Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

O racionálných křivkách čtvrtého stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 1, 9--21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124077

O racionálných křivkách čtvrtého stupně.

Napsal

Dr. K. Petr,
professor II. gymnasia v Brně.

I.

Budeme o racionálných křivkách čtvrtého stupně předpokládati, že mají tři dvojné body;*) zvláštní případ pak, kdy dva nebo tři dvojné body se sjednotí, ze své úvahy vyloučíme. Zvolíme-li pak ony tři body dvojné za vrcholy trojúhelníka souřadnic, lze rovnice obecné takové křivky patrně psáti

$$(1)\quad \varrho x_1 = f_2(t) f_3(t), \quad \varrho x_2 = f_3(t) f_1(t), \quad \varrho x_3 = f_1(t) f_2(t),$$

kde

$$f_i(t) = a_i t_1^2 + 2 b_i t_1 t_2 + c_i t_2^2, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Na proměnný parametr $t_1 : t_2$ možno použiti libovolné transformace lineárné a jest tak viděti, že *lze převésti projektivnou theorii racionálných křivek čtvrtého stupně na theorii tří kvadratických forem,* kterážto theorie neposkytuje pražádných potíží. Při tom současně zachována jest *symmetrie* výrazů, čímž veškeré výpočty značně zjednodušeny.

Chci ukázati v následujícím, jak snadno lze odvoditi z oné theorie tří kvadratických forem vlastnosti projektivné zmíněných křivek. Z té příčiny vypíšu nejprve formule pro počítání s třemi formami kvadratickými, pokud nám jsou potřebny, kteréžto formule čtenář neznající theorie forem snadno si může verifikovati. Lze je nalézti ve známých učebnicích od Salmona, Gordana, Clebsche a j.

Ony tři formy kvadratické f_1, f_2, f_3 mají tři kovarianty, funkční to determinanty vždy dvou daných forem:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, t_1^2 - (c_2 a_3 - a_2 c_3)\, t_1 t_2 + (b_2 c_3 - c_2 b_3)\, t_2^2, \\ \varphi_2 &= (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, t_1^2 - \ldots, \\ \varphi_3 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, t_1^2 - \ldots, \end{aligned}$$

*) Viz pojednání *Ed. Weyra* „O racionálných čarách v rovině“. Časopis pro pěst. math. a fys. ročník VIII. str. 193. a násl.: § IX. a X.

a šest invariantů $D_{11}, D_{12}, D_{13}, \ldots$, kde

$$D_{ik} = D_{ki} = a_i c_k + c_i a_k - 2b_i b_k$$

a konečně invariant

$$R = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Jest pak platna nejprve tato identita

$$2R^2 = \begin{vmatrix} D_{11}, & D_{12}, & D_{13} \\ D_{21}, & D_{22}, & D_{23} \\ D_{31}, & D_{32}, & D_{33} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Označíme-li subdeterminanty tohoto symmetrického determinantu $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \ldots$, jest dále:

$$\begin{aligned} 2R\varphi_1 &= \Delta_{11} f_1 + \Delta_{12} f_2 + \Delta_{13} f_3 \\ 2R\varphi_2 &= \Delta_{21} f_1 + \Delta_{22} f_2 + \Delta_{23} f_3 \\ 2R\varphi_3 &= \Delta_{31} f_1 + \Delta_{32} f_2 + \Delta_{33} f_3 \end{aligned} \tag{3}$$

$$2\varphi_1^2 = -f_2^2 D_{33} + 2f_2 f_3 D_{23} - f_3^2 D_{22} \tag{4}$$

$$2\varphi_2\varphi_3 = f_2 f_3 D_{11} - f_1 f_2 D_{13} - f_1 f_3 D_{12} + f_1^2 D_{23} \tag{5}$$

$$f_1(t) \cdot \varphi_1(u) + f_2(t) \cdot \varphi_2(u) + f_3(t) \cdot \varphi_3(u) = R(t_1 u_2 - t_2 u_1)^2. \tag{6}$$

Z formule poslední, ve které se vyskytují dvě proměnné, a kde tudíž argumenty za znaménky funkčními jsou uvedeny, plyne, klademe-li $u = t$,

$$f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 + f_3\varphi_3 = 0 \tag{7}$$

anebo se zřetelem ku (3):

$$\begin{aligned} \Delta_{11} f_1^2 + \Delta_{22} f_2^2 + \Delta_{33} f_3^2 + 2\Delta_{12} f_1 f_2 + 2\Delta_{13} f_1 f_3 \\ + 2\Delta_{23} f_2 f_3 = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

kterážto identita má pro nás velikou důležitost.

