Lucien Godeaux

Poznámka k teorii eliptické sextiky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 3-4, 300--303

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124016

Poznámka k teorii eliptické sextiky.

Napsal *L. Godeaux*, prof. university v Liège.

Ve svém článku „Příspěvek k teorii eliptické sextiky" (min. ročník tohoto Časopisu, str. 34) nalezl prof. B. Bydžovský některé vlastnosti zvláštní lineární soustavy hypereliptických sextik. Ukáži, jak se dojde jednoduše k týmž výsledkům užitím známého zobrazení kubické plochy na rovinu.

1. Budiž ω rovina, $|C_6|$ lineární soustava ∞^3 rovinných sextik ireduktibilních s osmi pevnými dvojnásobnými body $A_1, A_2, \ldots, A_8$. K soustavě $|C_6|$ dospěje se, jak známo, užitím Bertiniovy involuce I_2. Vztáhněme projektivně rovinné kubiky C_3, procházející šesti body $A_1, A_2, \ldots, A_6$, na roviny prostoru. Tak se obdrží, jak známo, kubická plocha F, jejíž body odpovídají biracionálně bodům roviny ω. Okolím prvého řádu bodů $A_1, A_2, \ldots, A_6$ odpovídají body přímek $a_1, a_2, \ldots, a_6$ plochy F.

Buďtež A_7', A_8' body plochy F, které odpovídají bodům A_7, A_8. Rovinným sextikám C_6 odpovídají na ploše F prostorové sextiky Γ_6 rodu dvě, vyťaté kvadrikami, které se dotýkají plochy F v bodech A_7', A_8'. Rovinné kubiky C_3 procházející osmi body $A_1, A_2, \ldots, A_8$ procházejí tudíž devátým bodem B, o němž předpokládejme, že nesplyne se žádným z předchozích osmi. Bod B', který odpovídá bodu B na ploše F, je třetí průsečík spojnice $A_7'A_8'$ s plochou F.

Buďtež $\alpha_7, \alpha_8, \beta$ tečné roviny plochy F v bodech A_7', A_8' a B'. Uvažujme rovinu γ procházející body A_7', A_8' a kuželosečku Γ_2, která se dotýká v těchto dvou bodech a v třetím bodu P' průseku (F, γ) plochy F s rovinou γ. Je-li π tečná rovina plochy F v bodě P', dotýká se kužel, který promítá kuželosečku Γ_2 z bodu $(\alpha_7\alpha_8\pi)$, plochy F v bodech A_7', A_8', P'. Kvadriky vepsané tomuto kuželi podél kuželosečky Γ_2 dotýkají se tedy F v bodech A_7', A_8', P' a protínají tuto plochu v eliptických sextikách Γ_6 majících v těchto bodech body dvojnásobné. Těmto křivkám Γ_6 odpovídají v ω křivky C_6 mající devátý dvojnásobný bod v bodě P, odpovídajícím bodu P', a tvořící svazek Halphenův (t. j. svazek sextik s devátým bodem dvojnásobným). Geometrickému místu devátých dvojnásobných bodů křivek C_6 odpovídá tedy na F geom. místo bodů P'.

Na křivce (F, γ) leží tečnové body bodů A_7', A_8', P' v přímce, ježto v těchto třech bodech se křivky dotýká kuželosečka (podle známé věty z teorie kubické křivky). Budiž P'' tečnový bod bodu P'. Z teorie kubické křivky je známo, že bod P'' je také tečnový bod bodu B'. Je tudíž geometrické místo bodů P'' průsek (F, β) plochy F s rovinou β, která se dotýká plochy v bodě B'. Z bodu P'' lze vésti ke křivce (F, γ) tři tečny, jichž dotyčné body jsou jiné než bod B'. Tyto body leží na konické poláře Γ_2' bodu P'' vzhledem ke křivce (F, γ) .Leží tedy body P' na geometrickém místě těchto kuželoseček Γ_2', když rovina γ se otáčí kolem spojnice $A_7'A_8'$, při čemž opisuje bod P'' křivku (F, β). Budiž plocha Φ geometrické místo těchto kuželoseček.

V rovině γ, procházející body A_7', A'_8, leží jediná kuželosečka Γ_2', jež prochází bodem B' a dotýká se křivky (F, β), a tudíž plochy F v bodě P''. Body P'', které vedou ke kuželosečkám Γ_2' procházejícím bodem přímky $A_7'A_8'$, leží v rovině, totiž v druhé poláře uvažovaného bodu vzhledem k F. Tato rovina protíná křivku (F, β) ve třech bodech, obecně jiných než bod B'. Procházejí tudíž bodem přímky $A_7'A_8'$ tři kuželosečky Γ_2' a tato přímka je tedy pro plochu Φ trojnásobná. Tato plocha je 5-ho stupně a dotýká se plochy F podél křivky (F, β). Bod B' je pro ni čtyřnásobný. Z toho všeho vysvítá, že geometrické místo bodů P' je křivka Γ_9 stupně devátého, protínající každou z přímek $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_6$ ve třech bodech a mající v bodech A_7', A_8' body trojnásobné. Z toho plyne, že geometrické místo devátých bodů dvojnásobných sextik C_6 je křivka C_9 stupně devátého, procházející třikráte každým z bodů $A_1, A_2, \ldots, A_8$.

Kvadriky dotýkající se plochy F v bodech A_7', A_8' vytínají na průsečnici (F, γ) plochy F s rovinou γ procházející přímkou $A_7'A_8'$ involuci, jejíž dvojice bodové leží na přímkách procházejících bodem P''. Přímky opírající se o přímku $A_7'A_8'$ a o křivku (F, β) vytínají tudíž na F dvojice involuce I_2', která odpovídá Bertiniově involuci v rovině ω.

