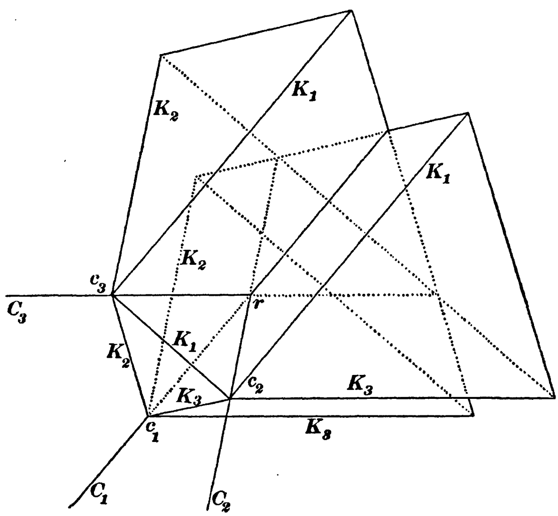
čili

$$(x^3 - y^3)^2 - 2\,(x^3 + y^3)\,z^3 + z^6 = 0. \qquad (12)$$

Kužel jest tedy řádu šestého. Ze srovnání rovnic (11) a (9) jde na jevo, že pronik kužele s rovinou $z = a$ je shodný s hranou $K_3$ plochy $\varphi^{III}$ na rovině $(XY)$, promítaje se do ní směrem osy $Z$. Asymptotický kužel má vrchol v počátku souřadnic a v každé rovině souřadné jednu přímou hranu vratu (obr. 1. a 4.):

$$D_3 \equiv z = o, \quad x = y,$$
$$D_2 \equiv y = o, \quad x = z,$$
$$D_1 \equiv x = o, \quad y = z;$$

pronik pak kužele s rovinou kolmou na osu $O$ má tvar trojhroté asteroidy (obr. 4.), jejíž hroty jsou na hranách $D_1$, $D_2$, $D_3$. Kuželem tím promítá se z počátku souřadnic $o$ úběžná křivka plochy $\varphi^{\mathrm{III}}$.

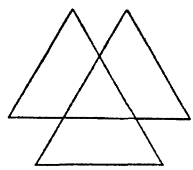



Obr. 5.

*Dodatek.* Plocha $n$-té třídy

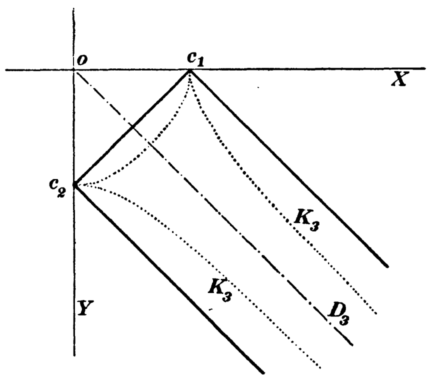
$$u^n + v^n + w^n = \alpha^n \tag{13}$$

pro *lichý* exponent $n > 3$ má tvar obdobný, ale všecky obliny její při rostoucím $n$ mírníce svou křivost, blíží se rovinám. Pro $\lim n = \infty$ plocha degeneruje ve tvar složený ze sedmi rovin (obr. 5.). Jádro plochy promění se v pravidelný čtyřstěn $c_1 c_2 c_3 r$; oblina $\widehat{c_1 v c_2 c_3}$ (obr. 1.) přejde v rovinný $\triangle c_1 c_2 c_3$ (obr. 5.). Ostatní obliny zvrhnou se v roviny $(C_1 C_2)$, $(C_1 C_3)$, $(C_2 C_3)$, t. j. v prodloužené za vrchol $r$ pobočné stěny čtyřstěnu. Pronik tohoto tvaru s rovinou $\perp O$ podává obr. 6. Hrany plochy v každé rovině souřadné (na př. $K_3 \equiv u^n + v^n - \alpha^n = o$,



Obr. 6.

obr. 7.) blíží se pro *lim* $n = \infty$ obvodu trojúhelníka, jehož oba úhly při základně $\overline{c_1 c_2}$ jsou pravé, vrchol pak v nekonečnu na $D_3$.




Obr. 7.

Naproti tomu má plocha $n$-té třídy (rovnice 13.) pro *sudé* $n$ tvar podstatně jiný. Podobá se poněkud kouli o středu $o$ a poloměru $a = -\frac{1}{\alpha}$, jejíž průměry však, obsažené v ose $O$ a v osách ostatních oktantů ($x = \pm y = \pm z$) jsou $< 2a$, tak že na koncích těchto průměrů koule je poněkud sploštělá, až posléze pro *lim* $n = \infty$ každý oktant plochy kulové přejde v rovnostranný trojúhelník, a limita plochy (13) je totožna s povrchem pravidelného *oktaedru*, jehož střed jest $o$ a tři vrcholy $c_1$, $c_2$, $c_3$.

*Reciprokým* k tomuto oktaedru je pravidelný *hexaedr* čili krychle o středu $o$ a vrcholu $r$ (hrany $= 2a$ jsou $\| X, Y, Z$), jehož povrch je limitou plochy

$$x^n + y^n + z^n = a^n$$

(v souřadnicích bodových) pro *sudé* $n$ (viz pojednání na str. 144. dole pod čarou uvedené).

Naproti tomu limita téže plochy pro *liché* a bez konce vzrůstající $n$ skládá se z bočných stěn pravidelného čtyřstěnu a z nekonečné roviny jeho základny, z níž však tato základna jest vyňata. — Ve všech uvažovaných případech se ovšem předpokládá, že exponent $n$ je číslo *celé*.

---

# O vytvoření geodetických křivek na rotačních plochách centrálních druhého stupně.

B. Bydžovský.

Vycházeje ze zajímavého výsledku G. H. Halphenova ukázal jsem v tomto Časopisu [1]), jak lze křivky vzniklé promítnutím geodetických křivek rotačních ellipsoidů do roviny rovníku vytvořiti kotálením ellipsy, při němž buď střed ellipsy je pevný (případ ellipsoidu protáhlého; výsledek Halphenův), nebo vzdálenost tohoto středu od středu plochy, měřená kolmo k rovině ellipsy, je stálá (případ ellipsoidu sploštělého). Pokládáme-li tuto stálou vzdálenost za výšku přímého kužele majícího ellipsu za základnu, běží tu – v druhém případě — o valení kužele po rovině rovníku.

Je-li $r$ průvodič kotálející se ellipsy, $\varrho$ průvodič projekce geodetiky, je v obou případech rozdíl $r^2 - \varrho^2$ veličina stálá; v prvém případě kladná, v druhém záporná.

Odvozením uvedených vět je nejen nalezena zajímavá vlastnost geodetických křivek rotačních ellipsoidů, nýbrž lze na základě jich učiniti si velmi snadno představu o jejich průběhu. Pokládal jsem proto za zajímavé zkoumati, zdali i pro ostatní (centrální) rotační plochy druhého stupně lze nalézti podobné názorné věty. Výsledek svých úvah předkládám v tomto článku.

---

[1]) »O vytvoření geodetických křivek na rotačních ellipsoidech«; roč. XLI. str. 319—330 (číslo Koláčkovo).