Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vilém Pexider

Znázornění čísel délkami a naopak. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 3, 259--274

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123981

slušném; číselná hodnota její vychází ze vzorce (10), položíme-li v něm za jeden z obou činitelů ω jednotku.

Podobným způsobem sestrojeny jsou křivky *IV*, *IV'*, jimiž znázorněny jsou poměry otáčení roviny kyvů kol osy zemské. Konečně namanuje se otázka, ruší-li se tvar roviny kyvů pohybem jejím vzhledem k ose zemské. O tom rozhodnouti ponecháváme laskavému čtenáři. Toliko budiž připomenuto, že by se doporučovalo vzhledem k účelu, za kterým pokus Foucaultův se koná, zaříditi jej tak, abychom se rušivých účinků, byly-li by jaké, pokud možná uvarovali. Dle rozboru učiněného bylo by pokus počíti tak, že bychom kyvadlo rozkývali směrem, od směru východního jen poněkud k severu odchýleným. V tomto případě by se po čas pokusu rovina kyvů téměř ani od osy zemské neodchylovala, ani kol ní neotáčela. Kdyby se pak ještě odstranil rušivý účinek otáčející se atmosféry, tak že by kyvadlo umístěno bylo v prostoře pokud možná vzduchoprázdném, byly by tak vyloučeny veškeré rušivé účinky a odchylky Foucaultovy přibývalo by přesně dle zákona vytčeného.

Znázornění čísel délkami a naopak.

Napsal

Dr. **Jan Vilém Pexider** v Praze.

(Pokračování.)

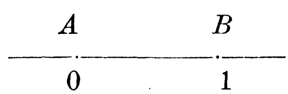
Stanovisko geometrie Veroneseovy.

Důkaz aequivalence založen byl v prvém odstavci (str. 17.) na axiomu Archimedově; nebýti věty té, uvedený důkaz nebýval by vůbec možný. Lze se však důvodně ptáti, je-li tento axiom spojitosti objektivně prokázán anebo logicky nutný. Jedná-li se v praksi o nějakou délku, vždy jest to délka konečná. Proto věta Archimedova v praksi pokaždé jest splněna. Výsledky praktického pozorování, empirická data jsou však přesná vždy jen *v určitých mezích a za jistých podmínek*; jen, necháme-li tyto stranou, platnost dat nabývá rázu všeobecnosti, a věta, jež je vyslovuje, dosahuje absolutní přesnosti, stává se zásadou. Axiom spojitosti jest hypothésou o konstituci prostoru stejně jako axiom rovnoběžkový; neuznáme-li tu hypothésu a budujeme-li geometrii bez ní, dojdeme geometrie nové, v níž vedle konečných úseček existují úsečky nekonečně malé resp. velké, tak zv. „aktuálně nekonečně malé resp. velké". Jest to *geometrie Veroneseova.*

Zásada Archimedova tvrdí, že každou danou úsečku (AA_1) možno jest tolikráte nanésti za sebou od jistého počátku na přímku (a), že se překročí každý, sebe vzdálenější bod, vytčený na téže přímce. V geometrii Euklidově existují tedy jedině délky s touto vlastností; jsou-li jaké ještě jiné, jsou z této geometrie dojista vyloučeny.

Supponujme nyní opak toho: *Budiž dána úsečka AA_1 té vlastnosti, že se nepřekročí nikdy bod B, nechť úsečka AA_1 nanese se na přímku (a) za sebou kolikrátekoliv.*

Úsečka taková nebude ovšem existovati v geometrii Euklidově, nýbrž v geometrii, v níž zásada VI. neplatí.



