Huyghensův princip.

Jacques Hadamard.

(Podle čtyř přednášek, které měl J. Hadamard v Praze jako host přírodovědecké fakulty Karlovy university ve dnech 23. května (dvě přednášky) a 24. května a v Brně jako host přírodovědecké fakulty Masarykovy university dne 25. května 1928, sestavil B. Hostinský.)

1. V dopise zaslaném Fresnelovi r. 1823 vyslovuje Poisson mínění, že některé důkazy Fresnelových vět o šíření světla nejsou úplné a praví: „Fysikové jsou často vedeni ve svých výzkumech indukcemi, které bychom nemohli uznati za dostatečné důkazy, které však proto nikterak nepřestávají býti velmi cennými, poněvadž zastupují důkazy, pokud teorie nejsou ještě úplně vypracovány, a poněvadž mimo to vědy jsou jim vděčny za veliký počet krásných objevů.“[1]) Dnes též platí tato slova a platí ještě více. Poisson s důrazem připomíná nutnost důkazů a obdivujeme se mu. Fysikové dovedou předvídati, vycházejíce z inkoherentních předpokladů, jež těžko je sledovati. Jak ukázalo několik Huyghensových řádků fysikům cestu, kterou se mají bráti! Huyghens uvažuje o šíření světla podle undulační teorie, zavedl způsob usuzování, o kterém máme promluviti. Je to intuice velmi geniální a nad míru zastřená; její výklad dá nám hodně práce.

Ve svém spise Traité de la lumière[2]) má Huyghens obraz svícnu; od svícnu šíří se kulové vlny na všechny strany. Budiž O bod (svícen), kde v okamžiku $t = 0$ byl vyslán světelný signál; účinek signálu projeví se v bodě A po uplynutí doby $T = l/c$, je-li $l = OA$ a c rychlost světla. Základní myšlenka Huyghensova jest, že si všímá nikoli toho, co se děje v okamžiku $t = 0$, nýbrž toho, co se děje v nějakém středním okamžiku t', $o < t' < T$. Nepokoušejme se viděti více v Huyghensově textu a přejděme hned k Fresnelovi.

Fresnel znovu rozebral otázku o přímočarém šíření světla,

[1]) *Oeuvres de Fresnel* t. 2., p. 210.

[2]) Vyšlo r. 1690 v Haagu (otisk vydal W. Burckhardt, Lipsko. Otištěno též ve sbírce Maîtres de la Pensée scientifique, Paříž.). Srov. *F. Nušl*: Rozbor Huyghensova spisu Traité de la lumière (Časopis pro pěstování matem. a fysiky, XIX., 1890, p. 281—299).

která byla začátkem Huyghensových úvah. Aby ji rozřešil, užívá Huyghensova principu, který vyslovuje takto: „Vibrace nějaké světelné vlny v každém jejím bodě mohou býti považovány za součet elementárních pohybů, které by tam vyslaly, působíce isolovaně, všechny části té vlny uvažované ve kterékoli z jejích předešlých poloh.“[3]) Dále pak vyslovuje princip o superposici malých pohybů: kmity vyvolané v libovolném bodě pružné tekutiny několika rozruchy jsou rovnocenné s výslednicí všech pohybů vyslaných v témže okamžiku do toho bodu různými centry vlnění. A připojuje k tomu další hypotesu:[4]) Všechny elementární pohyby jsou na povrchu téže koule (jejíž střed je v bodě, odkud vlnění vychází).

2. Vyslovíme raději Huyghensův princip ve formě o něco obecnější jako sylogismus (A, B jsou premisy, C závěr):[5])

A. *Abychom odvodili ze zjevu známého v okamžiku t_0 účinek způsobený v pozdějším okamžiku t_2, můžeme nejprve počítati účinek v nějakém středním okamžiku t_1 ($t_0 < t_1 < t_2$) a pak vyjíti od tohoto, abychom odvodili účinek v okamžiku t_2.*

B. *Je-li počáteční rozruch v okamžiku t_0 omezen na okolí určitého bodu O, jeho účinek v okamžiku t_1 bude všude roven nule s výjimkou okolí kulové plochy S_1 o středu O a o poloměru $c\,(t_1 - t_0)$, je-li c rychlost šíření.*

C. *Počáteční rozruch může býti nahražen, pokud běží o jeho účinek v konečném okamžiku t_2, soustavou rozruchů, které se vyskytují ve středním okamžiku t_1 a jsou vhodným způsobem rozděleny po povrchu koule S_1.*

3. Fresnel, vycházeje ze svých předpokladů shora uvedených, vypočítává co se děje v bodě A v okamžiku t_2, když v okamžiku t_0 byl vyslán z O světelný signál. Považuje elementy kulové plochy S_1 opsané kolem O poloměrem $c(t_1 - t_0)$ za zdroje nových vln vysílaných v okamžiku t_1 a dochází k výsledku, že největší část účinku připadá těm místům na S_1, která leží blízko „vrcholu“ plochy S_1, t. j. jejímu průsečíku s přímkou OA. O tyto názory měl polemiku s Poissonem, jenž právě zde užil výroku, který jsme uvedli na počátku přednášky (viz též dále, odst. 14).[6])

Otázka byla znovu vzata v úvahu Kirchhoffem[7]) r. 1882. Kirchhoff provedl výpočty, které vedou k důkazu Huyghensova principu. V jeho úvahách pak pokračovali Beltrami[8]) a Duhem

[3]) *Oeuvres de Fresnel* t. I., p. 293.

[4]) *Oeuvres de Fresnel* t. I., p. 205, 293.

[5]) Srv. *J. Hadamard*: Le principe de Huygens. (Bulletin de la Société mathém. de France t. 52, p. 610—640; 1924).

[6]) Polemika ta je otištěna v sebraných spisech Fresnelových (*Oeuvres*, t. 2.). Mimo citovanou již práci Hadamardovu viz též *Poincaré*: Leçons sur la théorie mathématique de la lumière, p. 76 a násl.

[7]) *G. Kirchhoff*: Zur theorie der Lichtstrahlen (Ges. Abhandlungen, Nahtrag p. 22—54). Vorlesungen über mathematische optik, zweite Vorles.

[8]) *E. Beltrami*: Sul principio di Huygens (Opere matematische vol. IV., p. 310—319; 499—509).

ve svých obdivuhodných přednáškách.[9]) U Fresnela je znění i užití Huyghensova principu jednoduché a prosté; je však třeba věděti, co dokázal Kirchhoff. Kirchhoff vyšel z rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (E_3)$$

Tato rovnice je matematickým výrazem určitých fysikálních předpokladů. Předpokládá se, že běží o prostředí dokonale stejnorodé a isotropické, úplně prosté pasivních odporů (tření) a jakýchkoli překážek. Nic jiného není než toto prostředí. Běží-li o zvuk, je tím prostředím vzduch, naprosto homogenní. Běží-li o světlo, jest jím éter, jenž vyplňuje celý prostor. Poněvadž však Huyghens nakreslil v obrazci ve své knize svíčku, bylo by nutno, kdybychom chtěli užíti rovnice (E_3), svíčku odmysliti. Předpokládejme (nikoli podle Kirchhoffa!), že běží o neomezené isotropické prostředí. Poisson zabýval se onou rovnicí. Položil si tuto úlohu (t. zv. Cauchyův problém): Nalézti funkci $u(x, y, z, t)$, která by vyhovovala rovnici (E_3) a která by mimo to splňovala počáteční podmínky

$$u = f(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(x, y, z) \quad \text{pro } t = 0,$$

kde f a f_1 jsou dvě dané funkce. Poissonův vzorec, kterým se úloha řeší, je krajně jednoduchý. Chceme-li počítati veličinu $u(x_0, y_0, z_0, t_0)$, opišme kolem bodu (x_0, y_0, z_0) poloměrem $r = ct_0$ kulovou plochu a vypočtěme střední hodnoty $M_r(f)$ a $M_r(f_1)$ ze všech hodnot, kterých funkce f resp. f_1 nabývá na povrchu té koule. Poissonův vzorec zní[10])

