Antonín Sýkora

O usměrňování jmenovatelů zlomků tvaru $P\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 1, 84--86

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124067

Poznámka 3. Pomocí determinantů jest vzorec pro V^2 odvozen v Baltzerových, Dostorových a Studničkových Determinantech.

O usměrňování jmenovatelů zlomků tvaru

$$\frac{P}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}}.$$

Napsal

Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

Jest známo, že součin

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

rovná se magickému determinantu

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}^{*)} = a^3+b^3+c^3-3\,abc.$$

Znásobíme-li tedy čitatele i jmenovatele daného zlomku šestičlenem

$$\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{B^2}+\sqrt[3]{C^2}-\sqrt[3]{AB}-\sqrt[3]{BC}-\sqrt[3]{AC},$$

nabudeme

$$\frac{P(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{B^2}+\sqrt[3]{C^2}-\sqrt[3]{AB}-\sqrt[3]{BC}-\sqrt[3]{AC})}{A+B+C-3\sqrt[3]{ABC}}.$$

Rozšíříme-li dále tento zlomek výrazem

$$(A+B+C)^2+3(A+B+C)\sqrt[3]{ABC}+9\sqrt[3]{A^2B^2C^2},$$

dostane týž racionalného jmenovatele

$$(A+B+C)^3-27\,ABC.$$

---

*) jehož hlavní úhlopříčka $= a^3$.

Je-li $\sqrt[3]{ABC}$ racionalná, není tohoto posledního rozšíření zlomku ani třeba.

Příklad 1. Zlomek

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}}$$

rozšiřme trojčlenem

$$\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{18}-2\sqrt[3]{4};$$

tím nabude zlomek hodnoty

$$\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{18}-2\sqrt[3]{4}.$$

Příklad 2. Zlomek

$$\frac{15}{1+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}$$

rozšířen

$$3+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4},$$

dá

$$3(3+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}).$$

Příklad 3. Zlomek

$$\frac{3\sqrt[3]{30}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{10}.$$

Příklad 4.

$$\frac{3(3-2\sqrt[3]{3})}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{6}-2-\sqrt[3]{12}.$$

Jsou-li A, B, C členy řady geometrické, má-li tedy jmenovatel na př. tvar

$$\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2},$$

můžeme jej usměrniti, rozšíříme-li zlomek dvojčlenem $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$, jakož i z hořejšího vyplývá.

Příklad 1.

$$\frac{3}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = 1+\sqrt[3]{2}.$$

Příklad 2.

$$\frac{24}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}} = 3\,(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}).$$

Jak vyjádříme plochu trojúhelníka těžnicemi jeho.

Napsal

Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

Plocha P trojúhelníka vyjádřená stranami jeho, jest

$$16\,P^2 = 4\,a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2. \tag{I}$$

Značíme-li těžnici spojující střed strany a s protilehlým vrcholem písmenem α, a úhel, jejž s touto stranou tvoří a proti straně b leží, μ, máme

$$b^2 = \alpha^2 + \frac{a^2}{4} - a\,\alpha \cos\mu$$

$$c^2 = \alpha^2 + \frac{a^2}{4} + a\,\alpha \cos\mu$$

a sečtouce

$$b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = 2\alpha^2.$$

Obdobně dostaneme pro těžnice β, γ,

$$a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} = 2\beta^2,$$

$$a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = 2\gamma^2.$$

Vypočtouce z rovnic těchto a^2, b^2, c^2, nabudeme

$$a^2 = \frac{4}{9}\,(2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2)$$