Co jest to za délku? Označme bod A na př. číslem 0, bod B číslem 1 a délku AA_1, nanesenou od A k B, písmenou t. Zásadu vyslovenou lze pak mathematicky vyjádřiti vztahem

$$nt < 1,$$

nechť n značí jakékoliv celistvé číslo kladné. Odtud jde

$$t < \frac{1}{n};$$

tedy t jest číslo, menší nežli jakýkoliv ryzí zlomek daný, než kterékoliv racionálné číslo; neboť vždy jest

$$t + t + t + t + \ldots < 1.$$

Tudíž t nepatří do množiny reálných čísel, ať již soustavy Dedekindovy nebo Cantorovy nebo Weierstrassovy (což jest ostatně vždy jedno a totéž, poněvadž množina kterýmkoli z těchto tří jmenovaných způsobů definovaná jest identickou s množinou, definovanou známou soustavou axiomů arithmetických). Délky resp. čísla t zovou se aktuálně nekonečně malá*). V geometrii Veroneseově *existují* tudíž vedle konečných délek i délky „aktuálně nekonečně malé“.

Tím však proces, definující nové délky, není daleko ještě ukončen. Lze totiž supponovati opět takové délky t', že nanášením jich za sebou na přímku a od počátku 0 nikdy se nepřekročí konečný bod A_1 délky t. Pak tedy jest

$$n't' < t < \frac{1}{n},$$

nechť n' jest jakékoli celistvé reálné číslo kladné čili

$$t' < t\frac{1}{n'} < \frac{1}{nn'}$$

aneb, klade-li se $t < \frac{1}{n'}$ **), jest dojista

$$t' < \frac{1}{n'^2}, \quad t^2 < \frac{1}{n'^2},$$

t. j. t' jest délka aktuálně nekonečně malá vůči t čili, nazve-li se t nekonečně malou prvého stupně, jest t' nekonečně malou nejméně druhého stupně. Tak lze pokračovati dále k stále vyšším stupňům. Na přímce geometrie Veroneseovy mohou tedy mezi dvěma body (v konečnu) vyskytnouti se úsečky konečné i aktuálně nekonečně malé různých stupňů, a v jakémkoliv počtu, takže délka mezi oběma měřena bude obecně číslem

$$v = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots,$$

kdež t značí parametr (aktuálně nekonečně malý) a a_k reálná čísla, nuly nevyjímajíc. Je-li $a_0 > 0$, jest též

$$(1) \qquad v = a_0 + t(a_1 + a_2 t + \ldots) > 0,$$

neboť platí vztah $t < \frac{1}{n}$, a nerovnosti

---

*) Logická přípustnost čísel těchto jest v dalším prokázána.

**) Věc přípustná, ježto pro t i vztah $n't < 1$ musí býti v platnosti.

$$a_0 > \frac{1}{n}(|a_1| + \frac{1}{n}|a_2| + \frac{1}{n^2}|a_3| + \ldots)$$

vždy lze zadosti učiniti volbou dosti velikého celistvého kladného čísla n. Je-li tedy $a_0 > 0$, jest v číslo positivné a, je-li $a_0 < 0$, jest patrně v číslo negativné. Analogicky lze ukázati, že, je-li a_k prvé z nemizících čísel v řadě (1), číslo v jest positivné s positivným a_k a negativné s negativným a_k.

Číslo $mt - a$ $(a > 0)$ náleží též mezi čísla v; jest to číslo negativné, a proto vždy jest

$$mt < a,$$

nechť m jest jakkoli veliké celistvé číslo kladné. Z toho jde, že ze soustavy axiomů arithmetických*), definujících množinu reálných čísel, pro čísla v není splněna zásada Archimedova. Čísla v tvoří tudíž soustavu *nearchimedických čísel* čili, jak se též číslům nehovícím všem zásadám soustavy reálných čísel říká, čísel „obecně komplexních“. Ostatní zásady arithmetické, vyjma zásady úplnosti, jsou i při těchto číslech splněny, operuje-li se s nimi tak arithmeticky, jak s příslušnými délkami nutno geometricky operovati ve shodě s ostatními axiomy geometrickými. *Jelikož zásady tyto, jak známo, si neodporují vzájemně, a systém čísel a_k* — reálných to čísel — *existuje, má též systém čísel v mathematickou existenci.*

K očíslování bodů přímky v geometrii Veroneseově jest soustava komplexních čísel nevyhnutelna; že tu skutečně soustava reálných čísel nestačí, lze snadno ukázati.

