Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

O minimu forem kvadratických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 4, 485--487

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124032

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1911

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O minimu forem kvadratických.

Napsal K. Petr.

Budiž dána kvadratická forma

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \dots \quad + a_{nn}x_n^2$$

o n proměnných $x_1, x_2, \dots x_n$. Proměnné nabývejtež jenom celistvé hodnoty (kladné, záporné, po případě i nullové; vyjmut je toliko případ, kde všecky proměnné se rovnají současně nulle). Pro jeden systém (po případě i pro více) přípustných hodnot nabývá daná kvadratická forma nejmenší hodnoty absolutní. O této nejmenší hodnotě dokázal *Hermite* *), že jest menší nežli číslo

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{|D|}, \qquad |D| > 0,$$

kde D jest diskriminant dané kvadratické formy.

Důkaz provádí na základě obecné indukce pomocí t. zv. přidružené formy. Jiný důkaz podali později *Korkine* a *Zolotarev* **).

V následujícím podán důkaz toho tvrzení rovněž úplnou indukcí zcela jednoduchý a prostředky zcela elementárnými. Budiž ε_n kladný numerický koefficient závislý na n, který teprve později stanovíme a hleďme dokázati, že abs. hodnota minima kvadratické formy o n proměnných jest menší než $\varepsilon_n \sqrt[n]{|D|}$, předpokládajíce, že abs. hodnota minima kvadratické formy o $n-1$ proměnných jest menší než $\varepsilon_{n-1}\sqrt[n-1]{|D|}$. Dejme tomu, že by existovaly kvadratické formy o n proměnných, kde by abs. hodn. minima byla větší nebo rovna, nežli $\varepsilon_n\sqrt[n]{|D|}$. Lineárnou transformací proměnných o celistvých koefficientech a o determinantu 1 převeďme takovou kvadratickou formu na ekvivalentní a zároveň takovou, aby a_{11} bylo právě ono minimum kvadratické formy. Jest tedy dle supposice

$$|a_{11}| \geqq \varepsilon_n \sqrt[n]{|D|}. \tag{1}$$

*) Extraits de lettres de M. Ch. *Hermite* sur différents objets de la théorie des nombres. Journ. f. reine und ang. Math. 40. (1850.) p. 223; Oeuvres 1., str. 103.

**) V pojednání »Sur les formes quadratiques« Math. Annalen 7. (1873) str. 373.

Pišme tu kvadratickou formu ve tvaru

$$a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3+\ldots\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+\varphi(x_2, x_3, \ldots x_n) \quad (2)$$

$\varphi(x_2, x_3, \ldots x_n)$ jest kvadratická forma o diskriminantu $\frac{D}{a_{11}}$ závislá na $n-1$ proměnných a minimum její dle předpokladu jest menší co do abs. hodn., nežli

$$\varepsilon_{n-1}\sqrt[n-1]{\frac{|D|}{|a_{11}|}}$$

a tudíž dle (1) menší než

$$\varepsilon_{n-1}\sqrt[n-1]{\frac{|D|}{\varepsilon_n\sqrt[n]{|D|}}}=\frac{\varepsilon_{n-1}}{\sqrt[n-1]{\varepsilon_n}}\sqrt[n]{|D|}.$$

Zvolíme-li si v naší kvadratické formě $x_2, x_3, \ldots x_n$ tak, aby $\varphi(x_2, x_3, \ldots x_n)$ nabývala minimum (při čemž $x_2, x_3, \ldots x_n$ nejsou vesměs rovny nulle), x_1 pak tak, aby

$$\left|x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right|\leqq\tfrac{1}{2},$$

vidíme, že kvadratická forma (2) nabývá hodnoty menší co do absolutní hodnoty než

$$\tfrac{1}{4}\,|a_{11}|+\varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_n^{-\frac{1}{n-1}}\sqrt[n]{|D|},$$

což jest menší (po případě rovno) nežli $|a_{11}|$, když

$$\varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_n^{-\frac{1}{n-1}}\sqrt[n]{|D|}=\tfrac{3}{4}\,\varepsilon_n\sqrt[n]{|D|}.$$

Hoví-li tudíž čísla ε_n rovnici

$$\varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_n^{-\frac{1}{n-1}}=\tfrac{3}{4}\,\varepsilon_n,$$

či jinak
$$\varepsilon_{n-1}^{n-1}=(\tfrac{3}{4})^{n-1}\,\varepsilon_n^n, \quad (4)$$

nemůže býti a_{11} minimum kvadratické formy za podmínky (1).

