Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Příspěvek ku řešení rovnice kubické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 1, 69--75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124065

vána velmi bedlivá pozornost, což při malém napjetí a malé intensitě proudu je samozřejmo.

3. Elektromotorická síla thermoelektrické baterie ať nepřesahuje znatelně mez uvedenou. Zvýší-li se na 0·5 voltu nebo docela k 1 voltu, koherer službu vypovídá.

4. Pracuje-li koherer ve volném vzduchu, může se účinnost jeho usazujícím se prachem a pod. porušiti. Tomu pak snadno odpomůžeme, pošineme-li příčku pp_1, mírně ji přitlačujíce, podél tyček aa_1.

5. Zvětšením zatížení příčky pp_1 se citlivost kohereru poněkud zvětší. Zřídka bude většího zatížení potřebí, než 4—5 g. Nepřeruší-li se otřesem proud v okruhu kohereru, jest míra zatížení překročena, a zatížení dlužno zmenšiti.

Pokusy konány byly s výsledkem uspokojivým až do vzdálenosti 5·5 m, pokud to totiž místnost připouštěla, bez chytacích drátů a vůbec bez jakýchkoliv jiných pomocných zařízení.

Kdybychom do druhého parallelního okruhu baterie B_1 (v obrazci nenaznačeného) zařadili Morseův psací apparát, mohli bychom, jak patrno, elektrické vlny zřejmými učiniti nejen zvonítkem, nýbrž i psanými značkami apparátu. Správnost značek by však zajisté vyžadovala mimo jiné (na př. Wehneltův interruptor) malého induktoria a řádného klíče k uzavírání jeho primárního vedení; což zde však pomíjíme.

Příspěvek ku řešení rovnice kubické.

Napsal

Dr. **Antonín Pleskot**,
professor v Plzni.

Stanovme v kvadratické rovnici

$$x^2 + ax + b = 0$$

vztah mezi a a b, aby jeden její kořen byl čtvercem kořene druhého.

Je-li x jedním jejím kořenem, pak platí:

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} x + x^2 &= -a, \\ x^3 &= b. \end{aligned}$$

Z rovnic těchto plyne:

$$x = \varepsilon\sqrt[3]{b}, \quad \text{kdež} \quad \varepsilon = \sqrt[3]{1}$$

a

$$(\beta) \qquad \varepsilon\sqrt[3]{b} + \varepsilon^2\sqrt[3]{b^2} = -a,$$

čímž vztah mezi a a b určen.

Možno však vyvinouti vztah mezi a a b ještě jiným způsobem a sice, stanovíme-li resultant rovnic (α).

Ten určíme ztrojmocnivše rovnici (β); bude pak

$$(\gamma) \qquad a^3 - 3ab + b^2 + b = 0.$$

Považujeme-li nyní v rovnici (γ) a za neznámou a b za známou, pak kořeny rovnice této jsou dány vzorcem (β).

Tohoto obratu možno užiti ku řešení rovnice stupně třetího

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

dáme-li této formu rovnice (γ).

Za tím účelem transformujme rovnici (1), aby kořeny její staly se λ-násobnými.

Tím přemění se v rovnici

$$(2) \qquad x^3 + p\lambda^2 x + q\lambda^3 = 0.$$

Má-li tato rovnice míti formu rovnice (γ), jest třeba, aby platilo:

$$\begin{aligned} -3b &= p\lambda^2, \\ b^2 + b &= q\lambda^3. \end{aligned}$$

Z těchto dvou rovnic plyne vyloučením b rovnice pro λ jež zní:

$$\lambda^2 - \frac{9q}{p^2}\lambda - \frac{3}{p} = 0,$$

z níž

(3) $$\lambda = \frac{9q}{2p^2} \pm \sqrt{\frac{81q^2}{4p^4} + \frac{3}{p}}$$

čili

$$\lambda = \frac{9}{p^2}\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right),$$

při čemž možno voliti znaménko buď horní aneb dolní.

Poněvadž

$$b = -\frac{p\lambda^2}{3},$$

jsou kořeny rovnice (2) dle (β) dány vzorcem:

$$x = -\varepsilon\sqrt[3]{-\frac{p\lambda^2}{3}} - \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{p^2\lambda^4}{9}},$$

a protože kořeny rovnice (1) jsou λ-kráte menší, jsou tyto:

$$x = -\varepsilon\sqrt[3]{-\frac{p}{3\lambda}} - \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{p^2\lambda}{9}}.$$

Položíme-li v tomto vzorci za λ hodnotu (3), na př. se znaménkem horním, nabývají kořeny tvaru:

$$x = \varepsilon\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Poněvadž ε má trojí hodnotu, jsou všechny tři kořeny rovnice (1), vyjádřeny vzorcem předchozím.

Ve výrazu pro x třetí odmocnině

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

možno přisouditi opět kteroukoliv ze tří hodnot; přisoudíme-li jí určitou hodnotu, pak v témže výrazu vyskytující se odmocnina

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

není již libovolna.

To patrno z hodnot, patřícím λ-násobným kořenům rovnice (1), t. j. z hodnot:

$$-\varepsilon\sqrt{-\frac{p\lambda^2}{3}}-\varepsilon^2\sqrt{\frac{p^2\lambda^4}{9}}.$$

Výrazu $\sqrt[3]{-\frac{p\lambda^2}{3}}$ možno dáti kteroukoli ze tří hodnot; přisoudíme-li mu jednu hodnotu, pak $\sqrt[3]{\frac{p^2\lambda^4}{3}}$ jest tím již stanovena a rovná se čtverci prvé, jak z rovnice (α) patrno.