Označme počáteční bod délky t, ležící na přímce, číslem 0. Nanášíme-li pak na tutéž přímku délku t libovolněkráte za sebou, obdržíme

$$t + t + t + \ldots + t = mt < 1,$$

dle definice délky t, nechť m jest jakkoli velké celistvé číslo

---

***) Soustava axiomů arithmetických skládá se ze čtyr skupin:**
I. Skupina zásad spojování.
II. Skupina zásad počítání.
III. Skupina zásad přiřaďování.
IV. Zásady spojitosti: 1. Archimedova, 2. úplnosti.

kladné. Mezi 0 a 1 leží na téže přímce body, očíslované zlomky $\frac{\alpha}{2^n}$, kdež α a n jsou celistvá čísla kladná a $1 \leqq \alpha < 2^n$, (a sice pantachicky, jedná-li se o přímku euklidickou). Aby bod $\frac{\alpha}{2^n}$ ležel na úsečce t, muselo by

$$t - \frac{\alpha}{2^n} > 0$$

čili

$$2^n t - \alpha > 0, \text{ t. j. } mt > \alpha,$$

kdež α, m jsou celistvá čísla kladná a $\alpha < m$. Tato relace nemůže býti pro žádné konečné m splněna, jelikož vždy jest vůbec $mt < 1$. Na úsečce t není tedy bodů, očíslovaných duálnými zlomky konečnými čili *na přímce Veroneseově existují mezery mezi body* $\frac{\alpha}{2^n}$. Vytkne-li se nyní bod, ležící uvnitř takovéto mezery, tu nejen tento vytčený, ale i všechny ostatní body této mezery dělí všecky konečné duálné zlomky na dvě kategorie takové, že každý element prvé z nich jest menší nežli každý element druhé z nich, a naopak větší. Takovýmto řezem mezi všemi $\frac{\alpha}{2^n}$ definováno jest arithmeticky *jediné číslo reálné* (r), avšak *bodů v té mezeře jest nekonečně mnoho.* Lze tudíž nejvýše jeden z nich očíslovati číslem r, k očíslování ostatních bude zapotřebí čísel zcela jiných, vnikajících i v ony mezery, čísel Veroneseových*).

Nelze však tvrditi, že by již po zavedení parametrů $t, t^2, t^3, \ldots$ čísla v skutečně stačila očíslovati všechny body přímky Veroneseovy. Jakmile totiž zásada V1 neplatí, přípustna jest i délka (t_1), definovaná tak, že se nanášením segmentu t_1 od jistého počátku (0) nikdy nepřekročí konečný bod úsečky t^n, nechť n jest jakkoli veliké celistvé číslo kladné. Vyslovený fakt mathematicky vyjádřen jest vztahem

*) Veronese prvý zavedl čísla taková do geometrie [1]; jeho výrody jsou však namnoze zcela pochybeny a zavinily neobyčejně prudký odpor se strany G. Cantora. Žák Veroneseův Levi-Cività provedl však v [1] a [2] úplnou opravu dotyčných chyb, takže se stanoviska abstraktní mathematiky nelze proti číslům těm činiti žádných námitek.

$$t_1 < t^n,$$

nechť n jest jakkoli veliké reálné číslo. Jako se stalo při číslech $t^2, t^3, t^4, \ldots$, tak lze dovoditi snadno mathematickou existenci i čísel $t_1^2, t_1^3, t_1^4, \ldots$ a pak i čísel $tt_1, t^2t_1, t^3t_1, \ldots; tt_1^2, t^2t_1^2, t^3t_1^2, \ldots, t^mt_1{}^n, \ldots$ atd. Bod na přímce Veroneseově vytčen jest tedy obecněji číslem

$$\begin{aligned}(2)\qquad v = a_0 + a_1t &+ a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + \ldots\\ &+ b_1t_1 + b_2tt_1 + b_3t^2t_1 + b_4t^3t_1 + \ldots\\ &\quad + c_2t_1^2 + c_3tt_1^2 + c_4t^2t_1^2 + \ldots\\ &\qquad + d_3t_1^3 + d_4tt_1^3 + \ldots\\ &\qquad\quad + \ldots .\end{aligned}$$

