Vojtěch Jarník

Sur un théorème de M. Mahler

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. 2, 59--60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123983

Sur un théorème de M. Mahler.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Reçu le 25 novembre 1938.)

Théorème. Soit M un corps convexe (fermé et borné) dans l'espace euclidien à n dimensions, symétrique par rapport au point $o = (0, \ldots, 0)$; soit $2^n A$ le volume de M. Soit $m > 0$ un nombre entier; pour chaque i $(1 \leqq i \leqq m)$ soit p_i un nombre premier, $f_i \geqq 0$ un nombre entier et $L_i(x) = L_i(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction qui fait correspondre à chaque système $(x_1, \ldots, x_n)$ des nombres p_i-adiques entiers un nombre p_i-adique entier et qui, de plus, jouit de la propriété suivante: si

$$L_i(x) - L_i(y) \equiv 0 \pmod{p_i^{f_i}},$$

on a

$$L_i(x - y) \equiv 0 \pmod{p_i^{f_i}}.$$[1]

Supposons enfin que

$$A \geqq p_1^{f_1} \ldots p_m^{f_m}.$$

Alors il existe n nombres rationnels entiers $x_1, \ldots, x_n$ tels que le point $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq o$ soit situé dans M et que

$$L_i(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{f_i}} \text{ pour } 1 \leqq i \leqq m.$$

Démonstration. Premier cas:

$$A > p_1^{f_1} \ldots p_m^{f_m}. \tag{1}$$

En suivant une méthode de M. Mordell, choisissons un nombre entier rationnel $t > 0$ tel que $(t, p_1 \ldots p_m) = 1$ et soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous les points $(2y_1/t, \ldots, 2y_n/t)$ (y_i = nombres entiers rationnels) situés dans M. Soit B le nombre des points de l'ensemble $\mathfrak{B}$, donc, d'après (1),

$$B > t^n p_1^{f_1} \ldots p_m^{f_m},$$

[1]) Cette propriété subsiste, en particulier, pour chaque $f_i \geqq 0$, si $| L_i(x - y) |_{p_i} \leqq | L_i(x) - L_i(y) |_{p_i}$.

si t est assez grand. Deux points

$$\left(\frac{2y_1}{t}, \ldots, \frac{2y_n}{t}\right), \quad \left(\frac{2z_1}{t}, \ldots, \frac{2z_n}{t}\right) \tag{2}$$

de $\mathfrak{B}$ sont comptés dans la même „classe", si l'on a pour $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq i \leqq m$

$$z_k \equiv y_k \pmod{t}, \quad L_i\left(\frac{z_1}{t}, \ldots, \frac{z_n}{t}\right) \equiv L_i\left(\frac{y_1}{t}, \ldots, \frac{y_n}{t}\right) \pmod{p_i^{f_i}}$$

(remarquons que y_k/t, z_k/t sont des nombres p_i-adiques *entiers*). Le nombre de toutes les classes étant $t^n p_1^{f_1} \ldots p_m^{f_m} < B$, il existe deux points (2) de la même classe. En posant $t^{-1}(y_k - z_k) = x_k$, on voit que le point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ satisfait aux conditions du théorème.

Deuxième cas:

$$A = p_1^{f_1} \ldots p_m^{f_m}.$$

$r > 0$ étant un nombre rationnel entier quelconque, soit M_r le corps au volume $(1 + r^{-1})\, 2^n A$, provenant du corps M par une dilatation (au centre o). Il existe donc, d'après le premier cas, un point $x^{(r)}$ à coordonnées entières, situé dans M_r et tel que $L_i(x^{(r)}) \equiv$ $\equiv 0 \pmod{p_i^{f_i}}$. Le corps M étant fermé et borné, il existe un point x qui apparaît une infinité de fois dans la suite $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ et qui, par suite, est situé dans M. Ce point x satisfait donc évidemment aux conditions du théorème.

Le théorème démontré ici constitue une généralisation d'un théorème de M. Mahler;[2]) si M est un parallélépipède et si les $L_i(x)$ sont des formes linéaires en $x_1, \ldots, x_n$ aux coëfficients p_i-adiques entiers, on obtient précisément le théorème de Mahler.

*

O jedné větě Mahlerově.

(Obsah předešlého článku.)

Obsahem článku je zobecnění jedné Mahlerovy věty o systému lineárních forem s koeficienty částečně reálnými, částečně p-adickými.

---

[2]) K. Mahler, Über Diophantische Approximationen im Gebiete der p-adischen Zahlen, Jahresber. d. deutschen Mathematikervereinigung **44** (1934), p. 250—255.