Jednoduchý význam mají D_{11}, D_{22}, D_{33}; jsou to, jak patrno, diskriminanty forem f_1, f_2, f_3 násobené dvěma. Resultant forem f_2, f_3 jest Δ_{11}, analogický význam mají Δ_{22}, Δ_{33}.

Jestliže $R = 0$, lze vyjádřiti jednu ze tří forem na př. f_3 lineárně pomocí f_1 a f_2:

$$f_3 = \lambda f_1 + \mu f_2;$$

tento však případ nutno z naší úvahy vyloučiti, neboť pak bychom mohli místo parametru $t_1 : t_2$ zavésti do rovnic křivky parametr na př. $f_1(t) : f_2(t)$ *) a rovnice (1) by představovaly křivku racionálnou stupně druhého. Budeme tedy ovšem předpokládati, že R jest od nully rozdílno.

Rovněž Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33} jsou nutně od nully rozdílné; kdyby totiž na př. $\Delta_{11} = 0$, měly by f_2 a f_3 a tudíž i výrazy pro x_1, x_2, x_3 společnou míru a byla by křivka rovnicemi (1) určená stupně třetího.

II.

1. Nejprve rozřešíme dvě obecné úlohy. První jest: Jsou dány na křivce dva body, jichž parametry určeny jsou obecnou rovnicí stupně druhého **)

$$(9) \qquad \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t) = 0.$$

Ve kterých bodech protíná přímka tyto dva body spojující křivku? Tyto body jsou obecně dány opět rovnicí stupně druhého

$$(10) \qquad \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t) + \beta_3 f_3(t) = 0.$$

Mají-li čtyři body (9) a (10) ležeti na přímce

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0,$$

musí součin výrazů na levých stranách rovnic (9) a (10) lišiti se od násobku výrazu

$$A_1 f_2(t) f_3(t) + A_2 f_1(t) f_3(t) + A_3 f_1(t) f_2(t)$$

pouze o násobek levé strany identity (8), z čehož, jak patrno, plyne ihned, že součiny $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ musí býti úměrny výrazům Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33}. Přímka tudíž spojující body (9) protíná křivku ještě v bodech

$$(11) \qquad \alpha_2\alpha_3\Delta_{11} f_1 + \alpha_1\alpha_3\Delta_{22} f_2 + \alpha_1\alpha_2\Delta_{33} f_3 = 0.$$

*) Viz cit. pojednání § II. a násl.

**) Že tato rovnice jest obecná, to plyne právě z předpokladu, který jsme učinili o R.

2. Druhý úkol, který rozřešíme, jest: Nalézti podmínky, za kterých rovnice šestého stupně

$$(12)\qquad A_{210}f_1^2f_2 + A_{201}f_1^2f_3 + \ldots + A_{111}f_1f_2f_3 = 0$$

určuje na křivce šest bodů kuželosečky a ustanoviti ony dva body, ve kterých ona kuželosečka ještě protíná křivku. Rovnice (12) jest tvar rovnice, na kterýž obecná rovnice šestého stupně v t (nebo jinak forma třetího stupně v f_1, f_2, f_3) se dá pomocí identity (8) převésti.

Aby šest bodů (12) leželo na kuželosečce, která protíná křivku ještě v bodech

$$(13)\qquad B_1f_1(t) + B_2f_2(t) + B_3f_3(t) = 0,$$

musíme, znásobíme-li levé strany rovnic (12) a (13) a použivše indentity (8) obdržeti výraz, který obsahuje pouze členy

$$f_i^2f_kf_l;\quad i \gtrless k,\ i \gtrless l,$$

součiny to x_kx_l. Členy tudíž obsahující $f_i^3f_l$ musí odpadnouti a dostaneme snadným počtem jakožto nutnou a postačující podmínku pro to rovnice:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \frac{B_1A_{210}}{\varDelta_{11}} &= \frac{B_2A_{120}}{\varDelta_{22}}, \\ \frac{B_2A_{021}}{\varDelta_{22}} &= \frac{B_3A_{012}}{\varDelta_{33}}, \\ \frac{B_3A_{102}}{\varDelta_{33}} &= \frac{B_1A_{201}}{\varDelta_{11}}, \end{aligned}$$

ze kterýchžto ihned plyne rovnice

$$(15)\qquad A_{210}\,.\,A_{021}\,.\,A_{102} = A_{120}\,.\,A_{012}\,.\,A_{201}.$$

Jestliže tato rovnice jest splněna, leží body (12) na kuželosečce; není-li pak splněna, neleží na kuželosečce. Rovnice pak (13) a (14) určují nám body, ve kterých kuželosečka, jestliže oněmi šesti body prochází, protíná křivku.

