Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Simandl

Příspěvek ku elliptickо-hyperbolickému svazku kuželoseček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 199--203

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124088

Příspěvek ku elipticko-hyperbolickému svazku kuželoseček.

Napsal Dr. **Václav Simandl**, assistent české techniky v Brně.

V následujícím ukážeme pomocí určitého kužele stupně druhého, že v elipticko-hyperbolickém svazku kuželoseček poměr délek os ellipsy ve svazku nejvíce se blížící kružnici rovná se poměru délek os hyperboly, na níž leží středy kuželoseček svazku. Zároveň ukážeme, že v daném svazku leží dvě ellipsy, které mají daný poměr os, a ukážeme jejich konstrukci pomocí onoho kužele stupně druhého. Kužel, jejž zde upotřebíme, jest, jak uvidíme, řídícím kuželem plochy, na které leží osy rotačních válců proložených ellipsami svazku.

I.

Poměr délek os ellipsy jest charakterisován úhlem os obou rotačních válců danou ellipsou proložených. Osy ty obdržíme, vedeme-li asymptotami e_1, e_2 dané ellipsy roviny minimální. Asymptotou e_1 procházejtež minimální roviny ε_1, ε'_1 a asymptotou e_2 minimální roviny ε_2, ε'_2. Z těchto čtyř minimálních rovin jsou vždy dva páry konjugované. Buďte to páry $\varepsilon_1\varepsilon_2$ a $\varepsilon'_1\varepsilon'_2$. I máme reálné průsečnice $o \equiv (\varepsilon_1\varepsilon_2)$ a $o' \equiv (\varepsilon'_1\varepsilon'_2)$ a to jsou osy rotačních válců ellipsou proložených. Jsou totiž úběžné body O_∞, O'_∞ těchto os středy nullových kružnic procházejících úběžnými body asymptot. A takové nullové kružnice mají rotační válce danou ellipsou proložené vytínati z roviny nekonečně vzdálené.

Mysleme si nějakým bodem O v rovině svazku vedeny rovnoběžky s asymptotami všech kuželoseček svazku. Ty budou tvořiti patrně involuci a samodružnými paprsky budou rovnoběžky s asymptotami hyperboly středů. Prokládejme nyní páry této involuce roviny minimální a hledejme geometrické místo os o, o', což bude jistý kužel, závislý pouze na úhlu asymptot a_1, a_2 hyperboly středů. Patrno, že kužel ten jest též řídícím kuželem plochy, na které leží osy rotačních válců proložených ellipsami svazku. Položme vrchol jeho do počátku O systému souřadného a buď O zároveň středem hyperboly středů a osy této hyperboly splývejtež s osami souřadnými x, y. Buďte dále délky poloos hlavní a a vedlejší imaginární b.

Jest potom analytické vyjádření libovolného páru involuce paprskové, jejímiž samodružnými elementy jsou asymptoty hyperboly středů následující:

$$y = mx, \quad y = nx,$$

kde

$$m \cdot n = \frac{b^2}{a^2}.$$

Pro rovnoběžky s asymptotami ellips ve svazku jsou patrně m, n hodnoty konjugovaně imaginární. Rovnice rovin minimálních tímto párem vedených jsou:

$$(mx - y)^2 + (m^2 + 1) z^2 = 0$$
$$(nx - y)^2 + (n^2 + 1) z^2 = 0.$$

Eliminujeme-li z těchto rovnic m, n za supposice

$$m \cdot n = \frac{b^2}{a^2},$$

dostaneme již rovnici hledaného kužele.

Pišme ty rovnice ve tvaru:

$$m (x^2 + z^2) - 2xy + \frac{y^2 + z^2}{m} = 0,$$

$$n (x^2 + z^2) - 2xy + \frac{y^2 + z^2}{n} = 0.$$

Odečtením vychází:

$$y^2 + z^2 + (x^2 + z^2) \frac{m - n}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = 0.$$

Čili vzhledem ku supposici o m, n:

$$b^2 (x^2 + z^2) = a^2 (y^2 + z^2),$$

což jest již rovnice kužele řídícího. Vidíme, že v případě $a = b$ kužel ten degeneruje ve dvě kolmé roviny.

Z rovnice té vyplývá již konstrukce kužele. K sestrojení stačí sestrojiti dva hlavní reálné osové řezy. Osový řez v rovině

$z = 0$ již máme, jsou to asymptoty hyperboly středů. Dle toho, je-li $b \gtrless a$, sestrojujeme druhý řez s rovinou $x = 0$ nebo $y = 0$. Předpokládejme případ prvý. Tu máme

$$\frac{z}{y} = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} = tg\, \psi,$$

je-li 2ψ úhel tohoto osového řezu.

Můžeme též psáti:

$$sin\, \psi = \frac{a}{b}.$$

I lze dle toho snadno obě povrchové přímky osového řezu $x = 0$ sestrojiti a tím jest již kužel řídící sestrojen. Označíme-li si menší úhel, který svírají asymptoty 2φ, tu za hoření supposice $b > a$, jest

$$tg\, \varphi = \frac{a}{b},$$

a slovy vyjádřeno:

Sinus a tangenta polovičních úhlů, jež svírají povrchové přímky v obou reálných osových řezech kužele řídícího, se sobě rovnají.

