Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Velísek

O jistém druhu ploch

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 4, 446--456

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124041

Tento výraz může vymizeti patrně pouze při $\varepsilon_2 = +1$, t. j. pro diskriminanty tvaru $D = 8k + 1$; vymizí skutečně pro $D = 17$.

Je-li D kmenné číslo, budou všecka ε_ν od nully různa, a budou $s_{2\alpha}$ čísla sudá, $s_{2\alpha+1}$ čísla lichá. Aby

$$\sum_{n+1}^{n'} \varepsilon_\nu s_\nu = 0,$$

musí intervall $(n \ldots n' + 0)$ obsahovati sudý počet lichých čísel.

V našem případě máme intervall $(k + 0, 3k + 0)$; ten obsahuje sudý počet lichých čísel jen při sudém k, a tedy pro kmenné diskriminanty může součet (21) vymizeti jen tehdy, jsou-li tvaru $D = 16\,k + 1$. Takový jest po $D = 17$ nejblíže vyšší $D = 97$, pro nějž součet (21) má hodnotu 8.

O některých dalších konsekvencích vzorce (19) a o vztazích podobných pojednáno bude na jiném místě. Zde jenom buď ještě poznamenáno, že v případě kladného diskriminantu D a pro $n = \left[\frac{D}{2}\right]$ je

$$s_n = 0, \quad \varphi(D, n) = \tfrac{1}{2}\varphi(D),$$

a tedy pro veškery kladné diskriminanty

$$\sum_{\nu=1}^{[\frac{1}{2}D]} \varepsilon_\nu s_\nu = \tfrac{1}{4}\varphi(D).$$

O jistém druhu ploch.

Dr. Frant. Velísek.

Ke každému systému čar na ploše náleží nekonečné množství křivek jiného systému, dělících s prvními plochu v infinitesimální rhomby. Je-li totiž element oblouku

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,dudu + g\,dv^2,$$

a přejde-li substitucí

$$u_1 = u, \; v_1 = \psi(u, v)$$

do tvaru

$$ds^2 = e_1 (du_1^2 + dv_1^2) + 2f_1 du_1 dv_1,$$

obdržíme srovnáním

$$e = e_1 (1 + \psi_u^2) + 2\psi_u f_1, \quad f = e_1 \psi_u \psi_v + f_1 \psi_v, \quad g = e_1 \psi_v^2.$$

Eliminací e_1, f_1 obdržíme rovnici pro funkci ψ

$$e \psi_v^2 - 2f \psi_u \psi_v + g \psi_u^2 = g.$$

Rovněž tak obdržíme pro substituci

$$u_2 = \varphi(u, v), \quad v_2 = v$$

rhombické dělení, splňuje-li φ rovnici

$$e \varphi_v^2 - 2f \varphi_u \varphi_v + g \varphi_u^2 = e.$$

Tvoří-li i původní čáry systém rhombický, zachovávají vlastnost tu i čáry u_1, v_1. Úhel čar u_1, v_1 nechť se rovná úhlu čar u, v, a geodetická křivost čáry transformované budiž vždy resp. rovnou geodetické křivosti čáry původní.

Existují plochy, na nichž by jeden systém čar takto definovaných tvořil čáry asymptotické?

Budiž lineární element vyjádřen parametry čar asymptotických u, v. Dle daných předpokladů jest pak

$$e = g = \varepsilon^2, \quad f = \varepsilon^2 \cos \omega,$$

kde ω úhel souřadný.

Rovnice pro ψ a φ přecházejí ve tvary

$$\psi_v^2 - 2\psi_u \psi_v \cos \omega + \psi_u^2 = 1, \quad \varphi_v^2 - 2\varphi_u \varphi_v \cos \omega + \varphi_u^2 = 1. \tag{1}$$

Uhel sevřený čarami $u_1 = konst$, $v_1 = konst$ dán s ohledem na rovnice 1. výrazem

$$\sin \omega = \pm \sin \omega (\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u), \text{ tudíž}$$

$$\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u = \pm 1. \tag{2}$$

Aby čáry $u = konst$, $v = konst$ byly asymptotickými, musí býti splněna rovnice (Darboux III, 283)

