Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Čupr

O jistém Fuchsově theorému a zdánlivých singularitách lineárních diferenciálních rovnic

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 3-4, 249--263

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124026

O jistém Fuchsově theorému a zdánlivých singularitách lineárních diferenciálních rovnic.

Karel Čupr.

1. Budeme uvažovati partikulární integrály lineární diferenciální rovnice v okolí singulárního bodu; volme zaň bod $x = 0$. Značme:

$$x^n P_n(x)\, y^{(n)} + x^{n-1} P_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + y P_0(x) = 0, \quad (1)$$

kdež $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$, ... $P_0(x)$ jsou analytické funkce v okolí bodu $x = 0$:

$$\begin{aligned} &P_n(x) = p_{n,0} + p_{n,1}\, x + p_{n,2}\, x^2 + \ldots, \\ &P_{n-1}(x) = p_{n-1,0} + p_{n-1,1} x + p_{n-1,2} x^2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &P_0(x) = p_{0,0} + p_{0,1}\, x + p_{0,2}\, x^2 + \ldots, \\ &p_{n,0} \neq 0. \end{aligned}$$

Fuchs (Crelle Journal Bd. 68, pag. 356) dokázal větu:
Je-li výraz

$$M_0(x) + M_1(x) \log x + \ldots + M_p(x) \log^p x, \quad (2)$$

kdež $1 \leq p \leq n - 1$, partikulárním integrálem rovnice (1), jest jím i koeficient při nejvyšší mocnině $\log x$, t. j. $M_p(x)$. Při tom jsou — jak známo — $M_0(x)$, $M_1(x)$, ... $M_p(x)$ mocninné řady v x násobené jistou mocninou x; není-li mocnitel této mocniny číslo přirozené, nazývejme $M_0(x)$, $M_1(x)$, ... prostě **řadami**.

Naskytá se otázka, který z integrálů patřících ke kořenům determinující rovnice jest oním integrálem $M_p(x)$. Obecně nelze tuto otázku zodpověděti; rozřešíme ji pro ten případ, že integrál (2) patří k některému kořenu determinující rovnice příslušné k diferenciální rovnici (1). Při tom vyplyne řešení úlohy jiné, kterou se rovněž již zabýval Fuchs (Crelle Journal, Bd. 68, pag. 375 až 378), Frobenius (Crelle Journal, Bd. 76, pag. 224—226) a zejména Heffter (Einl. in die Theorie der lin. Diffgl., kapitola II): Stanoviti podmínky nutné a postačující, aby integrál patřící k některému kořenu determinující rovnice obsahoval pouze nižší mocniny $\log x$, než by obecně obsahovati měl, po případě, aby vůbec mocnin $\log x$ neobsahoval. Výsledky našich úvah ukáží se jako jednodušší a přehlednější.

2. Stanovme polynomy:

$$\left.\begin{aligned}
f_0(\varrho) &= p_{0,0} + p_{1,0}\,\varrho + p_{2,0}\,\varrho(\varrho-1) + \ldots + \\
&\quad + p_{n,0}\,\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-n+1), \\
f_1(\varrho) &= p_{0,1} + p_{1,1}\,\varrho + p_{2,1}\,\varrho(\varrho-1) + \ldots + \\
&\quad + p_{n,1}\,\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-n+1), \\
&\vdots \\
f_k(\varrho) &= p_{0,k} + p_{1,k}\,\varrho + p_{2,k}\,\varrho(\varrho-1) + \ldots + \\
&\quad + p_{n,k}\,\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-n+1).
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$f_0(\varrho) = 0$ jest rovnice determinující. Předpokládejme, že má kořeny vesměs různé; ba bez újmy obecnosti, jak z následujícího bude patrno, lze předpokládati, že kořeny tvoří gruppu, t. j. jsou mezi sebou různy jen o celistvá čísla; pišme

$$f_0(\varrho) = (\varrho - a_1)(\varrho - a_2)\ldots(\varrho - a_n),$$

kdež $$a_1 > a_2 > \ldots > a_n,$$

a označme $a_1 - a_k = \lambda_k, \qquad k = 2, 3, \ldots n.$

Budeme užívati součinu

$$f_0(\varrho+1)\,f_0(\varrho+2)\ldots f_0(\varrho+\lambda_n) = s(\varrho, \lambda_n);$$

ten obsahuje faktor

$$(\varrho - a_2)(\varrho - a_3)^2\ldots(\varrho - a_k)^{k-1}\ldots(\varrho - a_n)^{n-1}.$$

Systém, z něhož se mají určiti koeficienty $a_{0,\varrho}, a_{1,\varrho}, a_{2,\varrho}\ldots$ mocnin v rozvojích pro integrály příslušné ke kořenům determinující rovnice, zní — jak z příslušné teorie známo —

$$\left.\begin{aligned}
&a_{0,\varrho}\,f_1(\varrho) + a_{1,\varrho}\,f_0(\varrho+1) = 0 \\
&a_{0,\varrho}\,f_2(\varrho) + a_{1,\varrho}\,f_1(\varrho+1) + a_{2,\varrho}\,f_0(\varrho+2) = 0 \\
&a_{0,\varrho}\,f_3(\varrho) + a_{1,\varrho}\,f_2(\varrho+1) + a_{2,\varrho}\,f_1(\varrho+2) + a_{3,\varrho}\,f_0(\varrho+3) = 0 \\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}\right| \qquad (4)$$

$a_{0,\varrho}$ lze voliti libovolně; volme místo něho $a_{0,\varrho}\,s(\varrho, \lambda_n)$ a pišme

$$A_{\nu,\varrho} = s(\varrho, \lambda_n)\,.\,a_{\nu,\varrho}.$$

Nový systém zní:

$$\left.\begin{aligned}
&A_{0,\varrho}\,f_1(\varrho) + A_{1,\varrho}\,f_0(\varrho+1) = 0 \\
&A_{0,\varrho}\,f_2(\varrho) + A_{1,\varrho}\,f_1(\varrho+1) + A_{2,\varrho}\,f_0(\varrho+2) = 0 \\
&A_{0,\varrho}\,f_3(\varrho) + A_{1,\varrho}\,f_2(\varrho+1) + A_{2,\varrho}\,f_1(\varrho+2) + A_{3,\varrho}\,f_0(\varrho+3) = 0 \\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}\right| \qquad (4^*)$$