Podobně by bylo lze řešiti úkol, rozhodnouti, kdy 8 bodů určených obecnou formou čtvrtého stupně ve f_1, f_2, f_3 leží na kuželosečce a t. d.

III.

1. Přímka, která dotýká se křivky v bodě $t = u$, protíná křivku ještě ve dvou bodech, jichž parametry t dle (6) a (11) jsou dány rovnicí:

$$
\begin{aligned}
(16) \qquad \varDelta_{11} f_1(t)\, \varphi_2(u)\, \varphi_3(u) + \varDelta_{22} f_2(t)\, \varphi_3(u)\, \varphi_1(u) \\
+ \varDelta_{33} f_3(t)\, \varphi_1(u)\, \varphi_2(u) = 0.
\end{aligned}
$$

Položíme-li v této rovnici $t = u$, dostaneme rovnici určující parametry bodů, ve kterých má přímka s křivkou styk trojnásobný: rovnici bodů inflexních. Dosadíme-li místo součinů $\varphi_2(t)\,\varphi_3(t), \ldots$ dle (5) a zredukujeme-li pomocí identity (8), obdržíme rovnici pro inflexní body ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
(17) \qquad f_1^2 f_2 \varDelta_{13} D_{33} + f_1 f_2^2 \varDelta_{23} D_{33} + \ldots \\
+ f_1 f_2 f_3 \left(- R^2 - 2 D_{12} D_{23} D_{31} + 2 D_{11} D_{22} D_{33}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Dle odstavce předcházejícího jest okamžitě patrno: *Inflexní body leží na kuželosečce*, která protíná křivku ještě v bodech daných rovnicí

$$
(18) \qquad \varDelta_{11} \varDelta_{23} f_1 + \varDelta_{22} \varDelta_{13} f_2 + \varDelta_{33} \varDelta_{12} f_3 = 0.
$$

2. Z rovnice (16) plyne dále: Tečna v bodě u určeném vztahem $\varphi_1(u) = 0$ protíná křivku v bodě dvojném $f_1(t) = 0$; t. j. parametry bodů, ve kterých se dotýkají křivky tečny ze dvojných bodů vedené jsou dány rovnicemi:

$$
\varphi_1(t) = 0, \qquad \varphi_2(t) = 0, \qquad \varphi_3(t) = 0.
$$

Znásobením těchto tří rovnic a redukcí pomocí (3), (5) a (8) dostaneme, že šest těchto bodů jest určeno vztahem:

$$
\begin{aligned}
(19) \qquad 4 R \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \equiv f_1^2 f_2 \varDelta_{13} D_{33} + f_1 f_2^2 \varDelta_{23} D_{33} + \ldots \\
+ f_1 f_2 f_3 \left(- 2R^2 - 2 D_{12} D_{23} D_{31} + 2 D_{11} D_{22} D_{33}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Rovnice těchto šesti bodů liší se od rovnice bodů inflexních jenom v koefficientu výrazu $f_1 f_2 f_3$, platí tudíž pro těchto šest bodů totéž, co jsme odvodili pro body inflexní, totiž:

Šest bodů dotyčných tečen ze dvojných bodů ku křivce vedených leží na kuželosečce, kterážto týmiž dvěma body na křivce prochází, jako kuželosečka inflexních bodů.

Zároveň jest patrno, že rovnici inflexních bodů se zřetelem ku (19) lze jednodušeji psáti takto

$$4\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + Rf_1f_2f_3 = 0.$$

3. Tečny ve dvojném bodě $f_1(t) = 0$ protínají křivku ve dvou bodech, jichž rovnici najdeme, hledáme-li body, ve kterých „kuželosečka“ $f_1^3(t) = 0$ křivku protíná. Obdržíme tak jakožto rovnici těch bodů:

$$\Delta_{11}f_1 + 2\Delta_{12}f_2 + 2\Delta_{13}f_3 = 0$$

a podobné dvě rovnice pro tečny v druhých dvou bodech dvojných. Znásobením levých stran těchto rovnic dostaneme snadno jakožto rovnici šesti průseků tečen ve dvojných bodech s křivkou:

$$f_1^2f_2\Delta_{11}\Delta_{22}\Delta_{13} + f_1f_2^2\Delta_{11}\Delta_{22}\Delta_{23} + \ldots = 0,$$

ve kteréžto rovnici nevytkli jsme člen obsahující $f_1f_2f_3$ pro náš účel nedůležitý. Z rovnice oné jest ihned zřejmo, že poměr koefficientů při výrazech $f_1^2f_2$ a $f_1f_2^2$ jest tentýž jako v rovnici inflexních bodů a platí tudíž opětně:

