Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Rostislav Košťál

Podmínky pro stabilisaci kmitů spřažením

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. 2, 50--58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123985

Podmínky pro stabilisaci kmitů spřažením.

Rostislav Košťál, Brno.

(Došlo 2. března 1938.)

V pojednání „Sur la stabilisation des oscillations par couplage"[1]) odvodil jsem podmínky, za kterých systém n spřažených elementů dává stabilní kmity, ať již elementy nespřažené dávají kmity stabilní neb nestabilní. Při použití těchto podmínek jest třeba určiti hodnosti a signatury kvadratických forem a potenční součty kořenů. V tomto pojednání uvádím, jak se určí signatura kvadratické formy a potenční součty kořenů a jak se užitím těchto výsledků upraví dřívější uvedené podmínky. K tomu použijeme věty:

Buď

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

kvadratická forma, jejíž determinant jest

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proměnné $x_1, x_2 \dots x_n$ uspořádáme tak, aby v řadě hlavních subdeterminantů

$$R_n, R_{n-1} \dots R_1, R_0 = 1$$

uvedeného determinantu byl co možná nejmenší počet počátečních členů roven nule, a z následujících členů nikdy dva po sobě jdoucí nerovnali se nule. Označíme-li μ počet nulových počátečních členů, π počet shod znamének a ν počet změn znamének v řadě hlavních subdeterminantů, jest hodnost kvadratické formy

$$h = n - \mu = \pi + \nu$$

a signatura

$$\varrho = \pi - \nu.$$

[1]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **65** (1935), 40.

Determinanty vyskytující se v uvedeném pojednání jsou Hankelovy determinanty. Pro ně platí vztah

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{n-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_n \\ \vdots & \\ \vdots & \\ s_{n-1} & s_n \dots s_{2n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots \lambda_n^2 \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 = \prod_{\mu>\nu}^{1,n} (\lambda_\mu - \lambda_\nu)^2,$$

při čemž $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ jsou kořeny rovnice, z nichž byl vytvořen determinant Δ_n.

Když všechny kořeny dané rovnice budou jednoduché, t. j. když $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ pro $1 \leq \nu$, $\mu \leq n$, $\mu \neq \nu$, bude Hankelův determinant $\Delta_n \neq 0$. Když aspoň jeden kořen bude násobný, pak $\Delta_n = 0$. Hlavní subdeterminant prvého řádu tohoto determinantu můžeme odvoditi takto. Platí tento vztah mezi maticemi

$$\begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \dots s_{n-2} \\ s_1 & s_2 & s_3 \dots s_{n-1} \\ s_2 & s_3 & s_4 \dots s_n \\ \dots\dots & & \\ s_{n-2} & s_{n-1} & s_n \dots s_{2n-4} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots \lambda_n^2 \\ \dots\dots & & & \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \dots \lambda_n^{n-2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \dots \lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \dots \lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \dots \lambda_3^{n-2} \\ \dots\dots & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 \dots \lambda_n^{n-2} \end{Vmatrix}$$

Podle známého pravidla dá se vyjádřiti determinant matice na levé straně této rovnice součtem jistých součinů vždy jednoho $((n-1)$-řadového) determinantu první matice s jedním determinantem druhé matice na pravé straně. Odtud dostáváme

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots s_{n-2} \\ s_1 & s_2 & \dots s_{n-1} \\ \dots\dots & & \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \dots s_{2n-4} \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ \lambda_{\nu_1} & \lambda_{\nu_2} & \dots \lambda_{\nu_{n-1}} \\ \lambda_{\nu_1}^2 & \lambda_{\nu_2}^2 & \dots \lambda_{\nu_{n-1}}^2 \\ \dots\dots & & \\ \lambda_{\nu_1}^{n-2} & \lambda_{\nu_2}^{n-2} & \dots \lambda_{\nu_{n-1}}^{n-2} \end{vmatrix}^2,$$

kde Σ se vztahuje na $\binom{n}{n-1}$ kombinací kořenů $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$.