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = t_0 M_r(f_1) + \frac{\partial}{\partial t_0}[t_0 M_r(f)], \quad r = ct_0.$$

4. Kirchhoff zabýval se toutéž úlohou, ale na místo, aby předpokládal, jak to činil Poisson, že prostředí jest neomezené, předpokládá, že nevíme, co se děje v určité části prostoru, omezené uzavřenou plochou S a že rovnice (E_3) má býti splněna vně plochy S. Cauchyův problém, který si zde můžeme položiti, zní: je dáno u a $\frac{\partial u}{\partial t}$ v okamžiku $t = 0$ vně plochy S a na ní jsou dány hodnoty u_1 a $\frac{\partial u}{\partial n}$ pro všechny hodnoty t (n značí normálu plochy). První úloha (Poissonova; viz odst. 3) je správně položena a má jediné

[9]) *P. Duhem*: Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique Paris 1891. T. I. (zejména kap. IX a násl.). Srv. též *F. Croze*: Sur le principe d'Huygens (Annales de Physique (10) V. 1926, p. 371—439); kritický rozbor prací o Huyghensově principu.

[10]) Stran důkazu Poissonovy formule viz *Seydler-Koláček*: Základové teoretické fysiky. III. p. 269. *E. Goursat*: Cours d'Analyse metem. 3e édition t. III. p. 484.

řešení. Druhá úloha není správně položena, obecně (t. j. pro libovolně předepsané hodnoty veličin u a $\frac{\partial u}{\partial n}$ na S) vůbec není řešitelna. Kirchhoff předpokládá, že úloha je řešitelna a dostává formuli, která se dá vyložiti takto: účinek vyvolaný neznámými příčinami, působícími uvnitř plochy S, může býti považován za účinek způsobený vibračními centry, která jsou rozložena po ploše S (fiktivní příčiny) a jichž rozdělení se mění během času. Ve speciálním případě může býti plochou S koule opsaná kolem O. Kirchhoff praví: „dokázal jsem Huyghensův princip".

To, co dokázal Kirchhoff, je věta C. Chápeme rozdíl mezi oběma způsoby vyslovení Huyghensova principu. Vyjdeme-li z věty A a přijmeme-li též B, dají A a B spojeny větu C. To je způsob, kterým usuzoval Fresnel. Je to sylogismus, A a B jsou premisy a C závěr. V původní koncepci Fresnelově je tento sylogismus. Avšak když Kirchhoff odvodil princip, odvodil C bez užití vět A a B. Otázka není jednoduchá, promluvíme zvlášť o všech třech částech sylogismu.

5. Začněme s Kirchhoffem o větě C. Pro fysiky a zvláště pro matematiky poznamenejme, že rovnice (E_3) není jediná rovnice parciální, pro kterou se otázka vyskytuje. Předpokládejme na př., že tlak ve vzduchu se mění s výškou nad zemí. Šíření zvuku se pak řídí rovnicí obdobnou, avšak s proměnnými koeficienty (jsou funkcemi výšky z). Běží o to, může-li se pak říci něco podobného (jako je věta C) i o této rovnici.

Počněme problémem jednorozměrným: šíření elektřiny v telegrafickém kabelu. Předpokládejme, že kabel je rovný a homogenní a budiž U potenciál, jenž je funkcí dvou proměnných x a t (x je vzdálenost uvažovaného bodu od počátečního bodu O kabelu). Je velmi pohodlné sestrojiti pro vlny diagram podobně jako se sestrojují grafické jízdní řády pro vlaky. V jízdních řádech železničních bývá diagram upraven tak, že osa Ot je vodorovná a Ox svislá; my naproti tomu zvolíme osu Ox vodorovnou a Ot svislou. Máme se zde zabývati funkcí $U(x, t)$, která vyhovuje rovnici tvaru

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial U}{\partial t} = C\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Transformací nezávisle proměnných dá se tato rovnice převésti na tvar

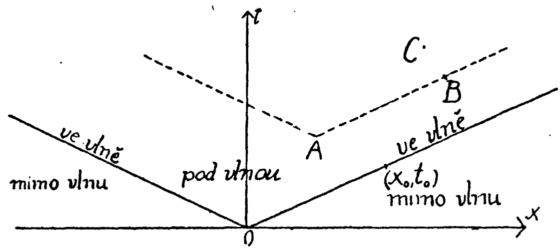
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + cu = 0$$

(rovnice telegrafistů).

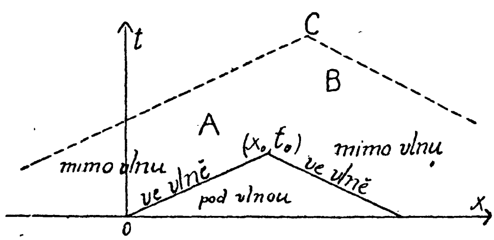
Předpokládejme, že bychom chtěli telegrafovati. Během krátkého časového intervalu od $t = -\varepsilon$ až do $t = 0$ ($\varepsilon > 0$ na př. $\varepsilon = \frac{1}{100}$ vteřiny), vysílá telegrafista v místě $x = 0$ signál. V okamžiku $t = 0$ přestane vysílati a kabel je pak přenechán sám sobě. V nějakém místě $x = x_0$ nepozoruje se v okamžiku $t = 0$ nic; signál zpozoruje se tam teprve v okamžiku $t_0 = \frac{x_0}{\omega}$, kde $\omega = \pm \sqrt{\frac{C}{A}}$. Dvě přímky o směrnicích

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{C}{A}},$$

vedené bodem $O(x = 0)$ znázorňují v diagramu šíření (obr. 1).[11])



Obr. 1.



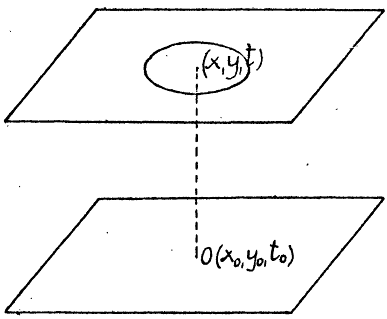
Obr. 2.