Jelikož u formy kvadratické binární jest jak známo abs. hodnota minima menší nežli

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}\,|D|}$$

a tedy ε_2 můžeme klásti rovno $(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}}$, vyplývá ze (4) pro ε_n rovnost

$$\varepsilon_n=(\tfrac{4}{3})^{\frac{n-1}{2}},$$

což jest hodnota Hermiteova.

Zároveň však lze snadno dovoditi ještě jinou velice důležitou nerovnost pro formy t. zv. positivní redukované*). U forem redukovaných a_{11} jest minimum formy a zároveň jest (vedle jiných podmínek) splněno, že $a_{11} \leqq a_{22} \leqq a_{33} \ldots \leqq a_{nn}$ a že součin

$$a_{11} \cdot a_{22} \ldots a_{nn}$$

má ze všech forem téže třídy, k níž patří právě daná redukovaná forma, nejmenší hodnotu. Dokážeme si, že

$$a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} < \eta_n D,$$

kde η_n jest kladný vhodně volený numerický součinitel, jehož hodnotu později stanovíme. Abychom nerovnost zmíněnou dokázali, předpokládejme její platnost pro formy redukované o $n - 1$ proměnných.

Zaveďme ve (2), kde a_{11} jest již minimum formy (2), lineární substitucí o celistvých součinitelích a o determinantu 1 místo $x_2, x_3, \ldots x_n$ nové proměnné $x'_2, x'_3, \ldots x'_n$ tak, aby forma $\varphi(x_2, \ldots x_n)$ se změnila na redukovanou.

Koefficienty při $x'^2_2, x'^2_3, \ldots$ této redukované formy o $n - 1$ proměnných budou hověti nerovnině

$$b_{22}\, b_{33} \ldots b_{nn} < \eta_{n-1} \cdot \frac{D}{a_{11}}. \tag{5}$$

Zároveň jest dle předcházejícího jasno, že $b_{22} \geqq \frac{3}{4} a_{11}$. Současně učiníme substituci

$$x_1 = x'_1 + \lambda_{12} x'_2 + \ldots + \lambda'_{1n} x'_n,$$

kde celá čísla $\lambda_{12}, \ldots$ tak volíme, aby koeficienty při $x'_2, x'_3 \ldots$ v závorce prvního členu ve (2) byly menší, po případě rovny $\frac{1}{2}$. Tím změní se nám forma (2) ve formu

$$a_{11} x'^2_1 + 2a'_{12} x'_1 x'_2 + a'_{22} x^2_2 + \ldots$$

v níž bude
$$a'_{22} \leqq b_{22} + \tfrac{1}{4} a_{11} \leqq \tfrac{4}{3} b_{22}$$
$$a'_{33} \leqq \tfrac{4}{3} b_{33}, \ldots..$$

a bude tedy dle (5)

$$a_{11}\, a'_{22} \ldots a'_{nn} < (\tfrac{4}{3})^{n-1} \eta_{n-1} D.$$

Tím spíše bude platiti pro formu redukovanou

$$a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} < (\tfrac{4}{3})^{n-1} \eta_{n-1} D.$$

Jelikož $\eta_n = (\frac{4}{3})^{n-1} \eta_{n-1}$

a jelikož, jak z nauky o kvadratických formách jest známo, $\eta_2 = \frac{4}{3}$, jest

$$\eta_n = (\tfrac{4}{3})^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

*) Viz Hermite l. c. str. 262.