Je-li tedy λ realné, volme za $\sqrt[3]{-\frac{p\lambda^2}{3}}$ hodnotu realnou a pak jest i realnou hodnota $\sqrt[3]{\frac{p^2\lambda^4}{9}}$.

Platí-li tedy

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0,$$

t. j., jsou-li kořeny λ realné a položíme-li za

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

realnou hodnotu A, pak jest i realnou

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

již označme B.

Tu pak

$$x=\varepsilon A+\varepsilon^2 B.$$

Při hodnotách

$$\varepsilon = 1, \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

obdržíme kořeny

$$x_1 = A + B, \quad x_2 = -\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} i\sqrt{3},$$

$$x_3 = -\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} i\sqrt{3}.$$

Kdybychom zvolili za λ hodnotu se znaménkem dolním ze vzorce (3), dospěli bychom k týmže hodnotám.

Jsou-li kořeny λ komplexní, t. j., platí-li

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

tu lze snadno ukázati, že rovnice (1) má všechny tři kořeny realné, kteréž řešením naším lze funkcemi goniometrickými vyjádřiti.

Uvedeme-li λ na kanonický tvar

$$\lambda = \varrho\,(\cos\varphi \pm i \sin\varphi),$$

pak modul

$$\varrho = \sqrt{\frac{81q^2}{4p^4} - \frac{81q^2}{4p^4} - \frac{3}{p}} = \sqrt{-\frac{3}{p}},$$

$$\cos\varphi = \frac{9q}{2p^2}\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad \sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{81q^2}{4p^4} + \frac{3}{p}} \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Ve výrazu

$$-\varepsilon\sqrt[3]{-\frac{p\lambda^2}{3}} - \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{p^2\lambda^4}{9}},$$

kterýž značí λ-násobné kořeny rovnice (1), možno opět za $\sqrt[3]{-\frac{p\lambda^2}{3}}$ vzíti kteroukoli ze tří hodnot, volíme-li ale určitou hodnotu, pak $\sqrt[3]{\frac{p^2\lambda^4}{9}}$ není již libovolnou, nýbrž je čtvercem odmocniny prvé.

Vezmeme-li za λ jednu z hodnot v kanonickém tvaru, na př.

$$\lambda = \sqrt{-\frac{3}{p}}(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

pak

$$\sqrt[3]{-\frac{p\lambda^2}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}\cdot\frac{-3}{p}(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)}$$

$$= \sqrt[3]{\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi}.$$

Za $\sqrt[3]{\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi}$ volme jednu ze tří hodnot, na př.

$$\cos\frac{2\varphi}{3} + i\sin\frac{2\varphi}{3};$$

pak

$$\sqrt[3]{\frac{p^2\lambda^4}{9}} = \cos\frac{4\varphi}{3} + i\sin\frac{4\varphi}{3}.$$

Jsou tedy kořeny rovnice (1) dány výrazem

$$x = -\frac{\varepsilon\left(\cos\frac{2\varphi}{3} + i\sin\frac{2\varphi}{3}\right) + \varepsilon^2\left(\cos\frac{4\varphi}{3} + i\sin\frac{4\varphi}{3}\right)}{\cos\varphi + i\sin\varphi}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Tu značí ε kteroukoli ze tří hodnot $\sqrt[3]{1}$ a tudíž $\varepsilon = e^{-\frac{2\pi k}{3}i}$, kdež za k klademe buď 0, 1, 2 aneb 0, -1, -2; ε^2 jest konjugovaná hodnota k hodnotě ε a možno proto klásti $\varepsilon^2 = e^{\frac{2\pi k}{3}i}$, klademe-li $\varepsilon = e^{-\frac{2\pi k}{3}i}$.

Zavedeme-li hodnoty tyto do rovnice pro x, nabudeme

$$x = -\left(e^{-\frac{2k+\pi\varphi}{3}i} + e^{\frac{2k\pi+\varphi}{3}i}\right)\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

t. j.

$$x = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3},$$

při čemž za k klademe 0, 1, 2 aneb 0, -1, -2.

Kdybychom za λ volili hodnotu

$$\lambda = \sqrt{-\frac{3}{p}}\ (\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

tu dospěli bychom k téže hodnotě pro x, při čemž $\cos\varphi$ opět stanoven byl touže podmínkou jako dříve, t. j.

$$\cos\varphi = \frac{9q}{2p}\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad \text{avšak} \quad \sin\varphi = -\sqrt{\frac{81q^2}{4p^4} + \frac{3}{p}}\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

kdežto dříve $\sin\varphi$ byl znaménka protivného.

Není tedy nutno přihlížeti k podmínce, kterou jest funkce $\sin\varphi$ stanovena a k řešení rovnice (1) jest tedy jen nutno nalézti úhel, jehož

$$\cos\varphi = \frac{9q}{2p^2}\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

a pak kořeny rovnice jsou dány výrazem

$$x = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3},$$

t. j.

$$x_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\varphi,$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(60^0 - \varphi),$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(60^0 + \varphi).$$