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\cos \omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}}{\varepsilon \sin^2 \omega} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\cos \omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}}{\varepsilon \sin^2 \omega}. \tag{3}$$

Z obecných rovnic pro geodetickou křivost čar na ploše

$$\frac{1}{\varrho_u}=\frac{1}{\sqrt{eg-f^2}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{f}{\sqrt{g}}-\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right],\ \frac{1}{\varrho_v}=\frac{1}{\sqrt{eg-f^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{f}{\sqrt{e}}-\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right]$$

jde

$$\frac{1}{\varrho_u}=\frac{1}{\varepsilon^2 \sin\omega}\left[\frac{\partial(\varepsilon\cos\omega)}{\partial v}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}\right],$$

$$\frac{1}{\varrho_v}=\frac{1}{\varepsilon^2 \sin\omega}\left[\frac{\partial(\varepsilon\cos\omega)}{\partial u}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial v}\right],$$

$$\frac{1}{\varrho_\varphi}=\frac{1}{\varepsilon^2 \sin\omega}\left[\frac{\partial}{\partial u}\,\varepsilon\,(\varphi_v\cos\omega-\varphi_u)+\frac{\partial}{\partial v}\,\varepsilon\,(\varphi_u\cos\omega-\varphi_v)\right]$$

$$\frac{1}{\varrho_\psi}=\frac{1}{\varepsilon^2 \sin\omega}\left[\frac{\partial}{\partial u}\,\varepsilon\,(\psi_v\cos\omega-\psi_u)+\frac{\partial}{\partial v}\,\varepsilon\,(\psi_u\cos\omega-\psi_v)\right].$$

Čáry zachovávají geodetickou křivost, platí-li rovnice

$$\frac{\partial}{\partial u}\,\varepsilon\,(\psi_v\cos\omega-\psi_u)+\frac{\partial}{\partial v}\,\varepsilon\,(\psi_u\cos\omega-\psi_v)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial u}(\varepsilon\cos\omega)-\frac{\partial\varepsilon}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\,\varepsilon\,(\varphi_v\cos\omega-\varphi_u)+\frac{\partial}{\partial v}\,\varepsilon\,(\varphi_u\cos\omega-\varphi_v)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial v}(\varepsilon\cos\omega)-\frac{\partial\varepsilon}{\partial u},$$

neb

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\,\varepsilon\,(\psi_v\cos\omega-\psi_u-\cos\omega)&=\frac{\partial}{\partial v}\,\varepsilon\,(\psi_v-\psi_u\cos\omega-1)\\ \frac{\partial}{\partial u}\,\varepsilon\,(\varphi_v\cos\omega-\varphi_u+1)&=\frac{\partial}{\partial v}\,\varepsilon\,(\cos\omega-\varphi_u\cos\omega+\varphi_v)\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Eliminací $\cos\omega$ z rovnic 1. jde

$$\frac{\psi_u^2+\psi_v^2-1}{\psi_u\psi_v}=\frac{\varphi_u^2+\varphi_v^2-1}{\varphi_u\varphi_v}\ \text{neb}$$

$$(\varphi_u\psi_u-\varphi_v\psi_v)\,(\varphi_v\psi_u-\varphi_u\psi_v)=\varphi_u\varphi_v-\psi_u\psi_v.$$

Vzhledem k rovnici 2. obdržíme jako obecné řešení

$$\varphi_u=\psi_v,\ \varphi_v=\frac{\psi_v^2-1}{\psi_u}\ \text{neb}\ \varphi_u=\frac{-\psi_u^2+1}{\psi_v},\ \varphi_v=-\psi_u.$$

V obou případech obdržíme pro určení funkcí φ a ψ touž rovnici. Položíme-li totiž v prvním případě

$$\varphi = \varrho_v, \ \psi = \varrho_u,$$

v druhém

$$\varphi = -\varrho_u, \ \psi = \varrho_v,$$

plyne pro ϱ rovnice

$$\varrho_{uv}^2 - \varrho_{uu}\varrho_{vv} = 1.$$

Obecný integrál rovnice obdržíme eliminací α z rovnic

$$\varrho = uv - \alpha u + F(2v - \alpha) + F_1(\alpha),$$

$$u - F_1'(\alpha) + F'(2v - \alpha) = 0.$$

Z toho buď

$$\psi = v - \alpha, \quad \varphi = u + 2F'(2v - \alpha),$$

neb

$$\varphi = -v + \alpha, \quad \psi = u + 2F'(2v - \alpha).$$

Dávají tedy obě řešení týž systém čar. Použijeme řešení prvního

$$\psi = v - \alpha = \varrho_u, \quad \varphi = u + 2F'(2v - \alpha) = \varrho_v \tag{5}$$