a integrál příslušný ke kořenu $\varrho = a_k$ jest, označíme-li

$$I(x, \varrho) = x^\varrho(A_{0,\varrho} + A_{1,\varrho}x + \ldots),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^k I(x,\varrho)}{\partial \varrho^k}_{\varrho=a_k} = \\
&= x^{a_k}(A^{(k-1)}_{0,a_k} + A^{(k-1)}_{1,a_k}\, x + \ldots) \\
&+ \binom{k-1}{1} x^{a_k}(A^{(k-2)}_{0,a_k} + A^{(k-2)}_{1,a_k}\, x + \ldots)\log x + \\
&+ \binom{k-1}{2} x^{a_k}(A^{(k-3)}_{0,a_k} + A^{(k-3)}_{1,a_k}\, x + \ldots)\log^2 x + \\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&+ \binom{k-1}{k-3} x^{a_k}(A''_{0,a_k} + A''_{1,a_k}\, x + \ldots)\log^{k-3} x + \\
&+ \binom{k-1}{k-2} x^{a_k}(A'_{0,a_k} + A'_{1,a_k}\, x + \ldots)\log^{k-2} x + \\
&+ \qquad x^{a_k}(A_{0,a_k} + A_{1,a_k}\, x + \ldots)\log^{k-1} x.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Položme nyní v (4*) $\varrho = a_k$, $1 \leqq k \leqq n$. Pak jest $A_{0,a_k} = A_{1,a_k} = \ldots = A_{a_1-a_k-1,a_k} \equiv 0$, což jest tenkráte možno, když determinant příslušné soustavy jest od nuly různý; předpokládejme, že tomu tak jest a značme jej

$$D(a_k, a_1) = \begin{vmatrix} f_1(a_k), & f_0(a_k+1), & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ f_2(a_k), & f_1(a_k+1), & f_0(a_k+2), \ldots 0 \\ f_3(a_k), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & f_0(a_1-1) \\ \vdots & & f_1(a_1-1) \end{vmatrix}.$$

Pomocí Laplaceovy věty lze jednoduše dokázati, že

$$D(a_n, a_1) = D(a_n, a_\nu) \,.\, D(a_\nu, a_1), \qquad \nu = 2, 3, \ldots n-1,$$
$$D(a_\nu, a_1) = D(a_\nu, a_{\nu-1}) \,.\, D(a_{\nu-1}, a_{\nu-2}) \ldots D(a_2, a_1), \; \nu = 2, 3, \ldots n-1.$$

Systém (4*) přejde v systém

$$\left.\begin{aligned}
&A_{a_1-a_k, a_k} f_1(a_1) + A_{a_1-a_k+1, a_k} f_0(a_1+1) = 0 \\
&A_{a_1-a_k, a_k} f_2(a_1) + A_{a_1-a_k+1, a_k} f_1(a_1+1) + A_{a_1-a_k+2, a_k} f_2(a_1+2) = 0 \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}\right\} (4^{**})$$

Odtud ihned patrno, že veličiny

$$A_{a_1-a_k, a_k}, \quad A_{a_1-a_k+1, a_k}, \ldots$$

jsou úměrny veličinám

$$A_{0, a_1}, \quad A_{1, a_1}, \ldots,$$

takže koeficient při $\log^{k-1} x$ v (5) jest

$$x^{a_k}(A_{a_1-a_k, a_k}\, x^{a_1-a_k} + A_{a_1-a_k+1, a_k}\, x^{a_1-a_k+1} + \ldots) =$$

$$= x^{a_1}(A_{a_1-a_k, a_k} + A_{a_1-a_k+1, a_k}x + \ldots) =$$

$$= \frac{A_{a_1-a_k, a_k}}{A_{0, a_1}} I(x, a_1).$$

Z definice $A_{\nu, \varrho}$ jest patrno, že

$$\left.\begin{array}{l}
A'_{0, a_k} = A'_{1, a_k} = \ldots = A'_{a_1-a_k-1, a_k} = 0,\ A'_{a_1-a_k, a_k} \neq 0, \\
A''_{0, a_k} = A''_{1, a_k} = \ldots = A''_{a_1-a_k-1, a_k} = 0,\ A''_{a_1-a_k, a_k} \neq 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
A^{(k-2)}_{0, a_k} = A^{(k-2)}_{1, a_k} = \ldots = A^{(k-2)}_{a_{k-1}-a_k-1, a_k} = 0; A^{(k-2)}_{a_{k-1}-a_k, a_k} \neq 0 \\
A^{(k-1)}_{0, a_k} \neq 0,
\end{array}\right\} \quad (6)$$

takže lze s ohledem na (6) psáti (5) ve tvaru:

$$\left.\begin{array}{l}
I(x, a_k) = x^{a_k}(A^{(k-1)}_{0, a_k} + \ldots\ldots) + \\
+\binom{k-1}{1} x^{a_{k-1}}(A^{(k-2)}_{a_{k-1}-a_k, a_k} + \ldots) \log x + \\
+\binom{k-1}{2} x^{a_{k-2}}(A^{(k-3)}_{a_{k-2}-a_k, a_k} + \ldots) \log^2 x + \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
+\binom{k-1}{k-3} x^{a_2}(A''_{a_2-a_k, a_k} + \ldots) \log^{k-3} x + \\
+\binom{k-1}{k-2} x^{a_2}(A'_{a_2-a_k, a_k} + \ldots) \log^{k-2} x + \\
+ \frac{A_{a_1-a_k, a_k}}{A_{0, a_1}} \log^{k-1} x\, I(x, a_1).
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Odtud patrno, že za předpokladu $D(a_k, a_1) \neq 0$ koeficientem nejvyšší mocniny $\log x$ jest až na multiplikativní konstantu integrál příslušný k největšímu kořenu gruppy. Tuto multiplikativní konstantu lze vyjádřiti pomocí $D(a_k, a_1)$ a sice jest podle (4)

$$A_{a_1-a_k, \varrho} = A_{\lambda_k, \varrho} = \begin{vmatrix} f_1(\varrho), f_0(\varrho+1), 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ f_2(\varrho), f_1(\varrho+1), f_0(\varrho+2) \ldots 0 \\ \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ f_0(\varrho+\lambda_k-1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ f_1(\varrho+\lambda_k-1) \end{vmatrix} \frac{A_{0, \varrho}}{f_0(\varrho+1)\ldots f_0(\varrho+\lambda_k)} =$$