Z tohoto výsledku vidíme: má-li daná rovnice všechny kořeny jednoduché, jsou všichni sčítanci kladní, proto $\Delta_{n-1} \neq 0$; když má daná rovnice jen jeden kořen dvojnásobný, pak jsou všichni sčítanci rovni nule až na jeden, proto $\Delta_{n-1} \neq 0$; v ostatních případech je $\Delta_{n-1} = 0$.

Abychom z původního Hankelova determinantu vytvořili jiný subdeterminant prvého řádu než hlavní, postupujeme podobně jako dříve: mezi maticemi platí vztah

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots s_k & s_{k+2} \dots s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots s_{k+1} & s_{k+3} \dots s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_l & s_{l+1} & \dots & \dots \\ s_{l+2} & s_{l+3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^l & \lambda_2^l & \dots & \lambda_n^l \\ \lambda_1^{l+2} & \lambda_2^{l+2} & \dots & \lambda_n^{l+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \dots \lambda_1^k & \lambda_1^{k+2} \dots \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \dots \lambda_2^k & \lambda_2^{k+2} \dots \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 \dots \lambda_n^k & \lambda_n^{k+2} \dots \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

odtud obdržíme pro determinanty jako dříve vztah

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots s_k & s_{k+2} \dots s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots s_{k+1} & s_{k+3} \dots s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_l & s_{l+1} & \dots & \dots \\ s_{l+2} & s_{l+3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \Sigma \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_{\nu_1} & \lambda_{\nu_2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}} \\ \lambda_{\nu_1}^2 & \lambda_{\nu_2}^2 & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu_1}^k & \lambda_{\nu_2}^k & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^k \\ \lambda_{\nu_1}^{k+2} & \lambda_{\nu_2}^{k+2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu_1}^{n-1} & \lambda_{\nu_2}^{n-1} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_{\nu_1} & \lambda_{\nu_2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}} \\ \lambda_{\nu_1}^2 & \lambda_{\nu_2}^2 & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu_1}^l & \lambda_{\nu_2}^l & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^l \\ \lambda_{\nu_1}^{l+2} & \lambda_{\nu_2}^{l+2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{l+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu_1}^{n-1} & \lambda_{\nu_2}^{n-1} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{n-1} \end{vmatrix},$$

kde Σ se vztahuje na $\binom{n}{n-1}$ kombinací kořenů $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$.

Když hlavní subdeterminant prvého řádu je roven nule, t. j. rovnice má méně než $n - 1$ kořenů navzájem různých, jest také každý jiný subdeterminant prvého řádu roven nule, poněvadž všechny determinanty, z nichž tento determinant vznikne násobením, mají aspoň dva sloupce stejné.

Podobně je tomu i při každém jiném subdeterminantu vyššího řádu. Když hlavní subdeterminant řádu p Δ_{n-p} je roven nule, t. zn., že rovnice má méně než $n - p$ kořenů navzájem různých. musí také každý jiný subdeterminant řádu p býti roven nule, poněvadž všechny determinanty, z nichž tento determinant vznikne násobením, mají $n - p$ sloupců a proto aspoň dva sloupce stejné.

Když hlavní subdeterminant řádu r není roven nule, musí každý další hlavní subdeterminant vyššího řádu býti rovněž různý od nuly, poněvadž se již nemohou v determinantech, z nichž vzniká, vyskytnouti takové, které by měly dva sloupce stejné (ani dvě řádky).

Z těchto výsledků plyne, že u kvadratické formy, jejímž determinantem jest Hankelův determinant, není třeba k užití uvedené věty uspořádati proměnné tak, aby byly podmínky splněny,. poněvadž u Hankelova determinantu jsou splněny vždy. Proto uvedená věta zní pro Hankelův determinant takto:

Označíme-li v řadě hlavních subdeterminantů

$$R_n, R_{n-1}, \ldots, R_1, R_0 = 1$$

determinantu

$$R_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \vdots & & & \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} \tag{1}$$

počet nulových počátečních členů μ, počet shod znamének π a počet změn znamének ν, jest hodnost kvadratické formy