Rovnice 4. jsou splněny, klademe-li

$$\varepsilon(\varphi_v \cos\omega - \psi_u - \cos\omega) = \tau_v, \quad \varepsilon(\psi_v - \psi_u\cos\omega - 1) = \tau_u,$$

$$\varepsilon(\varphi_v \cos\omega - \varphi_u + 1) = \sigma_v, \quad \varepsilon(\cos - \omega\,\varphi_u \cos\omega + \varphi_v) = \sigma_u.$$

Poněvadž se dá psáti

$$\psi_v - \psi_u \cos\omega - 1 = \frac{\psi_v^2 - 2\psi_v - \psi_u^2 + 1}{2\psi_v},$$

$$\psi_v \cos\omega - \psi_u - \cos\omega = \frac{(\psi_v + 1)(\psi_v^2 - 2\psi_v - \psi_u^2 + 1)}{2\psi_u\psi_v},$$

a analogicky pro φ, obdržíme z předchozích rovnic

$$\frac{\tau_v}{\tau_u} = \frac{\psi_v + 1}{\psi_u}, \quad \frac{\sigma_v}{\sigma_u} = \frac{\varphi_v}{\varphi_u + 1}.$$

Pak

$$\varepsilon = \frac{\tau_u}{\psi_v - \psi_u \cos\omega - 1}.$$

Dle rovnice 5. lze rovnice tyto psáti ve tvaru

$$\frac{\tau_v}{\tau_u} = \frac{\alpha_v - 2}{\alpha_u}, \quad \frac{\sigma_v}{\sigma_u} = \frac{\alpha_v}{\alpha_u},$$

tudíž

$$\tau = f_1(2v - \alpha), \quad \sigma = f_2(\alpha).$$

Srovnáním dvou výrazů pro ε obdržíme vztah mezi τ a σ

$$\frac{\tau_u}{\psi_v - \psi_u \cos\omega - 1} = \frac{\sigma_u}{\cos\omega - \varphi_u \cos\omega + \varphi_v},$$

a dosadíme-li za φ a ψ

$$\frac{f_1'}{\alpha_u^2 - \alpha_v^2} = \frac{\alpha_u f_2'}{\alpha_v[(2-\alpha_v)^2 - \alpha_u^2]}.$$

Z toho

$$\frac{f_1'}{f_2'} = \frac{\alpha_u(\alpha_u^2 - \alpha_v^2)}{\alpha_v[(2-\alpha_v)^2 - \alpha_u^2]} = A.$$

Derivace dle u, resp. dle v dávají

$$\frac{f_1''}{f_2'} + \frac{f_1' f_2''}{f_2'^2} = -\frac{A_u}{\alpha_u}, \quad \frac{2f_1''}{f_2'} - \left(\frac{f_1''}{f_2'} + \frac{f_1' f_2''}{f_2'^2}\right)\alpha_v = A_v.$$

Z toho

$$\frac{f_1''}{f_1'} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log A}{\partial v} - \frac{\alpha_v}{\alpha_u}\frac{\partial \log A}{\partial u}$$

$$\frac{f_2''}{f_2'} = \frac{1}{\alpha_u}\left(\frac{\alpha_v}{2} - 1\right)\frac{\partial \log A}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log A}{\partial v}.$$