$$= \frac{D(\varrho, \varrho+\lambda_k)}{s(\varrho, \lambda_k)} A_{0, \varrho} =$$

$$= D(\varrho, \varrho+\lambda_k) \frac{a_{0, \varrho} f_0(\varrho+1) \ldots f_0(\varrho+\lambda_n)}{f_0(\varrho+1) \ldots f_0(\varrho+\lambda_k)} =$$

$$= D(\varrho, \varrho+\lambda_k) f_0(\varrho+\lambda_k+1) \ldots f_0(\varrho+\lambda_n)\, a_{0, \varrho}, \quad (8)$$

takže

$$A_{a_1-a_k,\,a_k} = D(a_k, a_1)\, f_0(a_1+1) \ldots f_0(a_1+a_k-a_n)\, a_{0,\,a_k},$$

a

$$\frac{A_{a_1-a_k,\,a_k}}{A_{0,\,a_1}} = \frac{D(a_k, a_1)\, a_{0,\,a_k}}{f_0(a_1+a_k-a_n+1) \ldots f_0(2a_1-a_n)\, a_{0,\,a_k}} =$$

$$= c\, D(a_k, a_1) \frac{a_{0,\,a_k}}{a_{0,\,a_1}}.$$

$a_{0,\,a_1}, a_{0,\,a_2}, \ldots a_{0,\,a_k} \ldots a_{0,\,a_n}$ jsou vlastně integrační konstanty v počtu n; pro jednoduchost volme je rovny 1, takže

$$c = \frac{1}{f_0(a_1+a_k-a_n+1) \ldots f_0(2a_1-a_n)}.$$

Lze tedy poslední člen v (7) psáti za předpokladu $D(a_k, a_1) \neq 0$ ve tvaru

$$c\, D(a_k, a_1)\, I(x, a_1) \log^{k-1} x.$$

Co nastane, když $D(a_k, a_1) = 0$? Předpokládejme prozatím, že koeficienty $A_{\nu,\,\varrho}$ řídí se jedním a týmž výtvarným zákonem, t. j. že nelze systém (4*) rozložiti na dva nebo více systémů na sobě nezávislých (viz odst. 5). Pak opět podle definice jest

$$A_{0,\,a_k} = A_{1,\,a_k} = \ldots = A_{a_1-a_k-1,\,a_k} = 0;$$

podle posledního předpokladu jest $A_{a_1-a_k,\,a_k} = 0$ a z redukovaného systému (4**) jest zřejmo, že

$$A_{a_1-a_k+1,\,a_k} = A_{a_1-a_k+2,\,a_k} = \ldots = 0,$$

t. j. řada při $\log^{k-1} x$ identicky vymizí a nejvyšší mocninou $\log x$ v (7) jest $(k-2)$há.

Lze tedy říci: Nutnou a postačující podmínkou, aby v (7) se nevyskytovala $(k-1)$ní mocnina jako nejvyšší, jest

$$D(a_k, a_1) = 0.$$

3. Předpokládejme $D(a_1-a_k, a_k) = 0$, t. j. $A_{a_1-a_k,\,a_k} = 0$ a vyšetřme řadu

$$A'_{a_1-a_k,\,a_k} + A'_{a_1-a_k+1,\,a_k} x + \ldots;$$

jest to mocninná řada při $\log^{k-2} x$ v (7). Derivujme systém (4*); položme $\varrho = a_k$; pak $A_{\nu,\,a_k} = 0$ pro všechna ν podle předpokladu o $A_{a_1-a_k,\,a_k}$ a $A'_{\nu,\,a_k} = 0$ pro $\nu = 0, 1, \ldots a_2 - a_k - 1$ podle (6). V tomto systému vymizí prvních $a_2 - a_k$ rovnic. Další rovnice zní

$$A'_{a_2-a_k,\,a_k} f_1(a_2) + A'_{a_2-a_k+1,\,a_k} f_0(a_2+1) = 0.$$

Každá další rovnice má o člen více, avšak rovnice (a_1-a_2-1)ní a (a_1-a_2)ní mají stejný počet členů. První z nich končí $A'_{a_1-a_2-1,\,a_k} f_0(a_1-1)$, druhá $A'_{a_1-a_2-1,\,a_k} f_1(a_1-1)$. Jest to a_1-a_2 rovnic lineárních homogenních, mezi a_1-a_2 neznámými $A'_{a_2-a_k,\,a_k}$,

$\ldots A'_{a_1-a_k-1, a_k} \cdot A'_{a_2-a_l, a_k}$. nemůže býti různé od nuly, sice jinak by systém (4*) pro $\varrho = a_k$ po vypuštění prvních $a_2 - a_k$ rovnic určoval mocninnou řadu, jejíž koeficienty by byly vesměs násobky jedné a téže konstanty jinak zcela libovolné, takže fundamentální systém rovnice (1) by obsahoval $(n + 1)$ konstant na sobě nezávislých, což nemůže býti; jest tedy

$$A'_{a_2-a_k, a_k} = A'_{a_2-a_k+1, a_k} = \ldots = A'_{a_1-a_k-1, a_k} = 0.$$

Systém (4*) pro $\varrho = a_k$ zní pak dále takto:

$$A'_{a_1-a_k, a_k} f_1(a_1) + A'_{a_1-a_k+1, a_k} f_0(a_1 + 1) = 0$$

$$\vdots$$

odkudž zase vysvítá, že veličiny

$$A'_{a_1-a_k, a_k}, \quad A'_{a_1-a_k+1, a_k}, \ldots$$

jsou úměrny veličinám

$$A_{0, a_1}, \; A_{1, a_1}, \ldots$$

Když tedy $D(a_k, a_1) = 0$, lze mocninnou řadu při $\log^{k-2} x$ psáti ve tvaru

$$\frac{A_{a_1-a_k, a_k}}{A_{0, a_1}} I(x, a_1)$$

a s ohledem na (8) a na to, že $D(a_k, a_1) = 0$, ve tvaru

$$c \left.\frac{\partial D(\varrho, \varrho + \lambda_k)}{\partial \varrho}\right|_{\varrho = a_k} . I(x, a_1).$$

Lze tedy říci: Když $D(a_k, a_1) = 0$, t. j. když v (7) se nevyskytuje $\log^{k-1} x$, jest řada při $\log^{k-2} x$ opět integrálem $I(x, a_1)$. A dále: Nutnou a postačující podmínkou, aby v (5) nevyskytovaly se $\log^{k-1} x$ a $\log^{k-2} x$, jest:

$$\begin{cases} D(a_k, a_1) = 0, \\ \dfrac{\partial D(\varrho, \varrho + \lambda_k)}{\partial \varrho} = 0, \quad \text{pro } \varrho = a_k. \end{cases}$$