O bodech, které leží v diagramu pod oběma přímkami, pravíme, že leží mimo vlnu s původním signálem; body ležící na obou přímkách jsou ve vlně s původním signálem a body nad oběma přímkami jsou pod vlnou s ním. Také bychom mohli začíti s bodem (x_0, t_0) a hledati ty body, se kterými je ve vlně, pod vlnou nebo mimo vlnu. Je třeba vésti bodem (x_0, t_0) dvě přímky se směrnicemi $\pm \sqrt{\frac{C}{A}}$ (charakteristiky), avšak ve smyslu klesajícího t (obr. 2). Mezi oběma diagramy je úplná reciprocita. Je-li na př. v prvním diagramu (obr. 1) bod B ve vlně s bodem A a bod C pod vlnou s A, je ve druhém diagramu A (jakožto bod

[11]) Teorii o šíření vln v kabelu z tohoto hlediska podává *E. Picard* v práci Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité. (Bulletin de la Société math. de France 22, 1894 p. 2—8; otištěno v Mélanges de mathématique et de physique Paris, 1924).

udávající místo a čas signálu) rovněž ve vlně s B a pod vlnou vzhledem k C (obr. 2) atd.[12])

Podmínka, že kabel je homogenní, není podstatná. Mnoho věcí by se změnilo, pokud se týče provedení počtů, kdybychom předpokládali, že kabel není homogenní, takže bychom měli v diferenciální rovnici na místo konstant A, B, C funkce proměnné x; charakteristiky v diagramu byly by složeny z křivek. Ale principy zůstaly by nezměněny; zůstaly by pojmy (pro jednu charakteristiku) „ve vlně", „pod vlnou" a „mimo vlnu". A zase by platila souměrnost vzhledem k oběma bodům, zdroji a pozorovacímu místu.



Obr. 3.

6. Otázka o šíření vln kabelem byla řešena dříve než jiné podobné problémy. Riemannova metoda vypracovaná Darbouxem[13]) nebyla původně vyslovena ve spojitosti s Huyghensovým principem. Volterra[14]) poprvé dokázal Huyghensův princip pro rovnici jinou než (E_3), totiž pro rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad (E_2)$$

kterou se řídí šíření vln válcových. Jsou to vlastně vlny v rovinném prostředí; Volterra se jimi zabýval se stanoviska Huyghensova principu a teorie charakteristik. Je třeba uvažovati o tom, jak se mění pohyby v té rovině během času. Znázorníme čas délkou, kterou budeme nanášeti na třetí osu Ot, kolmou k dané rovině („trojrozměrný časoprostor"). Všechno se děje tak, jakoby se rovina rovnoběžně posunovala s rychlostí = 1, aniž by to její obyvatelé pozorovali. Předpokládejme, že v naší rovině je zdroj vln

[12]) V obr. 1. a 2. vztahují se označení „ve vlně" atd. k bodům 0 a (x_0, t_0).

[13]) *G. Darboux*: Lecons sur la théorie des surfaces, t. II. *E. Picard*: Lecons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles (Paris, 1927) p. 147 a násl.

[14]) *V. Volterra*: Sur les vibrations des corps élastiques isotropes (Acta Mathematica, t. 18., p. 161—232; 1894).

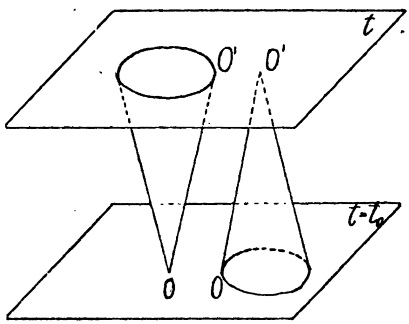
(válcové či kruhové vlny). Je-li v okamžiku $t = t_0$ původní rozruch omezen na okolí bodu $O(x_0, y_0)$, rozšíří se po uplynutí doby $(t - t_0)$ na kruh o poloměru $c(t - t_0)$. Pro bytosti v rovině je tento kruh v rovině samé; pro nás je nutno nakresliti ten kruh ve druhé rovině (obr. 3). Sestrojme ten kruh pro všechny možné okamžiky t. Geometrické místo všech kružnic takto sestrojených je kuželová plocha

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - c^2 (t - t_0)^2 = 0.$$

To je charakteristický kužel; představuje průběh vln. Položme

$$\Gamma = c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2.$$

Pro body (x, y, t), jež jsou „mimo vlnu“ s bodem (x_0, y_0, t_0), jest $\Gamma < 0$; původní rozruch nemůže míti na ně vlivu. Pro body, jež jsou „ve vlně“, je $\Gamma = 0$, a pro body, jež jsou „pod vlnou“ s bodem



Obr. 4.

(x_0, y_0, t_0), jest $\Gamma > 0$. Můžeme též diskutovati podmínku, aby bod $O'(x, y, t)$ byl ve vlně atd. s bodem $O(x_0, y_0, t_0)$ vycházejíce od bodu O'. Podmínka $\Gamma = 0$ je symetrická vůči oběma bodům až na to, že vycházíme-li od bodu O (představujeme si v O zdroj zvuku), přichází v úvahu jakožto geometrické místo bodů O' horní část kužele $\Gamma = 0$ $(t > t_0)$, kdežto vycházíme-li od O' (pozorovatel je ve vrcholu O' tohoto kužele), přichází v úvahu jen dolní část kužele. V obr. 4 jsou naznačeny schematicky oba případy; první v levo, druhý v pravo. Podle de Dondera má kužel ve druhém případě tvar naslouchátka nebo stethoskopu, kterým pozorovatel v O' může zachytiti zvuky přicházející z různých bodů O. Na děj v bodě O' nemohou míti vlivu jiné body než ty, s nimiž O je ve vlně nebo pod vlnou. Body O, jež jsou s O' mimo vlnu, nemají na děj v O' účinku. V teorii relativity je to dobře známo.

V případě jiných složitějších rovnic, kdy koeficienty jsou funkcemi proměnných x a y, máme charakteristické konoidy na místo charakteristických kuželů. Ale až na tento rozdíl všecky předešlé úvahy i zde se vyskytují.

Předpokládejme, že funkce u, vyhovující rovnici (E_2) má se v počátečním okamžiku $t = 0$ redukovati na danou funkci $f(x, y)$ a současně její derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ na jinou danou funkci $f_1(x, y)$. Mějme na mysli část roviny, která se nalézá vně uzavřené křivky s. Rovnice (E_2) platí vně s. Funkce u má býti určena vně s počátečními podmínkami, jež jsme právě vyslovili; mimo to mají u a $\frac{\partial u}{\partial n}$ (n je normála sestrojená k s) nabývati podél s hodnot, jež jsou předepsány jakožto funkce času t (krajové podmínky). To je zase Cauchyův problém. Obecně však v této podobě nemá řešení. Je-li (při zvláštní volbě libovolných funkcí, které se vyskytují v podmínkách počátečních a krajových) řešitelný, děje se všechno tak, jako by na křivce s byla rozložena perturbační centra (to platí, sledujeme-li rozruch jen v rovině; máme-li na mysli znázornění v časoprostoru trojrozměrném, řekneme, že centra rozruchů jsou rozdělena na plášti válce, jehož kolmým řezem je s). To je Huyghensův princip pro vlny v rovině (válcové vlny). Týž problém se vyskytuje u rovnic hyperbolických o více proměnných. Riemannova metoda dovoluje dokázati větu C (Huygensův princip) i pro ně. První závěr zní: C jest obecná vlastnost každé lineární diferenciální rovnice hyperbolické. Abychom obdrželi fiktivní centra rozruchů, stačí integrovati rovnici.[15])

7. Řekněme několik slov o vlně. Když vlna postupuje, je v každém okamžiku prostor rozdělen ve dvě části: jedna část obsahuje body, kam rozruch ještě nedošel, druhá pak body, které již byly vystaveny účinku vln; čelo vlny odděluje jednu část od druhé. Okamžik, kdy čelo vlny zasáhne danou molekulu, je charakterisován náhlou změnou jejího stavu (na př. náhlou změnou jejího zrychlení nebo změnou zrychlení vyšších řádů, běží-li o obyčejný pohyb jako při vlnách akustických). S tohoto hlediska díval se na šíření vln Huyghens a později je precisoval Hugoniot.[16])

Ale fysikové dívají se na věci často jinak: jednajíce o vlnách, mají na mysli permanentní vibrace v celém prostoru. Zdá se, že obě hlediska nemají žádného vztahu. Ale obě teorie dají se sblížiti, aspoň když máme ohled na stanovisko praktické matematiky aproximační, užitím jedné věty Delassusovy:[17]) Singularity funkce (plochy), která vyhovuje lineární parciální rovnici druhého řádu,

---

[15]) Stran problémů nastíněných zejména v odst. 6., 8. a 15., viz *J. Hadamard*: Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partical Differential Equations (Yale University Press, 1923) jakož i jeho práce uveřejněné v Annales de l'École Normale Supérieure (2e série, t. XXI-XXII, 1904-05) a ve Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg (Leipzig 1905).