Šest bodů, ve kterých protínají tečny ve dvojných bodech křivku, leží na kuželosečce, která protíná křivku v týchž dvou bodech, kterými prochází kuželosečka inflexních bodů.

4. Rovnice $\varphi_1^2f_1^2 = 0$ určuje osm bodů na křivce. Těchto osm bodů leží na „kuželosečce“, jak bezprostředně patrno, neboť leží těchto osm bodů na tečnách ze dvojného bodu $f_1 = 0$ ku křivce vedených. Rovnice tudíž

$$\varphi_1^2f_1^2 - \varphi_2^2f_2^2 = 0$$

určuje 8 bodů ležících na kuželosečce, která prochází čtyřmi průseky tečen vedených ku křivce z bodů dvojných $f_1 = 0$, $f_2 = 0$. Avšak dle (7)

$$\varphi_1^2f_1^2 - \varphi_2^2f_2^2 = -\varphi_3f_3(\varphi_1f_1 - \varphi_2f_2)$$

a tedy: Čtyři průseky tečen ze dvou dvojných bodů, třetí dvojný bod a dotyčné body tečen z tohoto bodu ku křivce vedených leží na kuželosečce.

IV.

1. *Tečny dvojné.* Má-li přímka spojující dva různé body:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \tag{20}$$

býti tečnou dvojnou, musí protínati křivku ještě jednou v týchž bodech, t. j. rovnice (20) a rovnice

$$\lambda_2\lambda_3 \Delta_{11} f_1 + \lambda_3\lambda_1 \Delta_{22} f_2 + \lambda_1\lambda_2 \Delta_{33} f_3 = 0$$

musí býti (nehledě k libovolnému činiteli) stejné. Zcela snadným počtem dostáváme tudíž jakožto rovnice dotyčných bodů čtyř tečen dvojných:

$$\begin{aligned}
T &: \quad \sqrt{\Delta_{11}}f_1 + \sqrt{\Delta_{22}}f_2 + \sqrt{\Delta_{33}}f_3 = 0,\\
T_1 &: -\sqrt{\Delta_{11}}f_1 + \sqrt{\Delta_{22}}f_2 + \sqrt{\Delta_{33}}f_3 = 0,\\
T_2 &: \quad \sqrt{\Delta_{11}}f_1 - \sqrt{\Delta_{22}}f_2 + \sqrt{\Delta_{33}}f_3 = 0,\\
T_3 &: \quad \sqrt{\Delta_{11}}f_1 + \sqrt{\Delta_{22}}f_2 - \sqrt{\Delta_{33}}f_3 = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Součin levých stran těchto rovnic poskytuje, použijeme-li identity (8), výraz kvadratický v x, y, z a leží tudíž dotyčné body tečen dvojných na kuželosečce, kteroužto větu však hned jako specielní případ jiné obecnější seznáme.

2. *Kuželosečky tečné ve čtyřech bodech.* Buďtež dány na křivce čtyři libovolné body; účelně napišme jich rovnici takto:

$$\begin{aligned}
&A\Delta_{11}f_1^2 + B\Delta_{22}f_2^2 + C\Delta_{33}f_3^2 + 2D\Delta_{23}f_2f_3\\
&\quad + 2E\Delta_{13}f_1f_3 + 2F\Delta_{12}f_1f_2 = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

a najdeme podmínky, za kterýchžto lze sestrojiti kuželosečku, jež se křivky v těchto čtyřech bodech dotýká. Povýšíme-li na druhou levou stranu rovnice (22) a zredukujeme-li pomocí identity (3), dostaneme ihned tyto podmínky ve tvaru:

$$\begin{aligned}
A - F &= \pm(B - F),\\
B - D &= \pm(C - D),\\
C - E &= \pm(A - E).
\end{aligned}$$