4. Úplnou indukcí nyní dokážeme větu: Aby vymizelo $\nu \, (1 \leq \nu \leq k - 1)$ nejvyšších mocnin $\log x$ v (7), t. j. aby vymizely všechny koeficienty řad při $\log^{k-1} x$, $\log^{k-2} x, \ldots \log^{k-\nu} x$ a při $\log^{k-\nu-1}(x)$ nikoliv, jest nutno a postačí, když

$$\left.\begin{aligned} & D(a_k, a_1) = 0, \\ & \frac{\partial^{\mu-1} D(\varrho, \varrho + \lambda_k)}{\partial \varrho^{\mu-1}} = 0, \text{ pro } \mu = 1, 2, \ldots \nu \text{ a } \varrho = a_k \\ & \frac{\partial^{\nu} D(\varrho, \varrho + \lambda_k)}{\partial \varrho^{\nu}} \neq 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Řada při $\log^{k-\nu-1} x$ jest potom až na multiplikativní konstantu $I(x, a_k)$.

Předpokládejme správnost této věty pro ν a vypočtěme řadu při $\log^{k-\nu-1} x$. Ta podle (7) jest

$$x^{a_{\nu+1}}(A^{(\nu)}_{a_{\nu+1}-a_k, a_k} + \ldots).$$

Derivujme nyní systém (4*) ν-kráte podle ϱ, pak podle (6) a (9) obdržíme systém rovnic, z nichž prvních $a_{\nu+1} - a_k$ identicky vymizí. Další rovnice zní:

$$A^{(\nu)}_{a_{\nu+1}-a_k, a_k} f_1(a_{\nu+1}) + A^{(\nu)}_{a_{\nu+1}-a_k+1} f_0(a_{\nu+1} + 1) = 0.$$

Každá další rovnice má o člen více; avšak rovnice $(a_1 - a_{\nu+1} - 1)$ní a $(a_1 - a_{\nu+1})$ní mají stejný počet členů. První z nich končí $A^{(\nu)}_{a_1-a_{\nu+1}-1, a_k} f_0(a_1 - 1)$, druhá $A^{(\nu)}_{a_1-a_{\nu+1}-1, a_k} f_1(a_1 - 1)$. Jest to $a_1 - a_{\nu+1}$ rovnic lineárních homogenních mezi $a_1 - a_{\nu+1}$ neznámými $A^{(\nu)}_{a_{\nu+1}-a_k, a_k}, \ldots, A^{(\nu)}_{a_1-a_k-1, a_k}$, o nichž lze provésti tutéž úvahu, kterou jsme v předchozím odstavci provedli o

$$A'_{a_2-a_k, a_k}, \ldots A'_{a_1-a_k-1, a_k}.$$

Jsou tedy všechny tyto veličiny rovny nule. Řada pak zní:

$$x^{a_1}(A^{(\nu)}_{a_1-a_k, a_k} + A^{(\nu)}_{a_1-a_k+1, a_k} x + \ldots).$$

Systém pak zní dále takto:

$$A^{(\nu)}_{a_1-a_k, a_k} f_1(a_1) + A^{(\nu)}_{a_1-a_k+1, a_k} f_0(a_1 + 1) = 0$$
$$\vdots$$

odkudž jako dříve soudíme, že lze řadu psát

$$\frac{A^{(\nu)}_{a_1-a_k, a_k}}{A_{0, a_1}} I(x, a_1).$$

Derivujeme-li (8) ν-kráte, obdržíme vzhledem k (9) řadu při $\log^{k-\nu-1} x$ ve tvaru

$$c \left.\frac{\partial^\nu D(\varrho, \varrho + \lambda_k)}{\partial \varrho^\nu}\right|_{\varrho=a_k} . I(x, a_1).$$

Tedy platí-li věta v (9) pro $\nu - 1$, platí i pro ν; pro $\nu = 1$ jsme ji dokázali přímo v odstavci 3.

Poněvadž $D(\varrho, \varrho + \lambda_k)$ jest celistvá racionální funkce, lze (9) vysloviti jinak:

„Aby vymizelo ν $(1 \leq \nu \leq k - 1)$ nejvyšších mocnin v $\log(x)$ v (7), t. j. aby vymizely všechny koeficienty řad při $\log^{k-1} x$, $\log^{k-2} x, \ldots \log^{k-\nu} x$ a při $\log^{k-\nu-1} x$ nikoliv, jest nutno a postačí, aby polynom $D(\varrho, \varrho + \lambda_k)$ obsahoval jako faktor ν-tou a nikoliv vyšší mocninu činitele $(\varrho - a_k)$.“

Má-li tedy ke kořenu $\varrho = a_k$, $(k = 2, 3, \ldots n)$ partikulární integrál býti vyjádřen pouze řadou, jest nutno a stačí, aby polynom $D(\varrho, \varrho + \lambda_k)$ obsahoval jako faktor $(k-1)$ní a nikoliv vyšší mocninu činitele $(\varrho - a_k)^{k-1}$. Je-li tato podmínka splněna pro všechna k, jsou všechny integrály rovnice 1) dány řadami, jsou regulární; bod $x = 0$ pak sluje podle Poincaréa (Acta mathematica, 4, p. 217) bod zdánlivé singularity (point à apparence singulière); Klein nazývá takovouto singularitu bodem vedlejším (Nebenpunkt, Vorl. üb. die hypergeom. Functionen 228, Bieberbach: Th. der Diffgl. 181). Má-li determinující rovnice za kořeny v tomto případě čísla přirozená, jsou integrály analytickými funkcemi. Jednoduchý příklad rovnice s takovou singularitou jest

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0,$$

mající determinující rovnici $(\varrho - 1)(\varrho - 2)(\varrho - 3) = 0$ a obecný integrál

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3.$$

5. Doposud jsme předpokládali, že systém (4*) nelze rozložiti ve dva systémy na sobě nezávislé, t. j. že výtvarný zákon pro koeficienty jest jeden a týž.