[16]) Viz *J. Hadamard*: Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique (Paris, 1903).

[17]) *J. Hadamard*: Leçons sur la propagation des ondes, p. 332.

leží na charakteristikách. Vibrační pohyb, když je velmi rychlý, vyjadřuje se funkcí sin νt, kde ν je veliké číslo; funkce ta je singulární se stanoviska praktického, poněvadž její derivace $\nu \cos \nu t$ je veliká.

8. Laplaceova rovnice pro tři nazávisle proměnné

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

integruje se funkcí r^{-1} (elementární potenciál). Je to funkce dvou bodů (x, y, z) a (x_0, y_0, z_0), která se stává nekonečně velikou, když obà body splývají (mimo to je nekonečně veliká na imaginárním charakteristickém kuželi $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0$). V rovině (případ dvou nezávisle proměnných) máme podobně řešení $\log r^{-1}$. Pro hyperbolické rovnice máme obecně funkce, jež nazveme elementárním řešením v. Taková funkce v je nekonečně veliká ve všech bodech charakteristického kužele (nebo konoidu), t. j. v bodech, které leží ve vlně s vrcholem kužele. Je-li počet m nezávisle proměnných lichý, jest

$$v = \frac{V}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}};$$

při tom je $\Gamma = 0$ rovnice charakteristického kužele (n. konoidu) a V regulární funkce obou bodů.

Pro Laplaceovu rovnici (elliptickou, případ $m = 3$) jest

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}},$$

Γ značí vzdálenost obou bodů (dříve označenou písmenem r).

Je-li m sudé číslo, platí vzorec

$$v = \frac{V}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}} + V_1 . \log \Gamma,$$

kde V a V_1 jsou regulární funkce. V případě $m = 2$ zajímá nás jedině člen $V_1 \log \Gamma$. Výpočty Kirchhoffovy a Volterrovy dají se přenésti na obecné rovnice typu hyperbolického; řešení vyjadřuje se integrály vztaženými přes plochy, na nichž leží fiktivní zdroje vln a jež jsou povrchem „naslouchátek“ v případě rovnice (E_2). To jest obsah věty C (srv. též s odst. 12).[18])

9. Vraťme se k větě A. A je věta bezprostředně evidentní, je to princip vědeckého determinismu. Představme si na př. galvanický článek spojený s různými vodiči a přístroji. Známe-li okamžitý stav soustavy, dovedeme předvídati, jaký stav nastane

---

[18]) Viz *J. Hadamard*: Bulletin de la Soc. math. de France t. 52 p. 614 až 621 a jeho Lectures on Cauchy's Problem.

v nějakém pozdějším okamžiku. Dovedeme-li na př. znajíce stav, jaký je ve středu v poledne, vypočítati stav, jenž bude ve čtvrtek v poledne a stav v sobotu v poledne, můžeme počítati tento poslední také ze stavu, jaký byl ve čtvrtek v poledne; v obou případech, nechť vyjdeme ze stavu, jaký byl ve středu nebo ve čtvrtek, musíme dojíti ke stejným výsledkům. Uvažujme blíže o těchto dvou způsobech výpočtu. Věta A spojuje celou teorii s teorií grup. Nejjednodušší je případ, že stav je definován určitým počtem parametrů. Uvažujme o pohybu bodu po přímce v silovém poli. Pohyb jest určen počátečními hodnotami x_0 a x'_0, kterých nabývají úsečka x a její derivace podle času t v okamžiku $t = t_0$. Je možno počítati hodnoty x_1 a x_1', kterých tyto veličiny nabývají v okamžiku $t = t_1 = t_0 + h$. Veličina $h = t_1 - t_0$ definuje bodovou transformaci T_h, která převádí pár veličin (x_0, x'_0) v pár (x_1, x'_1). Podle předpokladu A tvoří tyto transformace grupu. Jsou-li v dalším okamžiku $t = t_2 = t_0 + h + k$ hodnoty veličiny x a její derivace rovny x_2 a x'_2, a je-li T_{h+k} transformace, která vede od (x_0, x'_0) k (x_2, x'_2), platí, že $T_{h+k} = T_h \,.\, T_k$; na pravé straně rovnice je symbolický součin (nejprve aplikuje se transformace T_h, pak T_k). Věta, že všechny tranformace T_h tvoří grupu, vyslovená Picardem r. 1895, jest obrácená k větě Lieově: každá grupa definuje infinitesimální transformaci. Mějme pro jednoduchost grupu o jednom parametru α definovanou rovnicemi

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n; \alpha); \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{1}$$

složíme-li dvě transformace T_α, T_β grupy, které odpovídají hodnotám α resp. β parametru, vznikne transformace $T_\gamma = T_\alpha \,.\, T_\beta$; při tom je γ určitou funkcí proměnných α a β,

$$\gamma = \varphi(\alpha, \beta).$$

Aplikujme na veličiny $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ transformaci určenou rovnicemi (1); transformované veličiny x'_i budou záviseti na α a podle Lieovy věty budou hověti diferenciálním rovnicím

$$\frac{dx_i'}{d\alpha} = k(\alpha) \,.\, X_i(x_1', x'_2 \ldots x_n').$$

Zavedeme-li nový parametr t rovnicí

$$t = \int k(\alpha)\, d\alpha,$$

bude

$$\frac{dx_i'}{dt} = X_i(x'_1, x'_2 \ldots x'_n), \qquad i = 1, 2 \ldots n.$$

To jest systém obyčejných diferenciálních rovnic; rozřešíme-li jej, má obecný integrál tvar Picardovy grupy. Každá grupa dá se převésti na grupu Picardovu, ve které platí

$$T_h \,.\, T_k = T_{h+k} = T_k \,.\, T_h,$$

transformace jsou záměnné. Pro nekonečně malý přírůstek parametru h obdržíme infinitesimální transformaci. To je Huyghensův princip pro zjevy, jež se řídí obyčejnými diferenciálními rovnicemi (přechod z původního stavu do stavu h a pak do stavu $h + k$ dá se pochopiti jako přímý přechod z původního stavu do stavu $h + k$).[19]

