Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Sobotka

Příspěvek k sestrojování kuželoseček dvojnásobně se dotýkajících

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 1, 1--8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124069

Příspěvek k sestrojování kuželoseček dvojnásobně se dotýkajících.

Napsal

Jan Sobotka,

v. ř. professor c. k. české vysoké školy technické v Brně.

Sestrojování kuželoseček dvojnásobně se dotýkajících vzalo nepochybně svůj původ v deskriptivní geometrii; všechny kuželosečky v dané rovině, které pevné kuželosečky se dvojnásobně dotýkají, lze považovati za průměty, ze společného středu promítání odvozené, kuželoseček ležících na ploše 2. stupně, která pevnou kuželosečku má za křivku obrysovou. Zvláštní zájem pro konstrukce kuželoseček takových vzbuzen byl hlavně dvěma obsáhlými pracemi J. Steinera, obsaženými v sebraných spisech jeho v 2. svazku str. 389. a str. 445. a zanášejícími se specielně dvojnásobným dotykem kuželoseček s křivkami kruhovými. Steiner uvádí větší část vět a konstrukcí v pracích těch obsažených, jak u něho bývá zvykem, bez důkazu. Klassické odvození výsledků Steinerových podává W. Fiedler v pojednání: „Über die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen“ na základě své methody o promítání cyklografickém (Acta mathematica 5. 1884). Většinu vět a konstrukcí zmíněných odvozuje elementarně a výhradně planimetricky R. Schüssler v „Archiv der Mathematik u. Physik“ III. Reihe, 2. Band, str. 1. Nemám zde úmyslu, zabývati se dosti bohatou bibliografií předmětu toho. Chci zde pouze k jedné okolnosti poukázati.

Podle Fiedlera uvažujme promítání orthogonalné a každé křivce kruhové v rovině přisuzujme význam obrysové křivky plochy kulové a zároveň rotačního hyperboloidu rovnostranného, iehož přímky povrchové jsou k průmětně pod úhlem 45^0 nakloněny. Pak jest každý bod A v rovině průmětem dvou realných bodů, buď plochy kulové, když A leží uvnitř, aneb hyperboloidu, když A leží vně křivky kruhové. Máme zde zvláštní případ imaginarné projekce koule v hyperboloid a naopak, jak o ní obšírně jedná Chr. Wiener v 2. svazku svého díla o deskriptivní geometrii.

K novým konstrukcím a k doplnění známých konstrukcí lze dojíti, když považujeme každý bod v rovině za střed kuželových ploch opsaných ploše kulové a hyperboloidu, jejichž křivky dotyčné, ať již realné neb imaginarné, mají patrně společný průmět v poláře bodu vzhledem ke křivce kruhové obrysové, a dále, když každou přímku považujeme za stopu rovin tečných obou ploch vytknutých. Přesvědčíme se o tom ihned na následujícím jednoduchém případě.

Úloha. Dvěma body A, B má se položiti kuželosečka o daném středu a dané délce jedné poloosy.

Opišme danou délkou jakožto poloměrem křivku kruhovou k o středu O. Tu, má-li býti kuželosečka možnou, dlužno rozeznávati dva případy.

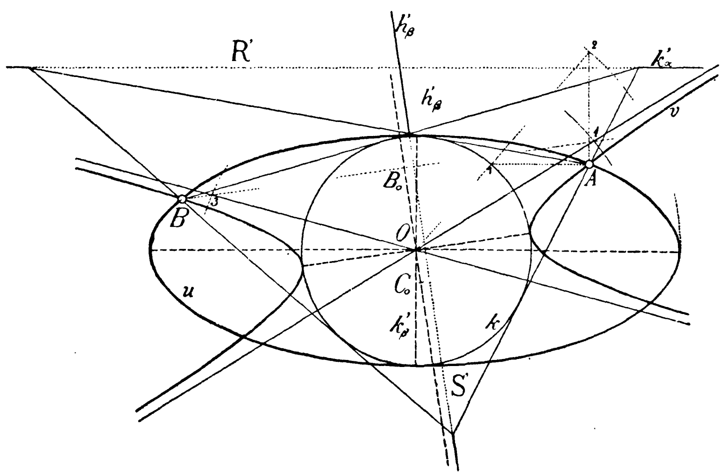
Body A, B leží: 1) uvnitř; 2) vně křivky k.