Je-li diferenciální rovnice (1) na př. taková, že všechna $f_{2\nu+1}(\varrho) = 0$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, což nastane, když potenční řady v (1) označené $P_n(x)$, $P_{n-1}(x), \ldots P_0(x)$ postupující podle mocnin x^2, odvodíme snadno, že systém (4*) rozpadne se ve dva systémy, z nichž jeden určuje $A_{\nu,\varrho}$ pro sudá ν a druhý pro lichá ν. Druhý z těchto systémů udává, že všechna $A_{\nu,\varrho}$ o lichém ν jsou rovna nule; pak lze řady vyskytující se v integrálech příslušných k jednotlivým kořenům determinující rovnice psáti ve tvaru $x^\varrho(b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 + \ldots)$. Zde nelze tedy docílených výsledků bezprostředně použíti, nýbrž je nutno vyšetřiti každý případ zvlášť. V případě uvažovaném dojdeme cíle, zavedeme-li novou proměnnou $x^2 = t$ (viz př. 2 v odst. 6). V obecnějším případě, kdy od nuly jsou různá jen ta $f_\nu(\varrho)$, v nichž $\nu = \varkappa\alpha$, $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$, to jest když potenční řady $P_n(x)$, $P_{n-1}(x), \ldots P_0(x)$ postupující podle mocnin x^α, položíme $x^\alpha = t$. Determinující rovnice transformované rovnice diferenciální jest pak $f_0(\alpha\varrho) = 0$ a má kořeny

$$\frac{a_1}{\alpha}, \frac{a_2}{\alpha}, \ldots \frac{a_n}{\alpha}.$$

Že řád pólů transformované rovnice hoví podmínkám Fuchsovým, jest patrno ze vztahu, jejž snadno — na př. úplnou indukcí — dokážeme:

$$\frac{y^{(\varkappa)}}{x^{n-\varkappa}} = (m_{1,\varkappa}t\eta' + m_{2,\varkappa}t^2\eta'' + \ldots + m_{\varkappa,\varkappa}t^\varkappa\eta^{(\varkappa)})\,t^{-\frac{n}{\varkappa}}$$

$$(\varkappa = 0, 1, \ldots n),$$

při čemž $y(x^\alpha) = \eta(t)$, $m_{1,\varkappa}$, $m_{2,\varkappa}$, $m_{3,\varkappa}, \ldots$ jsou konstanty závislé na α a $\varkappa$.

6. Uveďme tři jednoduché příklady.

a) Uvažujme diferenciální rovnici

$$x^2(a_2 + b_2x)\, y'' + x(a_1 + b_1x)\, y' + (a_0 + b_0x)\, y = 0, \quad (11)$$
$$a_2 \neq 0, \quad b_2 \neq 0.$$

Zde jest

$$f_0(\varrho) = a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho\,(\varrho - 1) \equiv a_2\,(\varrho - \varrho_1)\,(\varrho - \varrho_2)$$
$$f_1(\varrho) = b_0 + b_1\varrho + b_2\,\varrho(\varrho - 1) \equiv b_2\,(\varrho - \varrho_3)\,\varrho - \varrho_4).$$

Buďtež nyní ϱ_1, ϱ_2 čísla celistvá, $\varrho_1 > \varrho_2$. Pak $\lambda_2 = \varrho_1 - \varrho_2$,

$$D(\varrho, \varrho + \lambda_2) = f_1(\varrho)\, f_1(\varrho + 1) \ldots f_1(\varrho + \varrho_1 - \varrho_2 - 1) \text{ a}$$
$$D(\varrho_2, \varrho_1) = f_1(\varrho_2)\, f_2(\varrho_2 + 1) \ldots f_1(\varrho - 1) =$$
$$= b_2^{\lambda_2}(\varrho_2 - \varrho_3)\,(\varrho_2 - \varrho_4)\,(\varrho_2 - \varrho_3 + 1)\,(\varrho_2 - \varrho_4 + 1) \ldots$$
$$\ldots (\varrho_1 - 1 - \varrho_3)\,(\varrho_1 - 1 - \varrho_4).$$

Když tedy ϱ_3 nebo ϱ_4 jest rovno některé z veličin

$$\varrho_2,\ \varrho_2 + 1, \ldots \varrho_1 - 1,$$

jest partikulární integrál příslušný ke kořenu ϱ_2 rovněž vyjádřen mocninnou řadou.

Rovnice (11) zahrnuje v sobě Gaussovu diferenciální rovnici[1]) a jest speciálním případem t. zv. diferenciálních rovnic o dvoučlenné rekurrentní formuli (viz Forsyth 589 a n.).

b) Jiná rovnice téhož typu jest

$$cz^\nu u = \frac{d^2}{dz^2}\left(z^{\nu+2}\frac{d^2u}{dz^2}\right) \text{ čili} \quad (12)$$

$$u^{\mathrm{IV}} + \frac{2(\nu + 2)}{z}\,u''' + \frac{(\nu + 1)\,(\nu + 2)}{z^2}\,u'' - \frac{cu}{z^2} = 0\,^2), \quad (12^*)$$

kdež ν jest číslo přirozené, větší nebo rovné 2. Determinující rovnice jest

$$f_0(\varrho) = \varrho(\varrho - 1)\,(\varrho + \nu - 1)\,(\varrho + \nu) = 0,$$
$$f_1(\varrho) = 0\,,$$
$$f_2(\varrho) = -c.$$

Podle (5) zaveďme substituci $z^2 = t$. Determinující rovnice přejde ve tvar

$$\left(\bar\varrho - \frac{1}{2}\right)\bar\varrho\left(\bar\varrho + \frac{\nu - 1}{2}\right)\left(\bar\varrho + \frac{\nu}{2}\right) = 0.$$

Pro sudé ν tvoří kořeny $\frac{1}{2}$, $-\frac{\nu - 1}{2}$, resp. $0, -\frac{\nu}{2}$ gruppu. Pro liché ν pak kořeny $\frac{1}{2}$, $-\frac{\nu}{2}$, resp. $0, -\frac{\nu - 1}{2}$. Odtud jest ihned

---

[1]) Pro bod $x = 0$ viz Heffter, l. c. 33—34.