10. Uvažujeme-li o podobných problémech pro diferenciální rovnice parciální, přijdeme ke grupě funkčních transformací, jak ukázal Le Roux[20]). Naskytuje se tu neobyčejně zajímavá úloha: f je daná funkce a Φ jiná daná funkce, omezená; rovnicí

$$f_1(x_1, y_1) = \iint f(x, y)\, \Phi(x, y; x_1, y_1; h)\, dx\, dy \tag{2}$$

definuje se funkční transformace; h je parametr. Kdy tvoří všechny tyto funkční transformace, jež obdržíme kladouce za h všechny možné hodnoty, grupu? Připusťme, že pro $h = 0$ dostaneme identickou transformaci

$$f_1(x_1, y_1) = f(x_1, y_1).$$

Pro malé hodnoty parametru h dostaneme infinitesimální transformaci a Lieovými metodami lze odvoditi rovnice, kterým musí Φ vyhověti, aby grupa existovala. Známe-li infinitesimálně transformaci, sestrojíme Φ a zavedeme pak na místo h jiný parametr $f(h)$ tak, aby

$$T_{h+k} = T_h \,.\, T_k.$$

Ale tato teorie nedá se aplikovati na náš případ, neboť dvojný integrál obsahuje (když běží o řešení parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu) též $\frac{\partial t}{\partial x}$ a $\frac{\partial t}{\partial y}$ i vyšší derivace; pro $m = 2, 3, 4$ vyskytují se jen derivace prvního řádu. Zatím zůstaneme při úloze (2).

11. Věta A je truismus. Ale někdy jest užitečno i truismy matematicky formulovati. Zobrazme body (x_0, y_0, t_0), $(x_1, y_1, t_1 = t_0 + h)$ a $(x_2, y_2, t_2 = t_0 + h + k)$ ve třech rovinách rovnoběžných: $t = t_0$, $t = t_1$, $t = t_2$ (srv. odst. 6). Hodnota funkce $f_2(x_2, y_2)$ pro hodnotu parametru $t = t_2$ dá se vypočísti dvojím způsobem. Jednak můžeme vycházeti z hodnot, kterých nabývá funkce $f(x, y)$ odpovídající hodnotě t_0 parametru $t (h = 0)$ podle rovnice

$$f_2(x_2, y_2) = \iint f(x, y)\, \Phi(x, y; x_2, y_2; t_0 + h + k)\, dx\, dy,$$

jednak prostřednictvím funkce $f_1(x_1, y_1)$, která odpovídá parametru $t_1 = t_0 + h$. Platí rovnice

$$f_1(x_1, y_1) = \iint f(x, y)\, \Phi(x, y; x_1, y_1; h)\, dx\, dy$$

[19]) O problémech odst. 9. a násl. viz *J. Hadamard*: Principe de Huygens et prolongement analytique (Bulletin de la Société math. de France, 52, p. 241—278).

[20]) *J. Le Roux*: Recherches sur les équations aux dérivées partielles (Journal de mathématiques pures et appliquées, (5) IX. 1903, p. 403—455).

$$f_2(x_2, y_2) = \int\!\!\int f(x_1, y_1)\, \Phi\, (x_1, y_1; x_2, y_2; k)\, dx_1\, dy_2.$$

Z nich plyne, že

$$f(x_2, y_2) = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int f(x, y)\, \Phi(x, y; x_1, y_1; h)\, \Phi(x_1, y_1; x_2, y_2; k)\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1.$$

Srovnejme tuto poslední rovnici s rovnicí (2); dostaneme vztah pro funkci Φ

$$\Phi(x, y; x_2, y_2; h + k) = \int\!\!\int \Phi(x, y; x_1, y_1; h)\, \Phi(x_1, y_1; x_2, y_2; k)\, dx_1\, dy_1.$$

Integrace se vztahuje ke střední rovině $t = h$. Hle identita, které musí funkce Φ vyhověti. Je to jakýsi integrální adiční teorém vzhledem k parametru.

Zjednodušil jsem problém tím, že jsem předpokládal, že za integračním znamením v rovnici (2) jest jen součin $f \,.\, \Phi$; ale ve skutečnosti (běží-li o Huyghensův princip) vyskytují se ještě parciální derivace funkce f, jichž hodnoty mají vliv na odvozenou funkci f_1!

12. Uveďme některé příklady.

a) Rovnice (E_2) pro válcové vlny má (pro $c = 1$) elementární řešení

$$v_{01} = v_{10} = \frac{1}{(t_1 - t_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2},$$

které je funkcí dvou bodů $A_1(x_1, y_1, t_1)$ a $A_0(x_0, y_0, t_0)$. Vezmeme-li v úvahu ještě třetí bod $A_2(x_2, y_2, t_2)$, budeme míti celkem tři funkce v_{01}, v_{02} a v_{12}, mezi nimiž je zvláštní vztah. Funkce v_{02} může se totiž vypočítati buď přímo z uvedené rovnice nebo na základě funkcí v_{01} a v_{12} dvojnásobným integrálem s integračními proměnnými x_1, y_1. Integrační obor leží v rovině $t = t_1$ a obsahuje jen ty body, jež jsou ve vlně s bodem A_0 a s nimiž zároveň leží ve vlně bod A_2; je to společná část (v obr. 5 vyčárkovaná) kružnic K a K', v nichž jest rovina $t = t_1$ proťata kuželovými plochami

$$v_{01} = 0, \qquad v_{12} = 0.$$

Výpočet vede k tomuto výsledku:[21]) Pišme, jako v odst. 9, $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_0 + h + k$, a položme

$$I = \int\!\!\int v_{01}\, v_{12}\, dx_1\, dy_1 =$$

$$= \int\!\!\int \frac{dx_1\, dy_1}{\sqrt{h^2 - (x_0 - x_1)^2 - (y_0 - y_1)^2}\, \sqrt{k^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}}.$$

Pak jest

$$v_{02} = \frac{\partial I}{\partial h} + \frac{\partial I}{\partial k}.$$

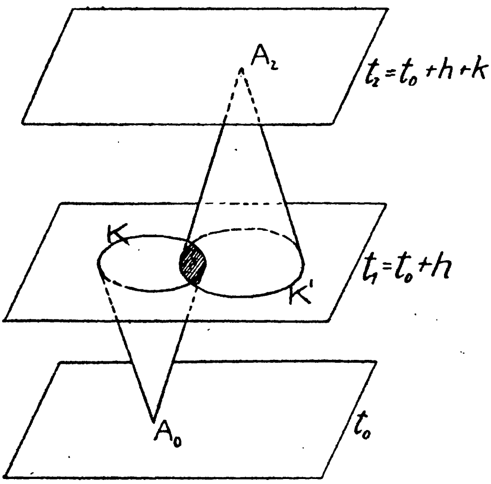
[21]) Viz J. *Hadamard*: Bulletin de la Société math. de France, t. 52, p. 277—278.