Co se týká případu prvého, vyhovují úloze dvě ellipsy, mající danou délku za poloosu hlavní. V tom případě má úloha jistou praktickou důležitost a z toho ohledu se jí zabývali opětně Holzmüller, Hauck, Fiedler v Hofmannově „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ r. 1898.

Ellipsa jest tu průmětem průseku koule s rovinou bodem O a body na kouli, jichž průměty jsou A a B, procházející. Na základě tom sestrojuje Hauck obě možné ellipsy na místě právě uvedeném. Nutno ale poznamenati, že konstrukce ta se úplně kryje s konstrukcí, již podal R. Niemtschik již r. 1873 (Sitzungsberichte d. k. Akademie d. Wissensch., Wien, Band LXVII.), který v celé řadě pojednání v uvedených zprávách uveřejněných se zabývá kuželosečkami dvojnásobně se dotýkajícími na onom základě, který jsme zde v úvodu uvedli. Provedeme případ druhý, kdy A a B leží vně křivky k. Považujme A a B za středy kuželů K_α, K_β, resp. H_α, H_β opsaných kouli resp. hyperboloidu.

Kužele K_α, K_β rovněž jako H_α, H_β se proto budou protínati v kuželosečkách, jichž roviny budou promítacími. Vedeme-li tedy z A a B tečny ku k, budou tyto tvořiti úplný čtyrstran. AB jest jednou jeho úhlopříčnou, ostatní dvě úhlopříčny R′, S′ jsou průměty rovin, v nichž leží kuželosečky k_α, k_β resp. h_α, h_β společné kuželům K_α, K_β resp. H_α, H_β. Každá z našich kuželoseček může býti hyperbolou, ellipsou neb parabolou.

a) Budiž na př. k_α hyperbolou, jak tomu jest v případě obr. 1. vyjádřeném, a nazveme m, n její asymptoty. Tyto jsou patrně stejnosměrny s dvěma přímkami m_α, n_α souměrně k průmětně položenými kužele K_α a rovněž s takovými dvěma přím-



Obr. 1.

kami m_β, n_β kužele K_β. Opíšeme-li nyní kouli, za základ konstrukce sloužící, plochu válcovou M stejnosměrnou s přímkou m, budou pro ni m_α, m_β dvěma přímkami povrchovými. Stopa válce toho bude tedy ellipsa u, dotýkající se ve svých vrcholech vedlejších křivky kruhové k a procházející body A, B. Ellipsa ta vyhovuje tudíž naší úloze. Plocha válcová N, stejnosměrná k n, jest ku M vzhledem k průmětně souměrně položena, má tedy s M společnou stopu a nevede k nové křivce úloze hovící. Ellipsu u obdržíme tedy, když vedeme ku $R' = k'_\alpha$ průměr kolmý křivky k, který jest osou vedlejší a pak průměr stejnosměrný; na tomto leží osa hlavní. Další sestrojení ellipsy jest známo. Vedeme-li bodem

A ku R' stejnosměrku až protne k v 1 a kolmici, kterou protneme přímkou $O1$ v bodě 2, pak jest $O2$ délka velké poloosy.

Budiž za druhé v úvahu vzata kuželosečka, zde na př. k_β ellipsou čili hyperbolou o imaginarných asymptotách. V tom případě bude i příslušný válec dotyčný s koulí imaginarný; stopa jeho v ale bude nicméně kuželosečka realná, a to hyperbola, která bude míti za osu hlavní průměr křivky k kolmý ku $S' = k'_\beta$. To vychází z následujícího.