Zvolíme-li si aspoň ve dvou z těchto rovnic znaménko kladné, máme samozřejmý případ $A = B = C$; čtyři body (22) leží na přímce. Kuželosečky dostaneme pouze tenkráte, když zvolíme si dvě anebo tři znaménka záporná, tedy celkem ve čtyřech případech:

$$\begin{array}{llll}
1. & A = B, & 2D = B + C, & 2E = A + C; \\
2. & B = C, & 2E = A + C, & 2F = A + B; \\
3. & C = A, & 2F = A + B, & 2D = B + C; \\
4. & 2D = B + C, & 2E = A + C, & 2F = A + B;
\end{array}$$

dosadíme-li do (22), zjednáme si tyto *čtyři systémy čtveřin bodových*, kde λ, μ, ν jsou libovolné konstanty

$$(23) \qquad \begin{aligned}
&2Rf_1\varphi_1 + \lambda_1\varDelta_{23}f_2f_3 = 0, \\
&2Rf_2\varphi_2 + \lambda_2\varDelta_{13}f_1f_3 = 0, \\
&2Rf_3\varphi_3 + \lambda_3\varDelta_{12}f_1f_2 = 0, \\
&\lambda f_1\varphi_1 + \mu f_2\varphi_2 + \nu f_3\varphi_3 = 0,
\end{aligned}$$

při čemž je třeba poznamenati, že poslední rovnice jenom zdánlivě obsahuje dvě libovolné, jakž seznáme, připamatujeme-li si identitu (7).

Součin dvou výrazů patřících ku jednomu systému, na př. součin

$$(2Rf_3\varphi_3 + \lambda'_3\varDelta_{12}f_1f_2)(2Rf_3\varphi_3 + \lambda''_3\varDelta_{12}f_1f_2)$$

lze psáti [(3) a (4)]:

$$\begin{aligned}
&-2R^2f_3^2(-f_1^2D_{22} + 2f_1f_2D_{12} - f_2^2D_{11}) \\
&+ (\lambda'_3 + \lambda''_3)\varDelta_{12}f_1f_2f_3(\varDelta_{13}f_1 + \varDelta_{23}f_2 + \varDelta_{33}f_3) \\
&+ \lambda'_3\lambda''_3\varDelta_{12}^2f_1^2f_2^2,
\end{aligned}$$

t. j. jakožto kvadratickou funkci x, y, z a *leží tudíž dvě čtveřiny bodů z každého systému na kuželosečce.*

Takové čtveřiny bodové jsou nám již známy. Jednak jsou to dotyčné body dvou tečen dvojných, neb takovéto dvě tečné lze pokládati za kuželosečku čtyřnásobně tečnou, jednak dostaneme, klademe-li v rovnicích těchto čtveřin bodových za libovolnou konstantu 0 nebo ∞, čtveřiny bodové se známým geometrickým významem. Tak patří k systému prvému (a podobně druhému a třetímu) tyto čtveřiny bodové:

1. Dvojný bod $f_1 = 0$ a dotyčné body tečen z tohoto dvojného bodu ke křivce vedených.

2. Dvojné body $f_2 = 0$, $f_3 = 0$.

3. Dvojné body tečen dvojných T a T_1; příslušný para-

metr má hodnotu $\lambda_1 = 1 - \sqrt{\frac{\Delta_{22}\Delta_{33}}{\Delta_{23}^2}}$, jakž seznáme, znásobíme-li spolu prvé dvě rovnice (21).

4. Dotyčné body tečen dvojných T_2 a T_3, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{\frac{\Delta_{22}\Delta_{33}}{\Delta_{23}^2}}$.

V systému čtvrtém jest zvláštním případem: dvojný bod kterýkoliv a dotyčné body tečen z onoho bodu ku křivce vedených. Z toho plyne jakožto zvláštní případy věty svrchu uvedené několik vět jako na př.: Dotyčné body dvojných tečen leží na kuželosečce. Anebo: Dvojné body $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ a dotyčné body tečen z těchto bodů ku křivce vedených leží na kuželosečce.

Jest pak patrno z výrazu nahoře uvedeného, že proložíme-li jednou čtveřinou některého systému svazek kuželoseček, tento svazek protíná křivku vesměs ve čtveřinách (a to ve všech) téhož systému a bylo by snadno definovati křivku čtvrtého stupně racionálnou, jakožto průsek dvou svazků kuželoseček k sobě lineárně přiřaděných a o společné kuželosečce.

V.