Úsečky $t_1, t_1^2, t_1^3, \ldots$ jsou tedy aktuálně nekonečně malé, avšak zcela jiného řádu nežli všecka t^n. Tak pokračovati lze dále k $t_2, t_2^2, t_2^3, \ldots$, k $t_3, \ldots$ atd., aniž by vůbec bylo možno udati všecka $t, t_1, t_2, \ldots$

Neboť, kdyby se tvrdilo, že v řadě

$$(3)\qquad t, t_1, t_2, t_3, \ldots$$

obsažena jsou všechna základní aktuálně nekonečně malá čísla, lze definovati úsečku (ϑ) toho druhu, že se nanášením segmentu ϑ od jistého počátku (O) za sebou nepřekročí konečný bod žádné úsečky t_n, ale také ani konečný bod kterékoli potence kterékoliv úsečky (t_n^m). Mathematicky jest fakt tento vyjádřen opět vztahem

$$\vartheta < t_n^m,$$

nechť jsou m a n jakkoli veliká reálná čísla kladná. Usečka ϑ není tedy dojista obsažena v řadě (3.), q. e. d. Z toho však ihned plyne, že nejvšeobecnějším tvarem čísla v není nekonečná řada, ani nekonečná řada z nekonečných řad atd., jichž členy závisí na indexech, nabývajících hodnoty $1, 2, 3, \ldots$ čili — že množství sčítanců nejvšeobecnějšího výrazu pro číslo v jest vyšší nežli prvé mohutnosti.

Proto není systém čísel aktuálně nekonečně malých *uzavřený* („abgeschlossen"). Aby se tedy lineárné kontinuum Veroneseovo vyčerpalo, nutno jest utvořiti systém nearchimedických čísel v, jenž není *uzavřený* — na rozdíl ovšem od čísel reálných.

Přes to lze s čísly těmito důsledně počítati, jakmile se jen stanoví, které početní operace lze s nimi prováděti. V geometrii Descartově každým řezem mezi body očíslovanými racionálnými čísly stanoven byl určitý bod očíslovaný irracionálným číslem (r), kdežto na přímce Veroneseově stanoven jest řezem tím teprve segment (aktuálně nekonečně malý), takže v geometrii té nutné jest udati ještě aktuálně nekonečně malou část, již dlužno připojiti k irracionálnému číslu r, aby tím číslem ($r +$ akt. ∞-ně malá veličina) vytčen byl jediný a určitý bod. Totéž platí i pro racionálná r.

V praksi ovšem, při odměřování skutečném, veličiny aktuálně nekonečně malé samy sebou odpadají; neboť již při pokusu, vytknouti všechna racionálná čísla, přišli bychom k úsečkám neomezeně malým, kdežto vyměřovati lze pouze úsečky konečné.

Hlavní otázkou však jest, jakým způsobem lze vybudovati analytickou geometrii, je-li podkladem ne Euklidova, nýbrž Veroneseova geometrie, a zdali známé vzorce Descartovy, vyjadřující vztahy mezi geometrickými útvary, jako jsou rovnice přímky, roviny atd. jsou i tu v platnosti či nikoliv.