Poněvadž pak z podmínečné rovnice pro funkce F, F_1 jde

$$\alpha_u = \frac{1}{F'' + F_1''}, \quad \alpha_v = \frac{2F''}{F'' + F_1''},$$

obdržíme substitucí těchto výrazů z rovnic hořejších

$$A = \frac{1 - 4F''^2}{2F''(4F_1''^2 - 1)},$$

$$\frac{\partial \log A}{\partial u} = \frac{4F''^2 F''' + F'''}{F''(F'' + F_1'')(1 - 4F''^2)} - \frac{8F_1'' F_1'''}{(F'' + F_1'')(4F_1''^2 - 1)}$$

$$\frac{\partial \log A}{\partial v} = -\frac{2F_1'' F''' + \partial F''^2 F_1'' F'''}{F''(F_1'' + F'')(1 - 4F''^2)} -$$

$$- \frac{16F''F_1''F_1'''}{(F'' + F_1'')(4F_1''^2 - 1)}.$$

Po jednoduché úpravě pak

$$\frac{f_1''}{f_1'} = \frac{1 + 4F''^2}{F''(4F''^2 - 1)}, \quad \frac{f_2''}{f_2'} = \frac{8F_1'' F_1'''}{4F_1''^2 - 1}.$$

Tudíž

$$f_1' = C\,\frac{4F''^2 - 1}{F''}, \quad f_2' = 2C(1 - F_1''^2),$$

kde C konstanta.

Z toho

$$\varepsilon = \frac{2C(F_1'' - F'')}{F''}, \quad \cos\omega = \frac{4F''F_1'' - 1}{2(F_1'' - F'')}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice 3, obdržíme pomocí výrazů

$$\frac{\partial \log \varepsilon}{\partial u} = \frac{F''F_1''' + F_1''F'''}{F''(F_1''^2 - F''^2)}, \quad \frac{\partial \log \varepsilon}{\partial v} = 2\,\frac{F''^2 F_1''' - F_1''^2 F'''}{F''(F_1''^2 - F''^2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{F_1''F_1'''(4F''^2 - 1) - F_1''F'''(4F_1''^2 - 1)}{(F'' + F_1'')(4F''^2 - 1)(1 - 4F_1''^2)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{F_1''F'''(4F_1''^2 - 1) + F''F_1'''(4F''^2 - 1)}{2F''(F'' + F_1'')(4F''^2 - 1)(1 - 4F_1''^2)}.$$

Provedeme-li naznačené výkony, obdržíme po příslušné redukci

$$F^{IV}\,\frac{F_1''(F'' + F_1'')(4F''F_1'' - 1)}{F''(4F''^2 - 1)} +$$

$$+ F_1^{IV}\,\frac{(F'' + F_1'')(4F''F_1'' - 1)}{1 - 4F_1''^2} +$$

$$+ F'''F_1'''\left(\frac{4F''^2 + 1}{4F''^2 - 1} - \frac{1 + 4F_1''^2}{1 - 4F_1''^2}\right) +$$

$$+ F_1'''^2\left[\frac{4F''(F_1'' + F'')}{1 - 4F_1''^2} + 8\,\frac{F_1''(F'' + F_1'')(4F''F_1'' - 1)}{(1 - 4F_1''^2)^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{4F''F_1'' - 1}{1 - 4F_1''^2}\right] + F_1''F'''\left[\frac{F'' + F_1''}{F''^2(4F''^2 - 1)} -\right.$$

$$\left. - \frac{4F''F_1'' - 1}{F''(4F''^2 - 1)} - 8\,\frac{(F'' + F_1'')(4F''F_1'' - 1)}{(4F''^2 - 1)^2}\right] = 0.$$

Rovnice musí býti identicky splněna, ježto α jest funkcí u. Upravíme-li rovnici do tvaru

$$A F_1''^3 + B F_1''^2 + C F_1''' + A_1 F'' + D F_1'' +$$
$$+ C_1 F'' + D_1 F''^2 + B_1 = 0,$$

kde A, B, C, D jsou funkce F, A_1, B_1, C_1, D_1 funkce F_1, plyne, že může býti jen

$$F'' = k, \text{ neb } F_1 = k,$$

kde k konstanta.

Pro $F'' = k$ redukuje se rovnice na

$$F_1^{IV} + F_1''' \left[\frac{4k}{4k F_1'' - 1} + \frac{8 F_1''}{1 - 4F_1''^2} - \frac{1}{k + F_1''} \right] = 0.$$

Z toho

$$F_1''' \frac{4k F_1'' - 1}{(1 - 4F_1''^2)(k + F_1'')} = k_1.$$

a další integrací

$$(k + F_1'')^{\frac{4k^2+1}{4k^2-1}} (1 - 2F_1'')^{\frac{1}{2} \frac{1-2k}{1+2k}} (1 + 2F_1'')^{\frac{1}{2} \frac{1+2k}{1-2k}} = k_2 e^{k_1 \alpha},$$

kde k_1, k_2 jsou integrační konstanty.