1. Souřadnice tečny sestrojené v bodě t křivky jsou dány rovnicemi

$$\varrho u = f_1^2 \varphi_1, \qquad \varrho v = f_2^2 \varphi_2, \qquad \varrho w = f_3^2 \varphi_3. \tag{24}$$

Aby tečny šesti bodů procházely jedním bodem (a, b, c), jest tedy nutna podmínka:

$$af_1^2 \varphi_1 + bf_2^2 \varphi_2 + cf_3^2 \varphi_3 = 0.$$

Z toho na př. plyne, že dotyčné body tečen jednoduchých sestrojených ku křivce z průseků tečen dvojných T_1 a T_2 jsou dány rovnicí

$$\sqrt{\Delta_{11}} f_1 + \sqrt{\Delta_{22}} f_2 = 0 \tag{25}$$

a prochází přímka tyto dva body spojující třetím bodem dvojným $f_3 = 0$ (11) a zároveň průsekem tečen dvojných TT_3 *). Do-

*) Neboť $(\sqrt{\Delta_{11}}.f_1 + \sqrt{\Delta_{22}}\, f_2 + \sqrt{\Delta_{33}}.f_3)^2 - (\sqrt{\Delta_{11}}\, f_1 + \sqrt{\Delta_{22}}\, f_2 - \sqrt{\Delta_{33}}\, f_3)^2$
$= 4\sqrt{\Delta_{33}} \cdot f_3 (\sqrt{\Delta_{11}}.f_1 + \sqrt{\Delta_{22}}.f_2)$.

tyčné body tečen jednoduchých z průseku T_1 a T_2, pak z průseku T_2 a T_3 a konečně z průseku T_2 a T_1 leží, jak snadno se dle (15) přesvědčíme, na kuželosečce, která protíná křivku v dotyčných bodech dvojné tečny T.

2. Aby tečna u, v, w v bodě t křivky sestrojená dotýkala se kuželosečky

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2dwv + 2ewu + 2fuv = 0,$$

musí dle (24) býti splněno

$$af_1^4 \varphi_1^2 + bf_2^4 \varphi_2^2 + \ldots = 0.$$

Vyloučíme-li z této rovnice φ_1^2, φ_2^2, φ_3^2, $\varphi_1 \varphi_2, \ldots$ pomocí (4) a (5), dostaneme snadno obecnou rovnici určující parametry dvanácti bodů, jichž tečné dotýkají se jedné kuželosečky.

Pomocí této rovnice snadným počtem dokážeme větu: Ku šesti bodům, jichž rovnice jest:

$$(26) \qquad f_1^2 f_2 D_{33} \varDelta_{13} + f_1 f_2^2 D_{33} \varDelta_{23} + \ldots + \lambda f_1 f_2 f_3,$$

kde λ libovolné, lze vždy nalézti šest bodů, jichž rovnice jest:

$$(26') \qquad f_1^2 f_2 D_{33} \varDelta_{13} + f_1 f_2^2 D_{33} \varDelta_{23} + \ldots + \lambda' f_1 f_2 f_3 = 0,$$

takových, aby tečny v těchto dvanácti bodech byly tečny jedné a téže kuželosečky. Tato kuželosečka dotýká se pro každé λ dvou pevných přímek ve dvou pevných bodech.

Koefficienty a, b, c, $d, \ldots$ v rovnici přímkové této kuželosečky se vyskytující jsou

$$(27) \qquad \begin{aligned} a &= \varrho\varDelta_{11} - 2R^2 D_{23}^2 \\ b &= \varrho\varDelta_{22} - 2R^2 D_{13}^2 \\ c &= \varrho\varDelta_{33} - 2R^2 D_{12}^2 \\ d &= -\varrho\varDelta_{23} - 2R^2 D_{12} D_{13} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

kde

$$\lambda + \lambda' = -4\varrho - 4(D_{12}\varDelta_{12} + D_{23}\varDelta_{23} + D_{31}\varDelta_{31})$$

a kde pro λ a λ' jest platný vztah

$$(28) \qquad \lambda\lambda' - \frac{1}{4}(\lambda + \lambda')(-10R^2 - 8D_{12} D_{13} D_{23} + 8D_{11} D_{22} D_{33}) + (R^2 + 2D_{12} D_{13} D_{23} - 2D_{11} D_{22} D_{33}) . (4R^2 + 2D_{12} D_{23} D_{31} - 2D_{11} D_{22} D_{33}) = 0.$$

Podotknouti jest, že body (26) i (26′) odtínány jsou na křivce svazkem kuželoseček, jehožto dva základní body leží na křivce a dány jsou rovnicí (18).