K tomu cíli nejvhodnější jest vyjíti od tak zv. Möbiových sítí. Vyznačí-li se v rovině čtyři body (základní), z nichž kterékoliv tři neleží na přímce, a vedou-li se kterýmikoli dvěma z nich přímky, protnou se tyto v nových bodech (třech), jež lze opětně spojiti přímkami s ostatními body. Tím povstanou nové průsečné body. Stálým opakováním těchto konstrukcí vznikne v rovině systém přímek a průsečíků čili *Möbiova síť*, jejíž elementy zovou se racionálné vzhledem k základním bodům. Za tyto základní body voliti lze na př. body očíslované vzhledem k libovolně voleným osám X, Y číselně: ($x = 0$, $y = 0$), $(1, 1)$, $(\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Uvedenými konstrukcemi vznikající průsečíky jsou pak vesměs body očíslované dvojicemi racionálných čísel (duálných zlomků). Každému bodu sítě přiřaditi lze určitou dvojici duálných zlomků a naopak každé takové dvojici určitý bod sítě. *Krom toho odvoditi lze všechny věty, vyjadřující vztahy mezi těmito body, z prvé a druhé skupiny axiomů geometrických* (ax. spojování a přiřaďování).

Značí-li u, v duálné zlomky, leží na síťové přímce ze síťových bodů ty, jež hoví rovnici

$$(4) \qquad ux + vy + 1 = 0.$$

Jest však rovnice (4) v platnosti i pro body, jež nejsou síťovými? Tento přechod ke *všem* bodům roviny děje se právě pomocí zásad spojitosti. Tu definujeme:

1. irracionálné číslo jakožto řez mezi racionálnými čísly (resp. duálnými zlomky) a v souhlase s tím vyslovujeme zásadu: bod (x, y) existuje, i když není síťovým, t. j. i když x, y nejsou racionálná čísla (resp. duál. zlomky). Je-li pak $ux + vy + 1 = 0$ a u, v irracionálná čísla, tož vztah tento následkem toho vyjadřuje opětně přímku. Jsme tedy v geometrii Descartově.

2. Dle pojímání Veroneseova definuje (geometricky) řez mezi racionálnými čísly ne bod, nýbrž úsečku (akt. ∞-ně malou). Avšak věty, mající platnost pro body síťové, zůstanou a musí zůstati i tu nezměněny, jelikož systém čísel reálných obsažen jest v systému čísel Veroneseových jako jeho část. Co se pak týče ostatních, dlužno uvážiti, zdali i pro Veroneseova čísla u, v platiti může vztah

$$ux + vy + 1 = 0,$$

má-li jím vyjádřen býti fakt, že body (x, y) leží na přímce (u, v) a mají-li zásady spojování a přiřaďování zůstati neporušeny. Tu lze ukázati, že — stanoví-li se vhodným způsobem početní pravidla pro čísla Veroneseova — nejen zásadám spojování a přiřaďování vyhověti lze (čímž zároveň platnost rovnice (4) jest zajištěna), nýbrž že pravidla ona přesně se shodují s obyčejnými pravidly reálných čísel, jakmile aktuálně nekonečně malá část v číslech Veroneseových vymizí, a že tu dokonce zbude ještě jedna libovolnost, t. j. že oněmi pravidly počítání s čísly Veroneseovými vůbec ještě ani není jednoznačně stanoveno, takže libovolnost onu nutno pak odstraniti dalším, novým axiomem.

K vůli jednoduchosti naznačen budiž důkaz pro čísla, jichž aktuálně nekonečně malá část složena jest jen ze dvou druhů základních nekonečně malých veličin σ a τ, a sice:

$$(5) \qquad \begin{aligned} x = a_0 &+ a_1\sigma + a_2\sigma^2 + a_3\sigma^3 + \dots \\ &+ b_0\tau + b_1\sigma\tau + b_2\sigma^2\tau + \dots \\ &+ c_0\tau^2 + c_1\sigma\tau^2 + c_2\sigma^2\tau^2 + \dots, \\ &+ \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} u = \alpha_0 &+ \alpha_1\sigma + \alpha_2\sigma^2 + \alpha_3\sigma^3 + \dots \\ &+ \beta_0\tau + \beta_1\sigma\tau + \beta_2\sigma^2\tau + \dots \\ &+ \gamma_0\tau^2 + \gamma_1\sigma\tau^2 + \gamma_2\sigma^2\tau^2 + \dots \\ &+ \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

a obdobně y i v. Koefficienty $a, b, c, \dots$ a $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ značí reálná čísla a τ jest nekonečně malé vzhledem ke všem mocninám veličiny σ. Proto v řadách (5) a (6) po reálných číslech následují nejprve členy s mocninami veličiny σ, pak členy s τ v prvé potenci, na to členy s τ^2 atd.