Použije-li se vztahu

$$\frac{dF_1'}{d\alpha} = F_1'',$$

jde jako integrál

$$(k + F_1'')^{-k \frac{4k^2+1}{4k^2-1}} (1 - 2F_1'')^{-\frac{1}{4} \frac{2k-1}{2k+1}} (1 + 2F_1'')^{-\frac{1}{4} \frac{1+2k}{1-2k}}$$
$$= konst\ e^{k_1 F_1'}.$$

Kombinací s předchozí rovnicí dostaneme

$$(1 - 2F_1'')^{2k-1} (1 + 2F_1'')^{2k+1} = C \,.\, e^{C_1(k\alpha + F_1')}.$$

Vzhledem na rovnici

$$F_1' = u + F'$$

možno psáti

$$(1 + 2F_1'')^{2k+1} (1 - 2F_1'')^{2k-1} = C\, e^{C_1(u + 2kv)}.$$

Rovnicí touto určena jest funkce F_1.

Pro $F_1'' = k$ obdržíme

$$F^{IV} + F'''^2 \left[\frac{1}{F''(4k F'' - 1)} - \frac{1}{k + F''} - \frac{8F''}{4F''^2 - 1} \right] = 0.$$

Značí-li k_1, k_2 integrační konstanty, dává integrace

$$F''^{\frac{1}{k^2}} (k + F'')^{\frac{1+4k^2}{k(4k^2-1)}} (2F'' - 1)^{\frac{2k-1}{2k+1}} (2F'' + 1)^{\frac{2k+1}{1-2k}} = k_2 e^{k_1(2v - \alpha)}$$

neb použijeme-li vztahu

$$\frac{dF'}{d(2v-\alpha)} = F''$$

$$(k+F'')^{-\frac{1+4k^2}{4k^2-1}}(2F''-1)^{\frac{1}{2}\frac{2k-1}{2k+1}}(2F''+1)^{-\frac{1}{2}\frac{2k+1}{1-2k}} =$$

$$= konst.\, e^{k_1 F'}.$$

Ve spojení s předešlou rovnicí dává rovnice tato:

$$F''^2(2F''-1)^{2k-1}(2F''+1)^{-(2k+1)} = C.e^{C_1[k(2v-\alpha)+F']}.$$

Poněvadž pak dle rovnice $F_1' = u + F'$ jest

$$F' = k\alpha - u,$$

možno psáti rovnici určující F ve tvaru

$$F''^2(2F''-1)^{2k-1}(2F''+1)^{-(2k+1)} = C\,e^{C_1(2kv-u)}.$$

Pomocí známých funkcí F, F_1 určíme α, a tím i transformační funkce φ, ψ. Pro specielní hodnoty k vycházejí výsledky dosti složité.

Případ $k=0$ jest illusorní, ježto čáry souřadné přecházejí samy v sebe.

Pro

$$\cos\omega = 0$$

by bylo dle základních rovnic

$$\varphi_u = \psi_v, \quad \varphi_v = -\psi_u,$$

pak by ϱ muselo splňovati rovnice

$$\varrho_{uv}^2 - \varrho_{uu}\varrho_{vv} = 1, \quad \varrho_{uu} + \varrho_{vv} = 0.$$

Rovnici druhé hoví pro reelní ϱ reelní část každé funkce komplexní proměnné $F(u+iv) + F_1(u-iv)$, při čemž rovnice první jest splněna, platí-li

$$4F''F_1'' = 1.$$

Plochy jsou v tomto případě minimalními.