Přímé potvrzení tohoto vztahu mohlo by se provésti tak, že bychom na místě proměnných x_1, y_1 zavedli bipolární souřadnice (s póly ve středech kružnic K a K'). Zde, jakož i v dalších příkladech, vede nás Huyghensův princip k identitám, které by bez jeho užití byly dosti skryty.

b) Výpočet funkcí, které vyhovují Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x dy} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x\ y)\,u = 0 \tag{3}$$

a které se určují Cauchyovými podmínkami, dává vztahy obdobné tomu, který jsme obdrželi v jednodušším případě pro funkci Φ v odst. 11. Je-li $v(x, y; x', y')$ t. zv. Riemannova funkce pro rovnici (3), a jsou-li (x', y'), $(x\ y)$ dva body oddělené přímkou $x = x_1$, platí[22])



Obr. 5.

$$\int_{y'}^{y} v(x, y; x_1, \eta)\left[\frac{\partial}{\partial\eta} v(x_1, \eta; x', y') - a(x_1, \eta)\, v(x_1, \eta; x'\ y')\right] d\eta =$$
$$= v(x, y; x', y') - v(x, y; x_1, y')\, e^{\int_{x'}^{x_1} b(x, y')\,dx}. \tag{4}$$

Aplikujme tento vzorec na rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x dy} + u = 0,$$

na niž se dá převésti rovnice telegrafistů (odst. 5). Riemannova

[22]) *J. Hadamard*: Sur un probléme mixte aux dérivées partielles (Bulletin de la Société math. de France, t. 31, 1903, p. 208—224).

funkce je zde dána řadou[23]) (Besselova funkce indexu nula)

$$v(x, y; x', y') = j[(x - x') \cdot (y - y')],$$

$$j(x) = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{(2!)^2} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2} + \ldots$$

a z rovnice (4) vychází

$$\int_{t=0}^{1} j[a(1-t)]\, d[j(bt)] = j(a+b) - j(a),$$

což jest integrální adiční teorém pro Besselovu funkci j.

Pro rovnici Euler-Poissonovu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\beta}{x-y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

která se vyskytuje v teorii přímočarých vibrací vzduchu (platí-li Poissonův vzorec o adiabatickém stlačování), jest

$$u(x, y; x', y') = (y' - x)^{-\beta} (x - y')^{-\beta} (y - x)^{2\beta} F(\beta, \beta, 1, \sigma),$$

kde

$$\sigma = \frac{(x - x')(y - y')}{(x - y')(y - x')}$$

a kde F značí Gaussovu hypergeometrickou řadu[24])

$$F(\beta, \beta, 1, \sigma) = 1 + \frac{\beta^2}{1^2}\sigma + \left[\frac{\beta(\beta+1)^2}{1 \cdot 2}\right]^2 \sigma^2 + \ldots +$$

$$\ldots + \left[\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!}\right]^2 \sigma^n + \ldots$$

Rovnice (4) přechází zde v adiční teorém pro funkci F, který se dá upraviti na tento tvar

$$\int_{u=0}^{1} F[\beta, 1-\beta, 1, xu]\, dF[\beta, 1-\beta, 1, y(1-u)] =$$

$$F[\beta, 1-\beta, 1, x+y-xy] - F[\beta, 1-\beta, 1, x].$$

Přímý důkaz tohoto vztahu podal Cailler.[25]) Kombinace $x + y - xy$, ve které se zde vyskytují parametry x a y je podobná kombinaci, která je ve vzorci pro skládání dvou rychlostí podle principu relativnosti. Je zde nějaká souvislost s teorií relativnosti a tedy s kinematikou neeuklidovské geometrie, na kterou se ono skládání rychlostí podle Borela[25a]) dá převésti?

[23]) *Picard* l. c.

[24]) Viz *J. Hadamard*: Leçons sur la propagation des ondes p. 169.

[25]) *C. Cailler*: Sur une propriété de la série hypergéométrique (Bulletin des sciences mathématiques (2) 30, 1906, p. 20—30).

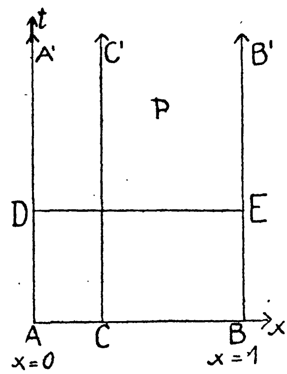
[25a]) *E. Borel*: Introduction géometrique à quelques théories physiques (Paris, 1914).

c) Podle F. Bernsteina[26]) a Doetsche[27]) můžeme odvoditi podobné adiční teorémy pro rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{5}$$

kterou se řídí šíření tepla ve vodiči. Dostaneme zde dva integrální adiční teorémy.

Budiž dána rovná tyč, ležící v ose Ox, jejíž koncové body jsou $x = 0$ a $x = 1$. Cauchyův problém zní: určiti teplotu u jakožto funkci proměnných (x, t) tak, aby hověla rovnici (5) a aby pro $t = 0$ byla rovna dané funkci úsečky x a aby pro $x = 0$ a $x = 1$ rovnala se daným funkcím času. V obr. 6 (rovina xt) je tedy funkce u dána



Obr. 6.

podél obvodu nekonečně dlouhého pruhu omezeného rovnoběžnými paprsky AA' a BB' a úsečkou AB; má se nalézti její hodnota v libovolném bodě P uvnitř pruhu. Řešení úlohy vyjádří se funkcemi theta. Představme si, že jsme určili u podél úsečky DE rovnoběžné s AB t. j., že známe rozdělení teploty u v nějakém okamžiku $t > 0$. Hodnota funkce u v bodě P může se pak počítati také z dat předepsaných podél obvodu pruhu $A'DEB'$. Tak dostaneme první adiční teorém.

Ale také můžeme určiti teplotu podél CC', t. j. v nějakém místě x tyče a počítati pak hodnotu u pro bod P z dat na obvodu pruhu $C'CBB'$. To je zase nový „Huyghensův princip", druhý integrální adiční teorém pro funkce theta.

13. Vraťme se k rovnici

$$f_1(x_1, y_1) = \iint f(x, y)\, \Phi(x, y, x_1, y_1; h)\, dx\, dy. \tag{6}$$

[26]) *F. Bernstein*: Die Integralgleichung der elliptischen Thetafunktion (Sitzungsberichte d. preuss. Akad. d. Wissenschaften 1920, p. 735—747).

[27]) *G. Doetsch*: Über das Problem der Wärmeleitung (Jahresbericht d. deutschen Mathematikervereinigung 33, 1925, p. 45—52).

Zajímáme se o případ, kdy tato rovnice definuje grupu funkčních transformací. V takovém případě musí funkce Φ míti adiční teorém (odst. 11).

$$\Phi(x, y, x_2, y_2; h + k) = \iint \Phi(x, y, x_1, y_1; h)\, \Phi(x_1, y_1, x_2, y_2; k)\, dx_1\, dy_1.$$

Předpokládejme, že tomu tak jest. Pak může se státi, že pro nepříliš veliké hodnoty parametru h ($|h| < h_0$) obdržíme analytické pokračování funkce Φ bezprostředně z předešlé formule. Na př. pro $h_0 \leq h \leq 2h_0$ stačí nahraditi k hodnotou h_0 a dostaneme

$$\Phi(x, y, x_2, y_2; h) = \iint \Phi\left(x, y, x_1, y_1; \frac{h}{2}\right) \Phi\left(x_1, y_1, x_2, y_2; \frac{h}{2}\right) dx_1\, dy_1.$$

Fysikálně to znamená: Dovedete vypočísti funkci Φ pro časový interval $0 \ldots h/2$, pak ji vypočítáte pro interval $h/2 \ldots h$ atd. Mechanika nebes poskytuje příklady: místo abychom počítali souřadnice planet pro dvě století do budoucna, počítáme nejprve jejich hodnoty pro první století a z těchto teprve hodnoty platné pro století druhé. Podobné poměry mohou nastati v případě diferenciální rovnice, která nás zajímá. Ale transformační formule je zde složitější než (*b*), neboť se tu vyskytují derivace funkce f.[28]

Také geometrické otázky se tu vyskytují: paprsky šíří se přímočaře, jeden druhému nepřekáží. Ale když nastane odraz nebo lom, jejich dráhy se zaplétají (jako dráhy automobilů na ulicích). Dostáváme kaustické plochy. V přírodě vše probíhá tak jako v případě jednoduchém. Výpočet však je složitý. Běží o to vysvětliti, proč předpoklad *A* neztrácí svého významu, když rozruch v daném okamžiku je na ploše, která má dvojné čáry, singularity.