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s_{i+k-2}\lambda_i\lambda_k$$

$$h = n - \mu = \pi + \nu$$

a signatura

$$\varrho = \pi - \nu.$$

Členy determinantu (1) jsou potenční součty kořenů charakteristické rovnice. Řadu determinantů určíme buď tak, že potenční součty kořenů nahradíme koeficienty charakteristické rovnice podle Newtonových formulí, nebo výhodněji tak, že determinanty s potenčními součty kořenů nahradíme jinými s koeficienty dané rovnice podle vztahu prof. dr. K. Čupra.[2]) Podle Čuprova vztahu platí pro charakteristickou rovnici

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + \beta_1\lambda^{n-1} + \beta_2\lambda^{n-2} + \ldots + \beta_n = 0$$

[2]) Dr. K. Čupr: Použití signatury kvadratických forem v nauce o algebraických rovnicích, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **57** (1928), 217.

a pro determinanty

$$R_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{r-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_r \\ \vdots & \\ s_{r-1} & s_r \dots s_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & 3\beta_3 \dots & (2r-3)\,\beta_{2r-3} & (2r-2)\,\beta_{2r-2} \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \dots & \beta_{2r-4} & \beta_{2r-3} \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 \dots & (2r-4)\,\beta_{2r-4} & (2r-3)\,\beta_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & (n-r+2)\,\beta_{r-2} & (n-r+1)\,\beta_{r-1} \end{vmatrix},$$

kde $1 \leqq r \leqq n$.

Tímto způsobem dá se upraviti podmínka druhá a čtvrtá v dříve uvedených podmínkách, takže máme výsledek:

Aby systém diferenciálních rovnic (II) dával stabilní kmity, k tomu je nutné a stačí, aby rovnice (III) splňovala podmínky[3]):

1. nulový kořen může míti jen jednoduchý; když má nulový kořen, zavedeme funkci $F(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda}$; jinak $F(\lambda) = f(\lambda)$; stupeň $F(\lambda)$ označme m'

$$F(\lambda) \equiv \lambda^{m'} + \beta_1 \lambda^{m'-1} + \beta_2 \lambda^{m'-2} + \dots + \beta_{m'} = 0;$$

2. signatura ϱ' kvadratické formy

$$\sum_{\xi=1}^{m'} \sum_{\eta=1}^{m'} s'_{\xi+\eta-2} \lambda_\xi \lambda_\eta,$$

jejíž determinant jest

$$D'_{m'} = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 & \dots s'_{m'-1} \\ s'_1 & s'_2 & \dots s'_{m'} \\ & & \vdots \\ s'_{m'-1} & s'_{m'} & \dots s'_{2m'-2} \end{vmatrix},$$

musí splňovati podmínku $h - \varrho' \geqq 2$, t. j.

$$\pi' + \nu' - \pi' + \nu' \geqq 2, \text{ čili } \nu' \geqq 1,$$

při čemž h jest hodnost kvadratické formy, π' počet shod znamének a ν' počet změn znamének v řadě hlavních subdeterminantů

$$D'_{m'},\ D'_{m'-1} \dots D'_1,\ D'_0 = 1$$

determinantu $D'_{m'}$, vypočtených podle vztahu

[3]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **65** (1935), 47.

$$D'_r = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 & \dots & s'_{r-1} \\ s'_1 & s'_2 & \dots & s'_r \\ \vdots & & & \\ s'_{r-1} & s'_r & \dots & s'_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & 3\beta_3 & \dots & (2r-3)\,\beta_{2r-3} & (2r-2)\,\beta_{2r-2} \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{2r-4} & \beta_{2r-3} \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 & \dots & (2r-4)\,\beta_{2r-4} & (2r-3)\,\beta_{2r-3} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (m'-r+2)\,\beta_{r-2} & (m'-r+1)\,\beta_{r-1} \end{vmatrix},$$

kde $1 \leqq r \leqq m'$;

3. $\beta_{m'-2\nu} > 0$ a buď všechna $\beta_{m'-2\nu-1} > 0$, anebo všechna $\beta_{m'-2\nu-1} = 0$ pro $0 \leqq \nu \leqq \left[\frac{m'-1}{2}\right]$;