Mají-li čáry asymptotické konstantní geodetickou křivost $-c$, $-c_1$, obdržíme z rovnic

$$c\sqrt{eg-f^2} = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{g} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{f}{\sqrt{g}}, \quad c_1\sqrt{eg-f^2} = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{f}{\sqrt{e}},$$

$$c\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-\chi^2} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial u} - \frac{\partial\chi}{\partial v}, \quad c_1\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-\chi^2} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial u},$$

kde

$$f = \chi\varepsilon = \varepsilon^2\cos\omega.$$

Poslední rovnice svým tvarem ukazují, že lineární substitucí možno je zjednodušiti. Píšeme-li totiž

$$c c_1 \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - \chi^2} = c_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - c\frac{\partial \chi}{\partial v} = c\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - c_1\frac{\partial \chi}{\partial u},$$

obdržíme

$$\frac{\partial}{\partial u}(c_1\varepsilon + c\chi) = \frac{\partial}{\partial v}(c\varepsilon + c_1\chi),$$

a při

$$c_1^2 \gtrless c^2, \quad c_1\varepsilon + c\chi = \Phi_v, \quad c\varepsilon + c_1\chi = \Phi_u,$$

$$\varepsilon = \frac{c_1\Phi_v - c\Phi_u}{c_1^2 - c^2}, \quad \chi = \frac{c_1\Phi_u - c\Phi_v}{c_1^2 - c^2}.$$

Položíme-li pak

$$u_1 = c_1 u + cv, \quad v_1 = cu + c_1 v,$$

dostaneme

$$(c_1^2 - c^2)\varepsilon = (c_1^2 - c^2)\Phi_{v_1}, \quad (c_1^2 - c^2)\chi = (c_1^2 - c^2)\Phi_{u_1}.$$

Dosazeno do rovnic předchozích dává

$$\Phi_{v_1}\sqrt{\Phi_{v_1}^2 - \Phi_{u_1}^2} = \Phi_{v_1v_1} - \Phi_{u_1u_1}.$$

Rovnice 3. přejde pro parametry u_1, v_1 do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\frac{\Phi_{u_1}\Phi_{v_1v_1} - \Phi_{v_1}\Phi_{u_1v_1}}{\Phi_{v_1}^2 - \Phi_{u_1}^2} = \frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\Phi_{u_1}\Phi_{u_1v_1} - \Phi_{v_1}\Phi_{v_1v_1}}{\Phi_{v_1}^2 - \Phi_{u_1}^2};$$

nebo

$$\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}\log\frac{\Phi_{v_1} - \Phi_{u_1}}{\Phi_{v_1} + \Phi_{u_1}} + \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial v_1}\log(\Phi_{v_1}^2 - \Phi_{u_1}^2) = 0.$$

Označíme-li U funkci proměnné u_1, obdržíme

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\log\frac{\Phi_{v_1} - \Phi_{u_1}}{\Phi_{v_1} + \Phi_{u_1}} + \frac{\partial}{\partial u_1}\log(\Phi_{v_1}^2 - \Phi_{u_1}^2) = \log U.$$

Rozvinuto dává rovnici

$$\Phi_{u_1}\frac{\Phi_{v_1v_1} - \Phi_{u_1u_1}}{\Phi_{v_1}^2 - \Phi_{u_1}^2} = \frac{1}{2}\log U = U_1,$$

která s předešlou

$$\Phi_{v_1v_1} - \Phi_{u_1u_1} = \Phi_{v_1}\sqrt{\Phi_{v_1}^2 - \Phi_{u_1}^2}, \tag{6}$$

určuje funkci Φ. Dosadíme-li z poslední rovnice do předešlé za $\Phi_{v_1v_1} - \Phi_{u_1u_1}$, obdržíme

$$\frac{\Phi_{u_1}\Phi_{v_1}}{\sqrt{\Phi_{v_1}^2 - \Phi_{u_1}^2}} = U_1. \tag{7}$$

Differencováním dle v_1 plyne

$$\Phi^3_{v_1}\Phi_{u_1 v_1} - \Phi^3_{u_1}\Phi_{v_1 v_1} = 0,$$

kterážto diff. rovnice Laplace-ovou transformací snadno se integruje. Výhodnějším jest však použití funkcí hyperbolických. Položme v rovnici (7.), psané ve tvaru

$$\frac{U_1^2}{\Phi^2_{u_1}} - \frac{U_1^2}{\Phi^2_{v_1}} = 1,$$

$$\frac{U_1}{\Phi_{u_1}} = \cos h\, \tau, \qquad \frac{U_1}{\Phi_{v_1}} = \sin h\, \tau.$$