[2]) Pro $\nu = 2$ zabýval se touto rovnicí Kirchhoff, Ges. Abh. pag. 348; viz též Mononobe: Zeitschrift f. angew. Math. u. Physik. I. Bd., pag. 444. Čupr: Sborník čes. vys. školy techn. v Brně spis 12.

zřejmo, že ke kořenům $\varrho = 0, 1$ patří partikulární integrály definované mocninnými řadami; partikulární integrály příslušné k dalším dvěma kořenům obsahují $\log t$, resp. $\log x$ pouze v první mocnině. Že tomu tak jest, lze nahlédnouti ještě jinak. Rovnici (12), použijeme-li jistého diferenciálního operátoru, lze redukovati na dvě diferenciální rovnice lineární druhého řádu; lze totiž rovnici (12) psáti ve tvaru:

$$cu = \frac{1}{z^\nu}\frac{d}{dz}\left[z^{\nu+1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z^\nu}\left(\frac{d}{dz}\left[z^{\nu+1}\frac{du}{dz}\right]\right)\right\}\right]$$

a ta jest splněna, když

$$\frac{1}{z^\nu}\frac{d}{dz}\left(z^{\nu+1}\frac{du}{dz}\right) = \pm\sqrt{cu} \quad \text{čili}$$

$$u'' + \frac{(\nu+1)\,u'}{z} \pm \frac{\sqrt{c}\,u}{z} = 0, \qquad (12^{**})$$

odkudž je naše tvrzení patrno, jelikož determinující rovnice pro obě diferenciální rovnice jest

$$\varrho\,(\varrho + \nu) = 0.$$

Rovnice (12**) jsou specielním[3]) případem rovnice

$$z'' + \frac{1-2\alpha}{u}z' + \left[(\beta\gamma u^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 + p^2\gamma^2}{u^2}\right]z = 0,$$

jejíž obecný integrál jest

$$z = u^\alpha Z_p\,(\beta u^\gamma),$$

při čemž $Z_p(u)$ jest obecný integrál Besselovy rovnice

$$z'' + \frac{1}{u}z' + \left(1 - \frac{p^2}{u^2}\right)z = 0.$$

V rovnicích (12**) jest

$$\alpha = -\frac{\nu}{2}, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}, \quad p = \nu, \quad \beta = 2\sqrt{\pm\sqrt{c}},$$

takže obecné integrály rovnice (12**) jsou:

$$z_1 = u^{-\frac{\nu}{2}}\,Z_\nu\,(2\sqrt[4]{cu^2})$$

$$z_2 = u^{-\frac{\nu}{2}}\,Z_\nu\,(2i\sqrt[4]{cu^2})$$

a integrál rovnice (12), resp. (12*) jest $k_1 z_1 + k_2 z_2$.

Úvahy tyto zůstanou v platnosti i pro $\nu = 1, 0$; v těchto případech jsou determinující rovnice:

[3]) Jahnke-Emde: Funktionentafeln, pag. 166.

$$(\varrho - 1)\,\varrho^2\,(\varrho + 1) = 0,$$
$$(\varrho - 1)^2\,\varrho^2 = 0.$$

První z těchto případů řeší některé technické problémy; viz na př. Kirchhoff l. c. 343, Reissner: Beton und Eisen 1908, pag. 159, srov. Čupr l. c. 8.

c) Zajímavý případ může nastati, když determinující rovnice patřící k diferenciální rovnici (1) má $\alpha + 1$ kořen

$$a_1,\ a_1 - 1,\ a_1 - 2, \ldots, a_1 - \alpha, \quad \alpha + 1 < n,$$

při čemž a_1 jest největším kořenem determinující rovnice. Lze tedy psáti:

$$f_0(\varrho) = (\varrho - a_1)(\varrho - a_1 + 1) \ldots (\varrho - a_1 + \alpha)\,\varphi_0(\varrho),$$

kdež $\varphi_0(\varrho)$ jest polynom stupně $n - \alpha - 1$.

Budiž ještě

$$\begin{aligned} f_1(\varrho) &= (\varrho - a_1 + 1) \ldots (\varrho - a_1 + \alpha)\,\varphi_1(\varrho), \\ f_2(\varrho) &= (\varrho - a_1 + 2) \ldots (\varrho - a_1 + \alpha)\,\varphi_2(\varrho), \\ &\vdots \\ f_s(\varrho) &= (\varrho - a_1 + s) \ldots (\varrho - a_1 + \alpha)\,\varphi_s(\varrho), \\ &\vdots \\ f_\alpha(\varrho) &= (\varrho - a_1 + \alpha)\,\varphi_\alpha(\varrho), \\ f_{\alpha+1}&(a_1 - \alpha) \neq 0, \end{aligned}$$

při čemž $\varphi_s(\varrho)$, $s = 1, 2, \ldots \alpha$ jest polynom stupně nejvýše $n - \alpha + s + 1$, může býti i konstanta i nula.

Za těchto předpokladů lze elementárním výpočtem zjistiti, že pro $(k + 1)$ní z kořenů

$$a_1,\ a_1 - 1,\ a_1 - 2, \ldots a_1 - \alpha,$$

(totiž pro $a_1 - k$, takže $\lambda_{k+1} = k$), jest v determinantu

$$D_{k-1,\,\varrho} = \begin{vmatrix} f_1(\varrho), & f_0(\varrho + 1) & & \\ f_2(\varrho), & f_1(\varrho + 1) & & \\ & & \ddots & f_0(\varrho + k - 1) \\ & & & f_1(\varrho + k - 1) \end{vmatrix}$$

každý prvek dělitelem $(\varrho - a_1 + k)$, takže se tento činitel vyskytuje v $D_{k-1,\,\varrho}$ v mocnině k-té. Jsou tedy podle poslední věty v odst. 4. integrály příslušné k $\alpha + 1$ kořenům

$$a_1,\ a_1 - 1,\ a_1 - 2, \ldots a_1 - \alpha$$

vyjádřeny pouze řadami. Že tomu tak jest, lze nahlédnouti i takto: Za uvedených předpokladů vymizí prvních α rovnic pro $\varrho = a - \alpha$, takže lze koeficienty

$$A_{0,\,a_1-\alpha},\ A_{1,\,a_1-\alpha}, \ldots A_{\alpha,\,a-\alpha}$$

mocnin

$$x^{a_1-\alpha},\quad x^{a_1-\alpha+1}, \ldots x^{a_1}$$

voliti libovolně; ostatní koeficienty jsou lineární kombinace těchto.