4. postupným dělením určíme největší společnou míru

$$d(y) \equiv d_0 y^\tau + d_1 y^{\tau-1} + \dots + d_\tau$$

dvou polynomů $g(y) = g(\lambda^2)$, $h(y) = h(\lambda^2)$, utvořených jednak z členů o sudých mocninách λ, jednak z členů o lichých mocninách λ rovnice $F(\lambda) = 0$, $F(\lambda) = g(\lambda^2) + \lambda h(\lambda^2)$. Označíme-li $\varrho = \pi - \nu$ signaturu kvadratické formy

$$\sum_{\xi=1}^{\tau} \sum_{\eta=1}^{\tau} s_{\xi+\eta-2}\, y_\xi y_\eta,$$

při čemž s jsou potenční součty kořenů největší společné míry $d(y) = 0$, π počet shod znamének a ν počet změn znamének v řadě hlavních subdeterminantů

$$D_\tau, D_{\tau-1}, \dots D_1, D_0 = 1$$

determinantu

$$D_\tau = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{\tau-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_\tau \\ \vdots & & & \\ s_{\tau-1} & s_\tau & \dots & s_{2\tau-2} \end{vmatrix}$$

vypočtených podle vztahu

$$D_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{r-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_r \\ \vdots & & & \\ s_{r-1} & s_r & \dots & s_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_0^{2r-2}} \begin{vmatrix} d_1 & 2d_2 & 3d_3 & \dots & (2r-3)\,d_{2r-3} & (2r-2)\,d_{2r-2} \\ d_0 & d_1 & d_2 & \dots & d_{2r-4} & d_{2r-3} \\ 0 & d_1 & 2d_2 & \dots & (2r-4)\,d_{2r-4} & (2r-3)\,d_{2r-3} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (\tau-r+2)\,d_{r-2} & (\tau-r+1)\,d_{r-1} \end{vmatrix}$$

pro $1 \leqq r \leqq \tau$, musí platiti

$$\Delta_\nu > 0 \text{ pro } 1 \leqq \nu \leqq m' - 2\varrho.$$

při tom

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 & \beta_5 & \dots & \beta_{2\nu-1} \\ 1 & \beta_2 & \beta_4 & \dots & \beta_{2\nu-2} \\ 0 & \beta_1 & \beta_3 & \dots & \beta_{2\nu-3} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \beta_\nu \end{vmatrix}.$$

Poznámka. Je-li $\varrho > 0$, pak má charakteristická rovnice již aspoň dva imaginární kořeny a jest tím již splněna podmínka 2., kterou není třeba vyjadřovat.

*

Sur les conditions de la stabilisation des oscillations par couplage.

(Extrait de l'article précédent.)

Le but de ce travail est de donner une forme convenable pour le calcul aux conditions pour qu'un système de n éléments couplés donne des oscillations stables.[1]) On obtient le résultat suivant:

Pour que le système des équations différentielles (II) donne des oscillations stables, il faut et il suffit que l'équation caractéristique (III) remplisse les conditions suivantes[2]):

1. Si une racine zéro existe, elle doit être simple. Dans ce cas introduisons la fonction $F(\lambda) = f(\lambda)/\lambda$, dans le cas contraire $F(\lambda) = f(\lambda)$; désignons par m' le degré de $F(\lambda)$.

2. La signature de la forme quadratique

$$\sum_{\xi=1}^{m'} \sum_{\eta=1}^{m'} s'_{\xi+\eta-2} \lambda_\xi \lambda_\eta,$$

où les s' sont les sommes des puissances des racines de l'équation caractéristique $F(\lambda) = 0$, et dont le déterminant est

$$D'_{m'} = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 & \dots & s'_{m'-1} \\ s'_1 & s'_2 & \dots & s'_{m'} \\ \vdots & & & \\ s'_{m'-1} & s'_{m'} & \dots & s'_{2m'-2} \end{vmatrix},$$

doit remplir la condition $h - \varrho' \geqq 2$, c'est-à-dire

$$\pi' + \nu' - \pi' + \nu' \geqq 2, \text{ ou } \nu' \geqq 1,$$

où h est le rang de la forme quadratique, π' le nombre des perma-

[1]) Časopis pro pěst. matematiky a fysiky **65** (1935), 40.
[2]) Časopis pro pěst. matematiky a fysiky **65** (1935), 47.