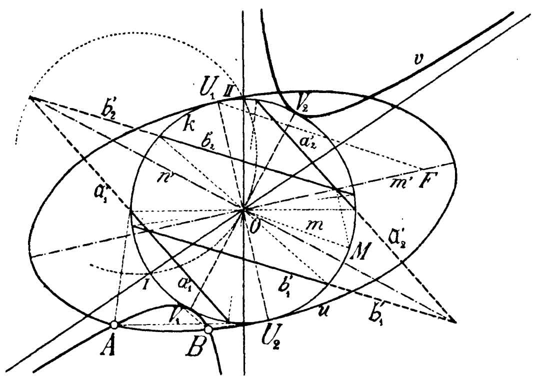
Je-li k_β ellipsou, jest h_β hyperbolou o asymptotách p, q souměrně k průmětně položených.

Na kuželi H_α jsou tedy přímky p_α, q_α na kuželi H_β přímky p_β, q_β příslušné s asymptotami těmi stejnosměrné a křivka v jest pak společnou stopou ploch válcových P, Q stejnosměrných s p resp. q a hyperboloidu rovnostrannému opsaných. Sklon přímek p, q k průmětně jest menší než 45^0, o čemž se přesvědčíme, když proložíme přímkou p_α rovinu promítací P_α, protínající hyperboloid v rovnoramenné hyperbole; patrně jest p_β tečnou této hyperboly mající v p'_α osu vedlejší, z čehož plyne, že sklon tečny p_α od průmětny jest menší než sklon asymptot. Následkem toho bude se plocha válcová P dotýkati hyperboloidu podél hyperboly a stopa v plochy té bude rovněž hyperbolou prve vytknuté vlastnosti. Máme tedy následující sestrojení křivky v.

Vedeme průměr křivky k kolmý ku $S' = k'_\beta$; tento jest osou hlavní; dále vedeme osu vedlejší stejnosměrně s S' a spustíme k ní kolmici s bodu B; od paty B_0 kolmice této naneseme na osu vedlejší délku B_0C_0 poloměru křivky k, rovnajícímu se délce poloosy hlavní a zmíněnou právě kolmici protneme křivkou kruhovou o poloměru BB_0 a středu C_0; body průsečné 3, 4 náležejí dle známé konstrukce asymptotám hyperboly, čímž tato jest úplně stanovena.

Je-li konečně jedna z kuželoseček k_α, k_β, h_α, h_β parabolou, pak jedna ze žádaných kuželoseček u, v rozpadá se ve dvě stejnosměrné tečny křivky k.

Mohli jsme provésti konstrukci též jiným způsobem, totiž tak, že bychom direktně vyhledali rovnoběžné přímky povrchové na kuželích K_α, K_β resp. H_α, H_β. Za tím účelem posuňme kužele K_α, K_β, jakož i H_α, H_β rovnoběžně tak, aby měly všechny v nové poloze K_α^+, K_β^+, H_α^+, H_β^+ společný vrchol v bodě O (obr. 2.). V poloze této určíme průsek kuželů K_α^+, K_β^+ s koulí, kuželů H_α^+, H_β^+ s hyperboloidem rotačním. Vedeme tedy bodem O rovnoběžky k tečnám křivky k z bodu A vycházejícím. Rovnoběžky ty určují na k dvě tetivy a'_1, a'_2 stejnosměrné k tetivě styčné bodu A. Tetivy ty lze považovati za průměty křivek kruhových a_1, a_2, v nichž K_α^+ naši kouli protíná. Obdobným způsobem se sestrojí pak průměty b'_1, b'_2 křivek kruhových, v nichž K_β^+ kouli tu protíná.



Obr. 2.

Kužel H_α dotýká se hyperboloidu podél rovnoramenné hyperboly, z čehož ihned soudíme, že roviny, v nichž leží křivky a_1, a_2, protínají hyperboloid rotační i kužel H_α^+ v totožných hyperbolách rovnoramenných $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$.

Obdobným způsobem obdržíme průseky $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ kužele H_β^+ s hyperboloidem rovnostranným, při čemž opět $\mathfrak{b}'_1 = b'_1$, $\mathfrak{b}'_2 = b'_2$.