Vezměme případ dvou prostorových proměnných x, y (rovnice (E_2)). Šíření vln, jež vycházejí z bodu O, znázorňuje se charakteristickým kuželem s vrcholem v O. Začal-li se šířiti rozruch z O v okamžiku $t = t_0$, bude v okamžiku t_1 rozšířen na vnitřek kružnice o poloměru $c(t_1 - t_0)$; kružnice ta je řez roviny $t = t_1$ s charakteristickým kuželem (podle znázornění zavedeného v odst. 6). Vně kužele není žádného rozruchu (oblast bodů, které leží s bodem O „mimo vlnu"). Je-li bod (x_1, y_1, t_1) „ve vlně", vyskytne se nějaký rozruch. Ale to vše neříká nic o tom, co se stane, když vlna přešla. Po dlouhou dobu mýlili se badatelé běžnou zkušeností (sférické vlny, rovnice E_3). Ze zkušenosti víme toto: Vystřelíme z pistole na nějakém místě. Vzdálený pozorovatel po uplynutí určité doby zaslechne výstřel a slyší zvuk po tak dlouhou dobu, jak dlouho výstřel sám trval. Jakmile však vlna jednou přejde, není více zvuku. Je podivno, že Huyghens nevěřil úplně předpokladu *B*. Sám sobě odporuje. Aby ustanovil účinek, který způsobí v oka-

[28]) *J. Hadamard*: Bulletin de la Société math. de France, t. 52, p. 241 a násl.

mžiku t_2 sférická vlna, jež v okamžiku t_0 vychází z bodu A, nahrazuje ji nikoliv jen vlnami vycházejícími z jednotlivých bodů koule S_1 o poloměru $c(t_1 - t_0)$, kde $t_0 < t_1 < t_2$, nýbrž celou soustavou sférických vln vycházejících ze všech bodů položených uvnitř S_1. Ale skutečný účinek připisuje jen těm vlnám, které se dotýkají obálky S_2 (koule o poloměru $c(t_2 - t_0)$; o ostatních vlnách praví, že jsou příliš slabé, než aby mohly způsobiti světlo.[29]) Poincaré napsal, že tento výklad neobstojí při přesném rozboru.[30]) Myslím však, že Huyghensův způsob usuzování zasluhuje, aby se o něm uvažovalo. Od dob války víme, že výstřel z děla způsobuje dva druhy zvuku: ránu a svištění. Rána je slyšitelná podél dráhy projektilu. Nejsme-li příliš daleko od té dráhy a je-li rychlost projektilu větší než rychlost zvuku, vznikne zvláštní zvuk. Nastává nahromadění vln, silná detonace, účinnější než původní rána.[31]) Když mohou míti vzduchové vlny takovéto účinky, proč by nemohly podobně působiti vnitřní Huyghensovy vlny?

14. Vraťme se k rovnici (E_3) a k Poissonově úloze (viz odst. 3). Abychom vypočetli hodnotu funkce u v bodě A, opišme kolem A kulovou plochu Σ_0 poloměru ct. Jsou-li f a f_1 hodnoty funkce u a její derivace podle t pro $t = 0$ na ploše Σ, určeme střední hodnoty $M_{ct}(f)$ a $M_{ct}(f_1)$; hledaná hodnota u vyjádří se pak dvojnásobnými integrály. Předpokládejme, že počáteční rozruch v okamžiku $t = 0$ jest omezen na určitou oblast prostoru; pro $t = 0$ je bod A mimo vlnu. Nechť roste poloměr ct. Koule Σ začne protínati onu oblast (při určitém t dostává se bod A „do vlny"). Zvětšuje-li se pak poloměr ct dále, bude A „pod vlnou" s onou oblastí. Výsledek pokusů potvrzuje matematickou teorii. Platí věta B.

Mezi Poissonem a Fresnelem vznikla polemika.[32]) Fresnel předpokládá původní rozruch v bodě O, pak zavádí elementární vlny vycházející z míst A_1 ležících mezi O a A a skládá je v bodě A. Všechny tyto vlny vycházejí v okamžicích různých od toho, kdy skutečná vlna zastihne bod A a přicházejí do A s různými fásemi. Elementární vlny se vzájemně ruší ve svých účincích a zbývá jen t. zv. účinný pás. Poisson proti tomu namítl, že vše to musí platiti také obráceným postupem: elementární vlny vycházející z bodů A_1 dávají nejen vlnu (vnější obálku, která podle Huyghense jest účinná) procházející bodem A, nýbrž také vlnu, která se šíří od A_1 k A', směrem k bodu O (obr. 7). Fresnel správně poznal, že je třeba vzíti v úvahu polohy i rychlosti částic (molekul

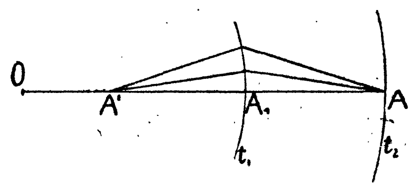
[29]) Viz *Hadamard*: Bulletin de la Soc. m. de F. 52, p. 625 a násl. *Huyghens*: Traité de la lumiére, na konci Chap. I. *F. Nušl*: Časopis pro pěstování mat. a fysiky p. 286.

[30]) *H. Poincaré*: Leçons sur la théorie mathématique de la lumiére p. 77.

[31]) O případu, kdy stav vzduchu závisí na výšce z, jedná *H. Galbrun* v práci De la propagation du son dans les fluides (Journal de mathématiques pures et appliquées, (9) VII., 1928, p. 299—318).

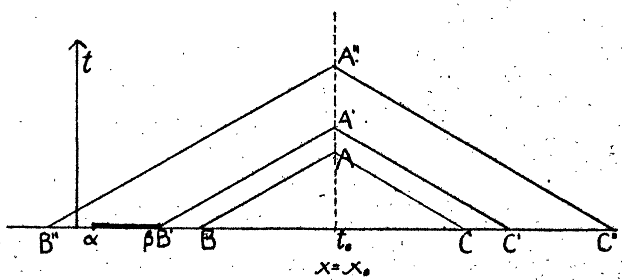
[32]) *Oeuvres* de *Fresnel* II., p. 183 a násl.

vzduchu při akustických vlnách) a konstantuje, že účinky zhuštění a rychlostí se sečítají v bodě A, kdežto že se ruší v bodě A'. Otázka je zde taková jako u Hugoniota: běží o kompatibilitu dvou pohybů. Tak v případě vln, jež se šíří v rovině (rovnice E_2) máme pochopiti druhou kružnici (v okamžiku t_2) jakožto účinek prvé kružnice (jejíž obvod je čelem vlny v dřívějším okamžiku t_1). Mysleme si, že bychom měli uvnitř prvé kružnice určitý pohyb. Kdybychom jej předepsali zcela libovolně, vytvořil by dvě vlny, jednu vnější, druhou centripetální. Nejsou-li určité poměry zachovány v tom, co se děje uvnitř první kružnice, máme dvě vlny.