nences des signes et ν' le nombre des variations des signes dans la suite des subdéterminants principaux

$$D'_{m'},\ D'_{m'-1} \ldots D'_1,\ D'_0 = 1$$

du déterminant $D'_{m'}$ qui sont calculés au moyen de l'équation

$$D'_r = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 \ldots s'_{r-1} \\ s'_1 & s'_2 \ldots s'_r \\ \vdots & \\ s'_{r-1} & s'_r \ldots s'_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & 3\beta_3 \ldots & (2r-3)\,\beta_{2r-3} & (2r-2)\,\beta_{2r-2} \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \ldots & \beta_{2r-4} & \beta_{2r-3} \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 \ldots & (2r-4)\,\beta_{2r-4} & (2r-3)\,\beta_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & (m'-r+2)\,\beta_{r-2} & (m'-r+1)\,\beta_{r-1} \end{vmatrix}$$

pour $1 \leqq r \leqq m'$.

3. $\beta_{m'-2\nu} > 0$ et tous les $\beta_{m'-2\nu-1}$ positifs ou tous égaux à zéro pour $0 \leqq \nu \leqq \left[\dfrac{m'-1}{2}\right]$.

4. Déterminons par la division progressive le plus grand commun diviseur

$$d(y) \equiv d_0 y^\tau + d_1 y^{\tau-1} + \ldots + d_\tau$$

de deux polynômes $g(y) = g(\lambda^2)$, $h(y) = h(\lambda^2)$, l'un formé des termes aux puissances λ paires, l'autre formé des termes aux puissances λ impaires de l'équation $F(\lambda) = 0$, $F(\lambda) = g(\lambda^2) + \lambda h(\lambda^2)$. Désignons par $\varrho = \pi - \nu$ la signature de la forme quadratique

$$\sum_{\xi=1}^{\tau} \sum_{\eta=1}^{\tau} s_{\xi+\eta-2}\, y_\xi y_\eta,$$

où les s sont les sommes des puissances des racines du plus grand commun diviseur $d(y) = 0$, π le nombre des permanences des signes et ν le nombre des variations des signes dans la suite des subdéterminants principaux

$$D_\tau,\ D_{\tau-1}, \ldots D_1,\ D_0 = 1$$

du déterminant

$$D_\tau = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots s_{\tau-1} \\ s_1 & s_2 \ldots s_\tau \\ \vdots & \\ s_{\tau-1} & s_\tau \ldots s_{2\tau-2} \end{vmatrix}$$

qui sont calculés au moyen de l'équation

$$D_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{r-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_r \\ \vdots & \\ s_{r-1} & s_r \dots s_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_0^{2r-2}} \begin{vmatrix} d_1 & 2d_2 & 3d_3 \dots & (2r-3)\, d_{2r-3} & (2r-2)\, d_{2r-2} \\ d_0 & d_1 & d_2 \dots & d_{2r-4} & d_{2r-3} \\ 0 & d_1 & 2d_2 \dots & (2r-4)\, d_{2r-4} & (2r-3)\, d_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & (\tau - r + 2)\, d_{r-2} & (\tau - r + 1)\, d_{r-1} \end{vmatrix}$$

pour $1 \leqq r \leqq \tau$; on doit avoir

$$\Delta_\nu > 0 \text{ pour } 1 \leqq \nu \leqq m' - 2\varrho,$$

où

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 & \beta_5 \dots \beta_{2\nu-1} \\ 1 & \beta_2 & \beta_4 \dots \beta_{2\nu-2} \\ 0 & \beta_1 & \beta_3 \dots \beta_{2\nu-3} \\ & & \vdots \\ & & \beta_\nu \end{vmatrix}.$$

Remarque. Si $\varrho > 0$, l'équation caractéristique a sûrement au moins deux racines imaginaires; donc, dans ce cas, la condition 2. est satisfaite d'elle - même et on peut la supprimer dans l'énoncé du théorème.