Speciální případy svrchu uvedené věty jsou:

1. *Tečny ve dvojných bodech dotýkají se jedné kuželosečky* ($\lambda = \infty$).

2. *Tečny ze dvojných bodů ke křivce vedené dotýkají se jedné kuželosečky.*

3. *Tečny v inflexních bodech sestrojené dotýkají se jedné kuželosečky.*

Všechny tyto tři kuželosečky dotýkají se dvou přímek ve dvou pevných bodech, což plyne z výrazů pro koefficienty $a, b, c, \ldots\ldots$ (27).

Kuželosečka ve větě 3. vytčená nemá již žádných tečen společných se křivkou, neboť tečnu v inflexním bodě jest nutno čítati dvakráte jakožto společnou tečnu křivky a kuželosečky. Učiníme-li tedy ve vztahu (28) $\lambda = \lambda'$, musíme dostati rovnici, jejížto jeden kořen odpovídá rovnici inflexních bodů, totiž ona rovnice bude míti dle (17) kořen

$$\lambda = -R^2 - 2D_{12}D_{23}D_{31} + 2D_{11}D_{22}D_{33}.$$

Druhý kořen jest v tomto případě ($\lambda = \lambda'$):

$$\begin{aligned}\lambda &= -4R^2 - 2D_{12}D_{13}D_{23} + 2D_{11}D_{22}D_{33}\\ &= -2(D_{12}\Delta_{12} + D_{23}\Delta_{23} + D_{31}\Delta_{31}).\end{aligned}$$

Tomuto kořenu odpovídá $\varrho = 0$ a dle vztahů (27) „kuželosečka“, jejíž rovnice jest

$$D_{23}^2 u^2 + D_{31}^2 v^2 + D_{12}^2 w^2 + 2D_{12}D_{31}wv + 2D_{23}D_{12}uw + 2D_{31}D_{23}vu = 0,$$

a která představuje, jak zřejmo, bod o souřadnicích D_{23}, D_{31}, D_{12}. Vedeme-li z tohoto bodu ku křivce tečné, jsou dotyčné body určeny rovnicí

$$f_1^2 f_2 D_{33}\Delta_{13} + f_1 f_2^2 D_{33}\Delta_{23} + \ldots + (-4R^2 - 2D_{12}D_{23}D_{31} + 2D_{11}D_{22}D_{33}) f_1 f_2 f_3 = 0$$

a leží na kuželosečce téhož svazku jako kuželosečka inflexních bodů a kuželosečka procházející dotyčnými body tečen z dvojných bodů.

3. Ještě na jednu okolnost chceme poukázati, která se nám zdá býti zajímavou. Vypočteme-li rovnice *kuželosečky inflexních bodů*, *kuželosečky procházející dotyčnými body dvojných tečen* a konečné *kuželosečky, které se dotýkají tečny inflexní*, dostaneme snadno po řadě tyto rovnice

$$
\begin{aligned}
-\,2R^2(D_{11}x^2+D_{22}y^2+D_{33}z^2-D_{23}yz-D_{31}zx-D_{12}xy)&\\
+D_{11}^2\Delta_{11}x^2+D_{22}^2\Delta_{22}y^2+D_{33}^2\Delta_{33}z^2&\\
+\Delta_{22}\left(\frac{5}{2}D_{22}D_{33}-\frac{1}{2}D_{23}^2\right)yz+\ldots&=0,\\
2R^2(D_{11}x^2+D_{22}y^2+D_{33}z^2)-2yz\Delta_{21}\Delta_{31}-2zx\Delta_{23}\Delta_{21}&\\
-2xy\Delta_{31}\Delta_{32}&=0,\\
-\,2R^2(D_{11}x^2+D_{22}y^2+D_{33}z^2+2D_{23}yz+2D_{31}zx+2D_{12}xy)&\\
+4(D_{11}^2\Delta_{11}x^2+D_{22}^2\Delta_{22}y^2+D_{33}^2\Delta_{33}z^2&\\
+\Delta_{23}(D_{22}D_{33}+D_{23}^2)yz+\ldots&=0,
\end{aligned}
$$

a seznáme, že *tyto kuželosečky patří k jednomu svazku.*

Neboť rovnici třetí dostaneme, násobíme-li první 4 a druhou třínásobnou od ní odečteme.

VI.