Vyjádříme-li podmínku integrability a dosadíme do rovnice (6.), dostaneme výrazy

$$U_1 \cos h^3 \tau \frac{\partial \tau}{\partial u_1} - U_1 \sin h^3 \tau \frac{\partial \tau}{\partial v_1} = U_1' \sin h\, \tau \cos h^2 \tau,$$

$$U_1 \sin h^3 \tau \frac{\partial \tau}{\partial u_1} - U_1 \cos h^3 \tau \frac{\partial \tau}{\partial v_1} = U_1' \cos h\, \tau \sin h^3 \tau + U_1^2 \cos h\, \tau.$$

Determinant koefficientů

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_1}, \frac{\partial \tau}{\partial v_1} \text{ jest}$$

$$-U_1^2(\cos h^6 \tau - \sin h^6 \tau) = -U_1^2(1 + 3 \sin h^2 \tau \cos h^2 \tau),$$

a nerovná se tudíž 0. Řešením rovnic jde

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_1} = \frac{U_1' \sin h\, \tau \cos h^5 \tau - U_1' \cos h\, \tau \sin h^5 \tau - U_1^2 \sin h^3 \tau \cos h\, \tau}{U_1'(\cos h^6 \tau - \sin h^6 \tau)},$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial v_1} = -\frac{U_1' \sin h^2 \tau \cos h^2 \tau + U_1^2 \cos h^4 \tau}{U_1(\cos h^6 \tau - \sin h^6 \tau)}.$$

Vyjádříme-li podmínku integrability, dostaneme po příslušné redukci

$$3U_1'^2 \sin h^2 \tau \cos h^2 \tau + U_1^2 U_1'(1 - 3 \sin h^2 \tau \cos h^2 \tau) -$$
$$- 3U_1^4 \cos h^4 \tau - U_1 U_1''(1 + 3 \sin h^2 \tau \cos h^2 \tau) = 0,$$

nebo

$$\sin h^4 \tau (3U_1'^2 - 3U_1^2 U_1' - 3U_1 U_1'') + \sin h^2 \tau (3U_1'^2 - 3U_1^2 U_1' -$$
$$- 3U_1 U_1'' - 3U_1^4) + U_1^2 U_1' - 3U_1^4 - U_1 U_1'' = 0.$$

Nemá-li býti τ funkcí jen u_1, musí býti rovnice identicky splněna. Je-li však

$$3U_1'^2 - 3U_1^2 U_1' - 3U_1 U_1'' - 3U_1^4 = 0,$$

redukuje se rovnice na

$$3U_1^4 \sin h^2 \tau + U_1^2 U_1' - 3U_1^4 - U_1 U_1'' = 0.$$

Muselo by tedy býti $U_1 = 0$; v tomto případě jest však substituce nemožnou. Rovnice (6.) a (7.) dávají pak

$$\Phi_{v_1 v_1} - \Phi_{u_1 u_1} = \Phi_{v_1} \sqrt{\Phi_{v_1}^2 - \Phi_{u_1}^2}, \quad \Phi_{u_1} \Phi_{v_1} = 0.$$

Pro

$$\Phi_{u_1} = 0 \text{ jest } \Phi = f(v_1),$$

$$f''(v_1) = f'^2(v_1).$$

Z toho

$$f(v_1) = C - l(v_1 + C_1),$$

kde C, C_1 konstanty. Tudíž

$$\Phi = C - l(v_1 + C_1).$$

Pro

$$\Phi_{v_1} = 0 \quad \text{jest } \Phi = Cu_1 + C_1.$$

Za předpokladu, že τ jest funkcí u_1, obdržíme:

$$\Phi_{u_1 v_1} = \frac{U_1'}{\sin h \tau} - \frac{U_1}{\sin h^2 \tau} \cos h \tau \frac{\partial \tau}{\partial u_1} = 0.$$

Z toho

$$\Phi = \frac{U_1}{\sin h \tau} v_1 + f(u_1), \text{ kde}$$

$$f'(u_1) = \frac{U_1}{\sqrt{1 + C^2 U_1^2}};$$

U_1 jest pak určeno rovnicí

$$U_1'' + 2U_1 U_1' = 0,$$

tudíž

$$\Phi = Cv_1 + \cos C(C_1 - u_1).$$

Řešení podává tedy plochy velmi speciální.