Sem patří diferenciální rovnice

$$x^{n-\alpha} p_n(x)\, y^{(n)} + x^{n-\alpha+1} p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)\, y = 0, \quad (13)$$

jejíž determinující rovnice pro bod $x = 0$ jest

$$f_0(\varrho) = (\varrho - \alpha + 1)(\varrho - \alpha + 2) \ldots \varrho\varphi_0(\varrho) = 0.$$

Nemá-li již $\varphi_0(\varrho) = 0$ kořene vyjádřeného číslem přirozeným a větším $(\alpha - 1)$, má rovnice (13) α partikulárních integrálů příslušných ke kořenům $0, 1, \ldots \alpha - 1$ ve tvaru mocninných řad.[4])

Též sem patří Laplaceova diferenciální rovnice

$$(a_n x + b_n)\, y^{(n)} + (a_{n-1}\, x + b_{n-1})\, y^{(n-1)} + \ldots + (a_0 x + b_0) y = 0,$$

$$a_n \neq 0,\; a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n \neq 0 \quad (14)$$

v okolí bodu $x = -\dfrac{b_n}{a_n}$.

Zaveďme novou neodvisle proměnnou $\xi = (a_n x + b_n)$, pak rovnice (14) nabude tvaru

$$\xi y^{(n)} + (\alpha_{n-1}\xi + \beta_{n-1})\, y^{(n-1)} + \ldots + (\alpha_0 \xi + \beta_0)\, y = 0,$$

$$\beta_{n-1} = a_n\, b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n \quad (14^*)$$

a bod $x = -\dfrac{b_n}{a_n}$ přejde v bod $\xi = 0$. Determinující rovnice v tomto bodě zní

$$(\varrho - n + 2)(\varrho - n + 3) \ldots \varrho(\varrho - n + 1 + \beta_{n-1}) = 0$$

a ostatní $f_1(\varrho), f_2(\varrho), \ldots$ splňují učiněné předpoklady.

Není-li β_{n-1} číslo celistvé, neobsahuje žádný z partikulárních integrálů $\log \xi$, je-li β_{n-1} číslo celistvé $\geq n$, má tuto vlastnost $(n - 1)$ partikulární integrál příslušný ke kořenům

$$n - 2,\; n - 3, \ldots 1,\; 0.$$

7. Má-li determinující rovnice kořeny vícenásobné, není vyšetřování o mnoho nesnadnější. Budiž

$$f_0(\varrho) = (\varrho - a_1)^{\alpha_1} (\varrho - a_2)^{\alpha_2} \ldots (\varrho - a_n)^{\alpha_n}$$

a utvořme součin

$$P(\varrho, \lambda_n) = f_0(\varrho + 1) \ldots f_0(\varrho + \lambda_n),$$

jenž obsahuje faktor

$$(\varrho - a_2)^{\alpha_1} (\varrho - a_3)^{\alpha_1 + \alpha_2} \ldots (\varrho - a_n)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}}.$$

Značme opět

$$a_{\nu, \varrho}\, P(\varrho, \lambda_n) = A_{\nu, \varrho}$$

a opět obdržíme systém (7*), ovšem při pozměněném významu $A_{\nu, \varrho}$, takže na př. pro $\varrho = a_k$ platí:

---

[4]) Pro $\alpha = n - 1$ viz Pochhammer, Crelle 73, pag. 69; srovnej též Perron, Acta mathem. XXXIV pag. 161, Math. Annalen 70, pag. 23, Crelle 137, pag. 60.

$$\left.\begin{array}{llll}
A_{0,\,a_k} & = A_{1,\,a_k} & = \ldots = A_{a_1-a_k-1,\,a_k} & = 0 \\
A'_{0,\,a_k} & = A'_{1,\,a_k} & = \ldots = A'_{a_2-a_k-1,\,a_k} & = 0 \\
\vdots & \vdots & \quad\quad\;\vdots & \\
A^{(a_1)}_{0,\,a_k} & = A^{(a_1)}_{1,\,a_k} & = \ldots = A^{(a_1)}_{a_2-a_k-1,\,a_k} & = 0 \\
A^{(a_1+1)}_{0,\,a_k} & = A^{(a_1+1)}_{1,\,a_k} & = \ldots = A^{(a_1+1)}_{a_2-a_k-1,\,a_k} & = 0 \\
\vdots & \vdots & \quad\quad\;\vdots & \\
A^{(a_1+a_2)}_{0,\,a_k} & = A^{(a_1+a_2)}_{1,\,a_k} & = \ldots = A^{(a_1+a_2)}_{a_2-a_k-1,\,a_k} & = 0 \\
\vdots & \vdots & \quad\quad\;\vdots & \\
A^{(a_1+a_2+\ldots+a_{k-2})}_{0,\,a_k} & & = \ldots = A^{(a_1+a_2+\ldots+a_{k-2})}_{a_{k-1}-a_k-1,\,a_k} & = 0 \\
\vdots & \vdots & \quad\quad\;\vdots & \\
A^{(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}-1)}_{0,\,a_k} & & = \ldots = A^{(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}-1)} & = 0 \\
A^{(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})}_{0,\,a_k} \neq 0. & & &
\end{array}\right\} \quad (15)$$

Jednotlivé partikulární integrály obdržíme postupným derivováním výrazu

$$I(x, \varrho) = x^{\varrho}\,(A_{0,\,\varrho} + A_{1,\,\varrho}\,x + A_{2,\,\varrho}\,x^2 + \ldots);$$

dostaneme tak integrály, jež značme

$$\begin{array}{llll}
I(x, a_1, 1), & I(x, a_1, 2), & \ldots & I(x, a_1, a_1), \\
I(x, a_2, 1), & I(x, a_2, 2), & \ldots & I(x, a_2, a_2), \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
I(x, a_k, 1), & I(x, a_k, 2), & \ldots & I(x, a_k, a_k), \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
I(x, a_n, 1), & I(x, a_n, 2), & \ldots & I(x, a_n, a_n).
\end{array}$$

Ze způsobu, jakým se tvoří postupné derivace výrazu $I(x, \varrho)$, jest ihned patrno, že koeficient při nejvyšší mocnině $\log x$ v partikulárních integrálech příslušných k témuž kořenu a_k, jest týž: Z toho ihned plyne, že, odpadne-li v integrálu $I(x, a_k, 1)$ u nejvyšších mocnin $\log x$, odpadne i u nejvyšších mocnin v integrálech

$$I(x, a_k, 2), \ldots I(x, a_k, a_k), \tag{16}$$

takže redukuje-li se integrál $I(x, a_k, 1)$ na mocninnou řadu, jest tato řada, značme ji $\eta_k(x)$ koeficientem nejvyšší mocniny $\log x$ v integrálech (16).