Řez rovinou $x = 0$ vytíná nám z kužele řídícího dvě přímky, jež udávají patrně směry os rotačních válců proložených ellipsou, jež se nejvíce blíží kružnici. Ježto pak $sin\, \psi$ udává poměr délek jejich os a jelikož jest to zároveň poměr délek os hyperboly středů $\left(sin\, \psi = \frac{a}{b}\right)$, můžeme vysloviti větu:

Poměr délek os ellipsy ve svazku kuželoseček nejvíce se blížící kružnici rovná se poměru délek os hyperboly středů.

Věta ta obsahuje co specielní případ větu známou, že obsahuje-li svazek kuželoseček kružnici, jest geometrické místo středů kuželoseček rovnostranná hyperbola.

Zároveň vidíme, *že osy ellipsy nejvíce se blížící kružnici jsou rovnoběžny s osami hyperboly středů.* A dále vzhledem ku kuželi našemu můžeme vysloviti věty:

V daném svazku existují dvě ellipsy mající daný poměr délek os neboli danou numerickou výstřednost.

Tato numerická výstřednost musí býti ovšem větší než numerická výstřednost ellipsy nejvíce se blížící kružnici. *Hlavní* *pak osy ellips ve svazku majících tutéž numerickou výstřednost svírají s hlavní osou hyperboly středů tytéž úhly směru opačného.*

Dlužno poznamenati, že Steiner odvodil větu, že ellipsa ve svazku kuželoseček nejvíce se blížící kružnici má stejné sdružené průměry rovnoběžné s asymptotami hyperboly středů.*) Věta ta shoduje se s větou, kterou jsme zde též odvodili.

II.

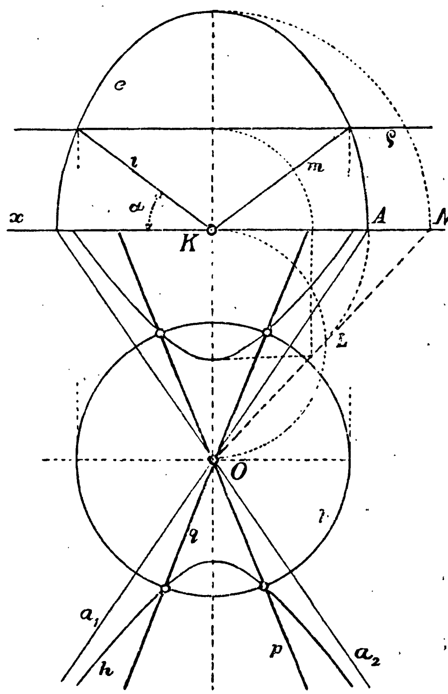
Jest sestrojiti v daném elliptickо-hyperbolickém svazku kuželoseček ellipsy mající danou numerickou výstřednost nebo daný poměr délek os. Tento poměr jest vyjádřen tangentou určitého úhlu α. Jest nám tedy vyhledati na řídícím kuželi přímky, které svírají s průmětnou úhel α. Pravoúhlé průměty těchto přímek na rovinu svazku udávají již směry hlavních os hledaných ellips.

Asymptoty hyperboly středů a_1, a_2 položme do půdorysny tak, aby s osou x (viz obr.) svíraly stejné úhly. Do průsečíku O těchto asymptot položme vrchol kužele řídícího a sestrojme jeho průsek e s nárysnou, jehož jen hoření polovici budeme rýsovati. Velkou osu ellipsy e omezíme dle věty dříve dokázané o úhlech hlavních osových řezů. Jeden osový řez máme, jsou to asymptoty a_1, a_2, jedná se o sestrojení druhého. Ten sestrojíme ve sklopení. S bodu O spustíme kolmici na osu x. Ta nám ji protne v bodě K. Sestrojme nad OK polokružnici. Tuto polokružnici protne kružnice bodem A procházející a mající za střed bod K v bodě L. Spojnice OL protne osu x v bodě M. Úsečka $\overline{KM}$ jest již velkou poloosou ellipsy e, neboť z konstrukce patrno, že $tg \sphericalangle KOA = sin \sphericalangle KOM$.

Abychom nalezli přímky svírající s půdorysnou úhel α, sestrojíme si rotační kužel těchto přímek a hledáme jeho průsek s kuželem řídícím. Nárys tohoto kužele tvoří přímky l, m. Užijme libovolné roviny ϱ rovnoběžné s první průmětnou. V našem obrazci vedli jsme ji průsečíky l, m s ellipsou e. Ta nám protíná kužel rotační v kružnici, jejíž první průmět k odvodíme z nárysu. Kužel řídící protíná v hyperbole, jejíž první obraz h

*) Jacob Steiners Gesammelte Werke I. (pag. 123.).

snadno odvodíme. Asymptoty má tato hyperbola společné s hyperbolou středů. Sestrojení čtyř prusečíků dvou souosých kuželoseček k a h jest úloha kvadratická a lze je přesně sestrojiti známým způsobem. Dva a dva leží vždy na téže přímce procházející středem a přímky tyto p, q udávají již směry os obou hledaných ellips.



I máme úlohu sestrojiti kuželosečku danou 4 body a směrem osy. Směry os a směry asymptot a_1, a_2 tvoří dva páry involuce elliptické, jejíž samodružné paprsky nám udávají imaginární body ellipsy v nekonečnu. I lze známým způsobem, kdy kuželosečka dána 3 reálnými a párem konjugovaně imaginárných bodů, tuto sestrojiti.