Definice sčítání a násobení Veroneseových čísel má býti tedy taková, aby obsahovala v sobě addici i multiplikaci „obyčejných" čísel (= reálných), a aby bylo vyhověno axiomům spojování a přiřaďování (platným pro obyčejné body), vezme-li se k tomu za základ rovnice

$$ux + vy + 1 = 0$$

jakožto podmínka pro to, by (Veron.) bod (x, y) ležel na (Veron.) přímce (u, v). Tvrzením pak jest, že se to nejen zdaří, nýbrž že zbude ještě jedna libovolnost k disposici.

Sčítání dvou Veroneseových čísel

$$\begin{pmatrix} a_0 + a_1\sigma + a_2\sigma^2 + \dots \\ + b_0\tau + \dots \\ + \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1\sigma + \alpha_2\sigma^2 + \dots \\ + \beta_0\tau + \dots \\ + \dots \end{pmatrix}$$

budiž tak definováno, aby součet obou vyjádřen byl číslem, jehož sčítanci jsou seřazeni dle stoupajících mocnin veličin σ a τ [jako v (5) nebo (6)], t. j. tak, aby se jednoduše sčítaly koefficienty u stejných mocnin $\sigma^m\tau^n$:

$$\begin{aligned} x + u = (a_0 + \alpha_0) &+ (a_1 + \alpha_1)\sigma + (a_2 + \alpha_2)\sigma^2 + \dots \\ &+ (b_0 + \beta_0)\tau + (b_1 + \beta_1)\sigma\tau + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Nyní jest evidentní, že x jest větší nežli u, je-li v rozdílu $x - u$ prvý nemizící koefficient kladný.

Budiž i násobení obvyklým způsobem definováno, ale s tou výhradou, že o součinech $\sigma^m\tau^n$ předem nic určitého nemá býti stanoveno. Pouhým formálným násobením obdrží se tedy výraz

$$xu = a_0\alpha_0 + (a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0)\,\sigma + (a_0\beta_0 + b_0\alpha_0)\,\tau$$
$$+ a_1\beta_0\sigma\tau + b_0\alpha_1\tau\sigma + a_1\alpha_1\sigma^2 + \ldots$$

Zbývá však stanoviti přesně poměr mezi $\sigma\tau$ a $\tau\sigma$. Budiž

$$(7) \qquad \sigma\tau = \varkappa\,\tau\sigma.$$

Aby axiomy přiřaďování byly splněny, musí $\varkappa$ býti reálné číslo kladné. Za této podmínky uspořádati lze i předchozí součin xu dle stoupajících mocnin veličin σ a τ:

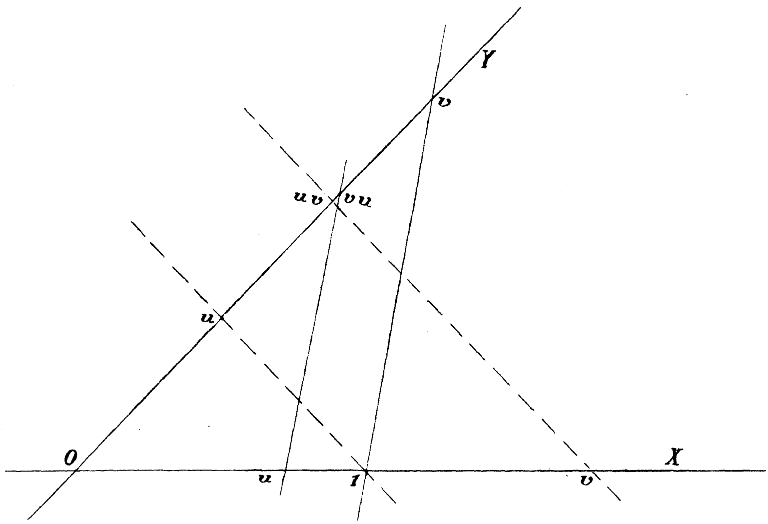
$$a_0\alpha_0 + (a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0)\,\sigma + a_1\alpha_1\sigma^2 + \ldots$$
$$+ (a_0\beta_0 + b_0\alpha_0)\,\tau + (a_1\beta_0 + \varkappa b_0\alpha_1)\,\sigma\tau + \ldots$$
$$+ \ldots .$$