Stačí tedy vyšetřovati integrály

$$I(x, a_1, 1), \; I(x, a_2, 1), \ldots I(x, a_k, 1).$$

Tak jest vyšetřování převedeno na případ jednoduchých kořenů, z nichž

a_1 jest co do velikosti na místě prvním,
a_2 jest co do velikosti na místě $(\alpha_1 + 1)$ním,
.
.
.
a_k jest co do velikosti na místě $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1} + 1)$,
.
.
.
a_n jest co do velikosti na místě $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + 1)$,

při čemž jest v platnosti (15). Je-li tedy na př. v 3. příkladě předchozího odstavce β_{n-1} číslo celistvé takové, že $1 < \beta_{n-1} < n - 1$, má determinující rovnice jeden kořen dvojnásobný, jenž dává vznik integrálům

$$I(\xi, \beta_{n-1}),$$
$$M(x) + I(x, \beta_{n-1}) \log \xi,$$

kdež $M(x)$ jest mocninná řada v ξ.

*

Sur un théorème de Fuchs et sur les singularités apparentes des équations différentielles linéaires.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur considère les intégrales particulières d'une équation différentielle linéaire, écrite sous la forme (1) (voir le texte tchèque) dans le voisinage du point singulier $x = 0$. Ici, $P_i(x)$ sont des fonctions analytiques dans le voisinage de ce point (pour leurs expressions, voir encore le texte tchèque). Fuchs (Journal de Crelle, t. 68, p. 356) a démontré le théorème suivant: si l'expression

$$M_0(x) + M_1(x).logx + \ldots + M_p(x).log^p x, \tag{2}$$

où $1 \leq p \leq n - 1$, est une intégrale particulière de l'équation (1), il en est de même pour le coefficient $M_p(x)$. Ici $M_i(x)$ sont — comme on sait — des séries de puissances de x, multipliées par une certaine puissance de x; si l'exposant respectif n'est pas un entier, nommons les $M_i(x)$ tout simplement séries.

La question se pose, laquelle des intégrales, appartenant aux racines de l'équation déterminante, est cette intégrale $M_p(x)$. On ne peut pas donner une réponse générale à cette question; l'auteur résout le problème pour le cas où l'intégrale (2) appartient à une racine de l'équation déterminante, appartenant à l'équation (1). On résout par là en même temps un problème, traité également par Fuchs (Crelle, t. 68, p. 375—378), puis par Frobenius (Crelle, t. 76, p. 224—226) et notamment par Heffter (Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen, chap. II.): établir les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale, appartenant à une racine de l'équation déterminante, contienne seulement des puissances de $log\, x$ d'ordre inférieur à celui du cas général, ou bien que cette intégrale n'en contienne aucune. Les résultats acquis sont plus simples et plus claires.

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que les racines de l'équation déterminante sont toutes différentes:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n, \quad a_1 - a_\varkappa = \lambda_\varkappa = \text{un entier.}$$

Le système, servant à déterminer les coeficients $a_{0\varrho}, a_{1\varrho}, a_{2\varrho}$ des puissances dans les développements pour les intégrales appartenant aux racines de l'équation déterminante, est donné — comme on sait par la théorie respective — par (4). Ici, $a_{0\varrho}$ peut être choisi arbitrairement; remplaçons ce nombre par $a_{0\varrho}\, s\,(\varrho, \lambda_\nu)$ et posons

$$A_{\nu\varrho} = s(\varrho, \lambda_n) . a_{\nu\varrho}, \text{ où}$$

$$s\,(\varrho, \lambda_n) = f_0(\varrho + 1)\, f_0(\varrho + 2) \ldots f_0(\varrho - \lambda_n).$$

Si l'on pose $\quad I(x, \varrho) = x^\varrho\,(A_{0\varrho} + A_{1\varrho}\, x + \ldots),$

l'intégrale appartenant à la racine $\varrho = a_\varkappa$ est donnée par la formule (5).

Ceci posé, le théorème a lieu:

Pour que, dans cette expression, les ν ($1 \leqq \nu \leqq k-1$) puissances les plus élevées de $log x$ disparaissent, c. à d., pour que tous les coefficients des séries multipliant $log^{k-1}x$, $log^{k-2}x$, ..., $log^{k-\nu}x$ s'annulent, sans que cela se produise pour $log^{k-\nu-1}x$, il faut et il suffit que les relations (9) aient lieu.

Alors, la série multipliant $log^{k-\nu-1}x$, est donnée, à un facteur constant près, par $I(x, a_1)$. (L'expression pour le déterminant D est donnée dans le texte). Comme $D(\varrho, \varrho + \lambda_\varkappa)$ est une fonction rationelle entière, on peut encore dire:

Pour que les ν ($1 \leqq \nu \leqq k-1$) puissances les plus élevées de $log\, x$ disparaissent, c. à d., pour que tous les coefficients des séries multipliant $log^{k-1}x$, $log^{k-2}x$, ..., $log^{k-\nu}x$ s'annulent, sans que cela se produise pour $log^{k-\nu-1}x$, il faut et il suffit que le polynôme $D(\varrho, \varrho + \lambda_\varkappa)$ contienne comme facteur la ν-ième puissance de $(\varrho - a_\varkappa)$, sans en contenir une puissance plus élevée.

Donc, si l'intégrale particulière, appartenant à la racine $\varrho = a_k$, ($k = 2, 3, \ldots, n$) doit être exprimée seulement par une série, il faut et il suffit que le polynôme $D(\varrho, \varrho + \lambda_\varkappa)$ contienne comme facteur la ($k - 1$)-ième puissance de $(\varrho - a_\varkappa)$, sans en contenir une puissance plus élevée. Si cette condition est satisfaite pour tous les k, toutes les intégrales de l'équation (1) sont exprimées par des séries et sont régulières; le point $x = 0$ est ce que Poincaré (Acta mathematica 4, p. 217) a nommé point à apparence singulière. Klein appelle un tel point Nebenpunkt (Vorlesungen über die hypergeometrischen Funktionen 228; Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen 181; voir aussi Pochhammer, Crelle 73, p. 69; Perron, Acta mathematica XXXIV, p. 161, Math. Annalen 70, p. 23, Crelle 137, p. 60.)

Si l'équation déterminante possède des racines multiples, l'étude n'est pas essentiellement plus difficile et elle aboutit à des résultats analogues.