2. Uvažujme zvláštní případ, který nastane, když přímky A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 procházejí týmž bodem, za který vezmeme právě bod B. Těmto třem přímkám odpovídají na F přímky a_{14}, a_{25}, a_{36}, které v tomto případě procházejí všechny bodem B' a leží v tečné rovině β plochy F v tomto bodě. Každý průsek plochy F rovinou, která prochází bodem B', má v B' inflexi. Z toho plyne, že bod P' stále splývá s bodem B'. Leží tudíž bod P' na polární kvadrice bodu B' vzhledem k F. Tato polární kvadrika skládá se z roviny β a z roviny φ, která obecně neprochází bodem B'. Geometrické místo devátých bodů dvojnásobných sextik C_6 je tedy v tomto případě rovinná kubika C_3, jež neprochází bodem B a odpovídá v rovině ω křivce (F, φ). Bertiniově involuci odpovídá na F involuce vyťatá přímkami vedenými bodem B'.

3. Specialisujme soustavu bodů A_i dále tím, že předpokládáme, že body A_4, A_5, A_6 leží resp. na přímkách A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Těmto přímkám odpovídají pak konické body dvojnásobné R_{23}, R_{31}, R_{12} plochy F. Přímky a_1, a_2, a_3 splývají resp. s přímkami $R_{31}R_{12}$, $R_{12}R_{23}$, $R_{23}R_{31}$. Přímky a_4, a_5, a_6 procházejí resp. body R_{23}, R_{31}, R_{12}. Přímky a_{14}, a_{25}, a_{36}, které tvoří průsek plochy F s rovinou β, opírají se resp. o dvojice přímek a_1, a_4; a_2, a_5; a_3, a_6. Polární kvadrika bodu B' skládá se v našem případě z roviny β a z roviny $(R_{23}R_{31}R_{12})$. *Geometrické místo devátých dvojnásobných bodů sextik C_6 skládá se tudíž z okolí prvního řádu bodů A_1, A_2, A_3.*

Uvažujme rovinu γ procházející body A_7', A_8' a protínající na př. přímku a_1 v bodě P'. Existuje ∞^1 kvadrik, tvořících svazek, které se dotýkají F v bodech A_7', A_8', P'. Průsekům F s těmito kvadrikami odpovídají v rovině ω křivky C_6, jež tvoří svazek Halphenův a které mají další bod dvojnásobný v okolí prvního řádu bodu A_1 a tudíž bod taknodální v A_1, při čemž tečna v tomto bodu je stálá.

Podle toho existuje ∞^2 křivek C_6 majících v A_1 bod taknodální, při čemž tečna v tomto bodě je proměnná. Index tohoto systému je roven počtu kvadrik, které procházejí dvěma body M_1, M_2 plochy F, jež neleží s bodem B' v přímce, a dotýkají se této plochy v bodech A_7', A_8' a v jednom bodu přímky a_1. Existují dvě kvadriky procházející body M_1, M_2, jež se dotýkají F v bodech A_7', A_8' a přímky a_1 v jednom bodě. Budiž Q jedna tato kvadrika a P' její bod dotyčný s a_1. Křivka (F, Q) má býti geometrickým místem ∞^1 dvojic involuce, která odpovídá na ploše F involuci Bertiniově. Tato křivka protíná tedy ve dvou bodech každou površku kužele, který ji promítá z bodu B'. Ježto rovina $(B'a_1)$ se dotýká F podél a_1, dotýká se zmíněný kužel plochy F v bodě P' a křivka (F, Q) se dotýká v bodě P' přímky $P'B'$. Z toho plyne, že tato křivka má v P' bod dvojnásobný a že tudíž dvěma body roviny ω procházejí dvě křivky C_6 mající v A_1 bod taknodální.

Výsledky obdobné se obdrží pro body A_2, A_3 a *existují tudíž dvě křivky C_6 mající taknodální body ve dvou z bodů A_1, A_2, A_3.*

*

Note sur la théorie des sextiques elliptiques.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur établit, en utilisant la représentation plane de la surface cubique, quelques théorèmes sur des sextiques elliptiques planes aux points tacnodaux, donnés dans ce même Journal (t. LVII, p. 34—39) par M. Bydžovský et démontrés par lui par des considérations de géométrie plane.

Si l'on considère le système de sextiques ayant huit points doubles $A_1, \ldots A_8$, le lieu du neuvième point double d'une courbe non dégénérée de ce système est, comme on sait, une courbe K_9 du neuvième ordre ayant les points A_i pour points triples. Cette proposition, qui vaut en général, est modifiée d'une façon intéressante dans le cas où — B désignant le neuvième point commun des cubiques du faisceau déterminé par les points A_i — le point B et trois des points A_i sont sommets d'un quadrangle dont les sommets diagonaux sont encore trois des points A_i. En ce cas, la courbe K_9 se réduit à trois points A_i, soit A_1, A_2, A_3 et il n'existe pas de sextique (non dégénérée) du système ayant des points doubles autres que les points A_i. Mais il existe, par contre, une infinité simple de faisceaux de sextiques du système considéré, ayant un des points A_1, A_2, A_3 pour point tacnodal, et même, dans chaque faisceau — lequel est déterminé par le choix de la tangente tacnodale — de ces courbes elliptiques il existe deux courbes (rationnelles) ayant un second point tacnodal (qui est, bien entendu, encore un des points A_1, A_2, A_3).