Význam podmínky (7) jest ten, že násobení dvou Veroneseových čísel není obecně kommutativné, nýbrž pouze pro $\varkappa = 1$.

Po těchto ustanoveních jsou veškeré svrchu uvedené podmínky splněny: vyhověno axiomům grupy I. i II., jak se snadno lze přesvědčiti a, vymizí-li aktuálně nekonečně malé části v číslech $x, u, \ldots$, tu definice sčítání a násobení, právě pro Veroneseova čísla vytčené, stanou se identickými s příslušnými definicemi, platnými pro reálná čísla (v něž současně čísla Veroneseova přejdou) — a sice *vždy, nechť $\varkappa$ jest jakékoli reálné číslo kladné.* Tuto libovolnost ve volbě čísla $\varkappa$ odstraniti lze jedině novým *axiomem*, speciálným vytčením hodnoty $\varkappa$, má-li bod xu býti *určitým* bodem přímky Veroneseovy. Neboť zkušenost nedává v tomto případě žádné direktivy, jelikož praktické měření, nemohoucí za úsečky racionálné, tím méně může poskytnouti poučení o úsečkách aktuálně nekonečně malých. Věc musí pojímána býti s formálního stanoviska a ryze logicky chápána, jelikož úsečky $\sigma, \tau, \ldots$ jdou za mez schopnosti našeho představování prostorového.

Jak vytčená libovolnost má se mysleti, lze přibližně následujícím způsobem geometricky znázorniti.

Označme literami u, v dvě Veroneseova čísla, jichž součiny uv a vu mají býti v rovině o osách X, Y geometricky znázorněny konstrukcí. Vytkněme na obou osách X, Y body u a v a na ose X bod 1.



Spojíme-li nyní bod 1 s u, ležícím na ose Y, přímkou a vedeme-li k této rovnoběžku bodem v, ležícím na ose X, obdržíme v průsečíku této rovnoběžky s osou Y bod uv. Neboť rovnice přímky $\overline{1u}$ jest

$$u(x-1)+y=0,$$

rovnoběžky pak

$$u(x-v)+y=0,$$

jejíž průsečík s osou X jest právě bod $y=uv$. Těchto jednoduchých vzorců analytické geometrie lze tu dojista použíti, anať právě koincidence bodu s přímkou byla shora definitoricky stanovena bilinneárnou rovnicí

$$ux+vy+1=0.$$

Obdobně proveďme konstrukci čísla vu spojením bodu 1 s bodem v na ose Y přímkou a vedením rovnoběžky bodem u na ose X. Průsečíku rovnoběžky této s osou Y přísluší číslo vu. Je-li $\varkappa \neq 1$, nesplyne bod uv s bodem vu. Jsou-li tedy u a v body Veroneseovy a klade-li se $\varkappa \neq 1$, jsou uv a vu dva různé body na přímce; vzájemná vzdálenost jich jest ovšem aktuálně nekonečně malá. Vymizí-li však tyto ∞-ně malé části, tu jsou patrně u, v body obyčejné a uv koinciduje s vu. Avšak uv zapadne samozřejmě s vu i tehdy, je-li jeden z bodů u, v obyčejný.