Ke konci budiž ještě na to upozorněno, že způsob, kterého jsme užili v předcházejícím, není jediný, jímž převésti lze theorii racionálných křivek čtvrtého stupně na theorii tří kvadratických forem. Předpokládali jsme, že známe body dvojné. Kdybychom byli předpokládali, že určeny jsou parametry dotyčných bodů tří tečen dvojných pomocí tří rovnic kvadratických, dostati jsme mohli rovnice křivky ve tvaru

$$
\varrho x_1=\Phi_1^2,\qquad \varrho x_2=\Phi_2^2,\qquad \varrho x_3=\Phi_3^2. \tag{29}
$$

A výrazy, které bychom byli obdrželi, byly by rovněž symmetrické vzhledem ku formám a souřadnicím. Avšak každý, kdo pohlédne na rovnice určující tyto parametry (21), pozná ihned, že nějak podstatně se tím neodchýlíme od projednávání theorie na základě bodů dvojných. Než za supposice rovnic (29) lze vyšetřovati křivku racionálnou i v tom případě, který jsme hned na počátku vyloučili, že totiž dva nebo tři dvojné body splývají. Pak máme ovšem ještě to zjednodušení, že invarianty kvadratických forem Φ_1, Φ_2, Φ_3 jsou vázány jednou nebo několika podmínkami. Kdyby přímky určené body Φ_1, Φ_2, Φ_3 sbíhaly se v bodě jediném, pak ani této cesty nebylo by lze použiti.

Avšak mimo tyto dva způsoby, sobě téměř ekvivalentní, převésti theorii křivek racionálných čtvrtého stupně na theorii tří forem kvadratických, jest řada jiných, ale nesymmetrických vzhledem k systému souřadnic. Uvedeme k osvětlení toho jeden příklad, nechceme však nikterak tvrditi, že by volba souřadnic v příkladě tom zvolená měla nějaké zvláštní výhody.

Zvoliti si můžeme (jak lehko seznáme) jakožto rovnice racionálné křivky čtvrtého stupně zcela obecné tyto rovnice:

$$\begin{aligned}\varrho x_1 &= (t_1 u'_2 - t_2 u'_1)^3 [(\mathrm{A}u'_1 + \mathrm{B}u'_2)t_1 + (\mathrm{B}u'_1 + \mathrm{C}u'_2)t_2],\\ \varrho x_2 &= (t_1 u''_2 - t_2 u''_1)^3 [(\mathrm{A}u''_1 + \mathrm{B}u''_2)t_1 + (\mathrm{B}u''_1 + \mathrm{C}u''_2)t_2],\\ \varrho x_3 &= (\alpha t_1^2 + 2\beta t_1 t_2 + \gamma t_2^2)^2 = \Phi^2.\end{aligned}$$

Tato volba souřadnic má snadný geometrický význam u'_1, u'_2; u''_1, u''_2 jsou parametry dvou různých bodů inflexních, Φ určuje parametry dotyčných bodů tečny dvojné. Pak theorie projektivná křivky racionálné čtvrtého stupně se převádí na theorii tří forem kvadratických, totiž formy Φ a forem:

$$\begin{aligned}f &= (t_1 u''_2 - t_2 u''_1)(t_1 u'_2 - t_2 u'_1) = at_1^2 + 2bt_1 t_2 + ct_2^2,\\ \mathrm{F} &= \mathrm{A}t_1^2 + 2\mathrm{B}t_1 t_2 + \mathrm{C}t_2^2.\end{aligned}$$

Pomocí těchto forem a jich invariantů lze vypočísti rovnice pro všecky projektivné prvky a formou rovnice vyjádřiti projektivnou závislost různých prvků (jako jsme to učinili na jednom příkladě v odst. II.). Tak na př. rovnice pro body inflexní jest

$$\begin{aligned}f[-2\mathrm{D}_{22}\mathrm{D}_{33}f^2 + 6\mathrm{D}_{12}\mathrm{D}_{33}f\mathrm{F} - 6\Delta_{13}f\Phi - 12\mathrm{D}_{12}\mathrm{D}_{13}\mathrm{F}\Phi\\ + 3\Delta_{33}\Phi^2] = 0,\end{aligned}$$

při čemž D_{ik}, D_{ik} mají týž význam jako v odst. I., jenom indexy 1, 2, 3 vztahují se po řadě ku formám f, F, Φ.

Jest patrno, že takovým způsobem bychom mohli odvoditi vlastnosti projektivné, na př. dvojice inflexních bodů, kteréžto vlastnosti při způsobu v této práci použitém byly úplně nepřístupny, než symmetrie výrazů, která byla naší hlavní pomůckou, jest úplně ztracena.