Přímky a'_1, a'_2, b'_1, b'_2 čili $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{a}'_2$, $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{b}'_2$ tvoří rovnoběžník, jehož úhlopříčny jsou průměty společných přímek kuželů K_α^+, K_β^+ resp. H_α^+, H_β^+, a to kuželů prvých pro protilehlé vrcholy rovnoběžníka ležící uvnitř k, kuželů druhých pak pro vrcholy ležící zevnitř k. Úhlopříčny ty jsou průměty pro směry ploch válcových buďto ploše kulové aneb rovnostrannému hyperboloidu rotačnímu opsaných a jest z důvodu toho jedna z nich osou kuželosečky u, druhá osou kuželosečky v.

Je-li na př. u ellipsou, jejíž osa hlavní m' je spojnicí bodu $a'_1 b'_1$ s bodem $a'_2 b'_2$, pak jest průměr $U_1 U_2$ křivky k kolmý k m' její osou vedlejší. Dále považujme rovinu, přímkou m' kolmo k naší rovině položenou, za rovinu nárysnou; průsečné body křivek a_2, b_2 mají svůj nárys v koncových bodech tetivy křivky k bodem $a'_2 b'_2$ kolmo k m' vedené. Budiž M jeden z bodů těch, pak udává $m = OM$ směr plochy válcové naší kouli opsané a $U_1 U_2$ průměr její v rovině nárysné ležící a kolmý k rovině půdorysné. Vedeme-li tedy bodem U_1 stejnosměrku k m, protne nám tato m' v ohnisku F ellipsy u. Je-li žádaná kuželosečka hyperbolou, jako zde křivka v, jejíž osa vedlejší n' jest spojnicí bodu $\mathfrak{a}'_1 \mathfrak{b}'_2$ s bodem $\mathfrak{a}'_2 \mathfrak{b}'_1$, pak jest průměr $V_1 V_2$ křivky k kolmý ku n' osou hlavní hyperboly v. Opíšeme-li dále nad úsečkou omezenou body O a $\mathfrak{a}'_1 \mathfrak{b}'_2$ jakožto průměrem křivku kruhovou protínající k v bodech I, II, tu jsou přímky OI, OII asymptotami hyperboly v, čímž tato jest úplně určena. Abychom správnost konstrukce této seznali, mysleme si, že jest N jeden společný bod hyperbol $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_2$ a tedy $ON = n$ směr plochy válcové hyperboloidu opsané, mající v za stopu.

Bodem N procházejí dvě přímky hyperboloidu NI a NII. Jsou proto roviny ONI, ONII dvěma jeho rovinami tečnými stejnosměrnými s n. Jejich stopní přímky OI, OII se proto stopy v válce dotýkají; jelikož ale středem O křivky v procházejí, musejí býti jejími asymptotami.

Z konstrukcí těch lze další konstrukce kuželoseček daných kruhů dvojnásobně se dotýkajících odvoditi; my zde se chceme jen ještě zmíniti o následující úloze.

Sestrojiti jest kuželosečku danou třemi body A, B, C a křivkou kruhovou k, které se má dvojnásobně dotýkati.

Známá konstrukce úlohy té jest následující. Jsou-li body A, B, C uvnitř k, odvodíme si křivky kruhové o středech A, B, C tak, aby byly křivkou k diametralně protnuty. Kolmice ze středu O křivky k k osám podobnosti těchto křivek kruhových jsou osami oněch čtyř kuželoseček, které naší úloze vyhovují. Leží-li body A, B, C zevnitř k, pak sestrojme křivky kruhové, mající středy v těchto bodech a protínající k orthogonalně a odvoďme osy podobnosti těchto tří křivek kruhových; pak jsou kolmice z O na tyto osy opět osami oněch čtyř kuželoseček, úloze naší vyhovujících.*)

My chceme zde přihlížeti jenom ku případu, kdy body A, B, C leží vně křivky k, poněvadž tu obdržíme řešení, případ ten zvlášť charakterisující. Považujme opět k za křivku obrysovou plochy kulové a rovnostranného hyperboloidu rotačního s osou kolmou ku rovině křivky k, když opět střed O této křivky k jest společným středem obou ploch.