Obr. 7.

Podmínky kompatibility byly částečně objasněny Hugoniotem (vznik diskontinuit při šíření vln). Podmínky ty jsou nutné, avšak nestačí k tomu, aby za čelem vlny nic nebylo. Tento problém je nezávislý na předpokladu B. Počet ukazuje, že i když B neplatí (když tedy nastává pohyb i mimo čelo vlny), jsou obecně dva pohyby. Je nutno splniti podmínky kompatibility.



Obr. 8.

Vraťme se k B. Běží o Cauchyův problém pro rovnici (E_3); věta B platí. To plyne z Poissonovy formule. Kirchhoffova formule vede ke stejnému závěru.

15. Jak se mají věci u jiných rovnic? Hle, co shledali telegrafisté: vysílací stanice vyšle signál, přijímací stanice jej zaznamená a potom ještě je stále pod vlivem vln. Po užitečném účinku pokračuje stále účinek škodlivý, který ruší signály následující. U podmořských kabelů jest účinek velmi silný. Teorii podali Poincaré

a Picard.[33]) V diagramu, kterým podle odst. 5 znázorňujeme funkce u, vyhovující rovnici telegrafistů, jeví se řešení problému takto: V počátečním okamžiku $t = 0$ je rozruch v kabelu omezen na interval $\alpha\beta$ (viz obr. 8). Hodnota hledané funkce u v libovolném místě $x = x_0$ v okamžiku t ($t = A_0A$, $OA_0 = x_0$) rovná se součtu dvou veličin, které jsou úměrny počátečním hodnotám u v bodech B a C, zvětšenému o určitý integrál, který se rovná nule, pokud interval (α, β) neleží uvnitř úsečky BC. Body B a C jsou průsečíky charakteristik, vedených bodem A, s osou Ox. Pokud je bod A mimo vlnu s intervalem (α, β), není v místě $x = x_0$ rozruchu. Během času však místo $x = x_0$ přichází do vlny s α (bod A' v diagramu), a pak je pod vlnou (bod A''). V místě $x = x_0$ začne tedy rozruch v okamžiku t' ($A_0A' = t'$) a trvá stále, neboť interval (α, β) jest uvnitř úsečky $A'B'$ pro všechna větší t'. Integrální člen dává zbytkový integrál.[34])

Volterra shledal, že stejný případ nastává pro vlny válcové (rovnice (E_2)). Je zde řada neřešených problémů. Které jsou to rovnice, pro něž platí B? (není difuse). První odpověď na tuto otázku dávají vzorce pro elementární řešení (viz odst. 8). Difuse je vždy, je-li počet proměnných m lichý. Pro sudé M není difuse, vyjímaje případ, že $V_1 = 0$. Aby difuse nebyla, je nutno, aby $V_1 = 0$.

Jak špatně bychom byli inspirováni, kdybychom činili onen sylogismus (odst. 2)! To není důkaz; věty A a C jsou správné, B jest nesprávná.

Které rovnice (pro m sudé) jsou to, pro něž $V_1 = 0$? Otázka je velmi nesnadná. Víme, že rovnice (E_3) je toho druhu. Bodovými transformacemi dostali bychom z ní jiné rovnice, pro něž by zase bylo $V_1 = 0$. Metoda výzkumu by měla dáti všechny tyto rovnice; je to otázka o diferenciálních invariantech.

16. Předpokládejme, že je difuse. Bude zbytkový integrál. Ten nebude hověti diferenciální rovnici. Rovnice $\Delta u = 0$ má všechna řešení analytická. Hyperbolické rovnice mají řešení, jež nejsou nutně analytická. Zbytkové integrály jsou vždy analytické.

Může se státi, že zbytkový integrál je konstantní? Nejjednodušší příklad: Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

má zbytkový integrál $u = \text{const}$. Pro rovnice o dvou nezávisle

[33]) *H. Poincaré*: Sur la propagation de l'électricité (Comptes Rendus 117, 1027—1032; 1893) *E. Picard* (viz práce citované v poznámce k odst. 5a. Dílo téhož autora: Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles (Paris, 1927), p. 167, 180.

[34]) K odst. 15. a 16. viz práci *Hadarmardovu*: Sur l'intégrale résiduelle (Bulletin de la Société math. de France, t. 28, 1900, p. 69—90. a článek v Comptes Rendus t. 168 (1919) p. 533.

proměnných platí věta: zbytkový integrál vyhovuje lineární diferenciální rovnici téhož tvaru, jako je rovnice původní, tehdy a jen tehdy, dá-li se daná rovnice řešiti Laplaceovou metodou.

Mohou býti počáteční podmínky tak voleny, aby nebylo difuse? Telegrafisté rozřešili problém prakticky. Podle Lorda Kelvina[35]) nastává tento případ u telegrafické rovnice, když se užije sinusoidální emise (zbytkový integrál rovná se pak nule).

Kdy je možno považovati některé řešení rovnice za zbytkový integrál? Tato otázka vede k integrální rovnici prvního druhu

$$\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

kde φ je neznámá funkce. V případě rovnice druhého druhu

$$f(x) - \lambda\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

je zřejmo, že nezávisle proměnná x jest pro obě funkce $f(x)$ i $\varphi(x)$ obsažena v témže intervalu (a, b). Ale v případě integrální rovnice prvního druhu je tomu jinak. Obyčejně se řešení této rovnice převádí na řešení rovnice druhého druhu; ale mělo by se nalézti řešení takové, aby funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ byly definovány ve dvou zcela různých intervalech.

Nastává-li odraz vln, neklademe si zpravidla úlohu ve tvaru Cauchyově. Duhem našel pro rovnici (E_3) tento výsledek:[36]) Ve vzduchu, sahajícím do nekonečna je tuhá koule. Vše je v klidu až do okamžiku $t = 0$. V okamžiku $t = 0$ začne koule radiálně kmitati až do okamžiku $t = n$, kdy se vrátí do své původní polohy, ve které pak již zůstává. Vzduchem projdou vlny pocházející od pulsací koule, ale i potom zůstává až do nekonečna zbytkový pohyb vzduchu obecně různý od nuly. Překážka, kterou koule klade akustickým vlnám, vyžaduje, abychom položili t. zv. problém smíšený.

*

Principe d'Huyghens.

(Résumé des leçons données par J. Hadamard en 1928 à Prague et à Brno, rédigé par B. Hostinský).

1. Idée fondamentale d'Huyghens. — 2. Enoncé du principe. — 3. Théorie de Fresnel; formule de Poisson. — 4. Théorie de Kirchhoff (proposition C). — 5. Proposition C pour le cas de l'équation

[35]) Různé práce Lorda Kelvina o kabelové telegrafii jsou otištěny v *Mathematical, and Physical Papers by Sir William Thomson*, vol. III.

[36]) *P. Duhem*: Hydrodynamique, élasticité, Acoustique I, p. 236—237.

des télégraphistes. — 6. Cas des ondes cylindriques; caractère général de la proposition C. — 7. Notion d'onde. — 8. Groupes de transformations fonctionnelles. — 11. Thèorèmes d'addition intégraux déduits de la proposition A. — 12. Exemples. — 13. Prolongement analytique. Questions géométriques. Caustiques. — 14. Polémique entre Fresnel et Poisson. — 15. La proposition B n'est pas vraie pour les équations du second ordre en général. Intégrale résiduelle. — 16. Propriétés diverses de l'intégrale résiduelle.