Z bodu A veďme tečny a_1, a_2, z bodu B tečny b_1, b_2 a z bodu C tečny c_1, c_2 ku křivce k; tečny ty jsou přímkami obrysovými ploch kuželových K_α, K_β, K_γ resp. H_α, H_β, H_γ majících své vrcholy v A, B, C a dotýkajících se plochy kulové, aneb, pokud se týče, hyperboloidu rotačního. Plochy kuželové K_α, K_β, K_γ a rovněž i H_α, H_β, H_γ budou se protínati po dvou vždy ve dvou kuželosečkách, jejichž průměty budou úhlopříčny v čtyrstranech, jichž stranami jsou vždy dva z těch dříve sestrojených párů tečen ku k. Tyto úhlopříčny se budou sbíhati vždy po třech v jednom bodě. Každý takový bod jest průmětem dvou společných bodů k průmětně souměrně položených buďto kuželů K_α, K_β, K_γ aneb kuželů H_α, H_β, H_γ, jak z dosavadních úvah bezprostředně vychází. Ostatně jsou zmíněné takové tři úhlopříčny úhlopříčnami jednoho šestiúhelníka z tečen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 utvořeného a musí se proto dle věty Brianchonovy v jednom bodě stýkati. Naopak můžeme v tom, že takové tři úhlopříčny v jediném bodě se stýkají, spatřovati též jeden důkaz věty Brianchonovy na základě úvah prostorových, což zde budiž jen mimochodem podotčeno.

Budiž tedy bod Q jeden ze společných bodů kuželů K_α, K_β, K_γ aneb kuželů H_α, H_β, H_γ; pak jsou přímky QA, QB, QC tři přímky dotýkající se plochy kulové resp. hyperboloidu.

Považujeme-li tedy Q za vrchol kužele, který jest kouli resp. hyperboloidu opsán, bude jeho stopní křivka u procházeti body A, B, C a dvojnásobně se dotýkati křivky k a patrně jest k vůli souměrnosti se zde vyskytující $Q'O$ jednou osou

*) Viz na př. v uvedeném pojednání od Fiedlera str. 347.

kuželosečky u, a dále jest polára bodu Q' vzhledem ku k tetivou styčnou křivek k a u.

Máme tedy následující řešení naší úlohy.

Z tečen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 utvoříme jednoduchý šestistran tak, aby přímky v párech a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 byly v něm stranami protilehlými, pak jest průměr křivky kruhové k směřující k bodu Brianchonovu Q' šestiúhelníka toho osou kuželosečky procházející body A, B, C a dvakráte se dotýkající křivky k.

Možné, od sebe různé, šestistrany jsou tu:

$$
\begin{gathered}
a_1b_1c_1a_2b_2c_2, \\
a_1b_1c_2a_2b_2c_1, \\
a_1b_2c_1a_2b_1c_2, \\
a_1b_2c_2a_2b_1c_1,
\end{gathered}
$$

tak že jsme vskutku vedeni ku čtyřem kuželosečkám úloze vyhovujícím. Že při řešení úlohy:

Má se sestrojiti kuželosečka, dané křivky kruhové dvakráte se dotýkající, jsou-li dány tři tečny její, z nichž každá křivku k protíná, dospějeme k výsledku dualnému, vysvitne, když obrazec právě nabytý polarisujeme vzhledem ku k. Protíná-li k tečnu jednu v bodech A_1, A_2, druhou v bodech B_1, B_2, třetí pak v bodech C_1, C_2, obdržíme jednoduché šestiúhelníky křivce k vepsané:

$$
\begin{gathered}
A_1B_1C_1A_2B_2C_2, \\
A_1B_1C_2A_2B_2C_1, \\
A_1B_2C_1A_2B_1C_2, \\
A_1B_2C_2A_2B_1C_1,
\end{gathered}
$$

jejichž přímky Pascalovy jsou tetivami styčnými mezi k a kuželosečkami žádanými, kdežto kolmice k nim ze středu O křivky k vedené jsou osami jejich.

Další důsledky konstrukcí uvedených, jakož i převedení úloh na případ obecný, kdy k jest libovolnou kuželosečkou, podáváme na jiném místě.