Na přímce geometrie Veroneseovy existují tedy vedle bodů, vyskytujících se i na přímce Euklidově (bodů „obyčejných", racionálných to a irracionálných), ještě body v, číselně karakterisované aktuálně nekonečně malými veličinami, body to, jež separují vesměs body obyčejné. Neboť bylo ukázáno, že na úsečkách σ, τ (resp. $t, t_1, t_2, \ldots; \ldots t^m, \ldots t^m_n, \ldots$) neleží žádné body racionálné a nejvýše jeden bod irracionálný. *Kontinuum Veroneseovo jest tedy* — sit venia verbo — *mnohem hustší nežli kontinuum Euklidovo.*

Okolnost, že obecně bod uv nesplyne s bodem vu, osvětliti lze ještě takto:

Veďme body u (na ose X) a u (na ose Y), resp. body v (na ose X) a v (na ose Y) přímky, patrně rovnoběžné. Obrazec lze pak pojímati jako speciálný případ *Pascalova šestistranu*, kdy totiž kuželosečka jdoucí šesti body $1, u, v, \ldots$, degeneruje na dvě přímky, z nichž na jedné leží body $1, u, v$ a ostatní tři na druhé, příslušící rovině XY v nekonečnu. Průsečíky „protějších" stran jsou u a v na ose Y, kdežto přímky $\overline{u, vu}$ a $\overline{v, uv}$ se na ose Y obecně neprotínají, vyjma případu $k = 1$. Proto věta Pascalova není obecně v platnosti pro čísla Veroneseova; je-li však jeden z bodů u, v obyčejný, pak patrně Pascalův theorém zůstává i pro $k \neq 1$ v platnosti, ježto body uv a vu splynou v jediný. Jest tedy v tomto směru *bezpodmínečná platnost Pascalovy věty v geometrii aequivalentní s kommutativností násobení v arithmetice.*

Na tento význam Pascalovy věty poukázal již H. Wiener [1] poznamenav, že nutno jest zavésti ji do *projektivné* geometrie jako *axiom,* pakli se nechce předpokládati obyčejný axiom spojitosti (jenž jest svým obsahem — vyjadřuje vztahy mezi *délkami* — více metrického nežli projektivného rázu).

Problém znázornění čísel délkami a měření délek čísly řešiti lze tedy takto:

V geometrii nearchimedické existují v konečnu délky konečné a aktuálně nekonečně malé. Očíslovati lze je čísly Veroneseovými, mezi nimiž obsažena a nejjednoduššími výrazy formálně vyjádřena jsou čísla reálná. Těmto odpovídají „obyčejné“ body na přímce nearchimedické. Jedná-li se nyní o důkaz, že každému číslu reálnému odpovídá určitý bod na přímce (vzhledem k jistému počátku), nutno předem vytknouti určitým a obecným způsobem číslo irracionálné. To děje se vhodným způsobem pomocí nekonečných konvergujících posloupností [(α) a (β)] racionálných čísel α_k, β_k, z nichž posloupnost jedna (α) jest stále stoupající, druhá (β) stále klesající, a při tom

$$\lim_{k=\infty} (\beta_k - \alpha_k) = 0 .$$

Ježto pak každému racionálnému číslu α_k resp. β_k odpovídá určitý bod přímky (vzhledem k jistému počátku), otázka korrespondence redukuje se na následující. Co jest to

$$\lim_{k=\infty} |\beta_k - \alpha_k| ,$$

značí-li $|\beta_k - \alpha_k|$ úsečku a α_k, β_k racionálné body na přímce?

Trojí odpověď jest možná:

1. Jest to úsečka aktuálně nekonečně malá.
2. Jest to bod.
3. Limita tato neexistuje.

V geometrii Veroneseově přípustné jsou these všecky tři. V geometrii Euklidově nepřípustnou jest these 1. vzhledem k axiomu V1; zbývají tudíž ještě dvě možnosti: 2. a 3. Předpoklad 2. jest, jak známo, nejen přípustný, ale i obecně přijímaný pro geometrii Euklidovu; přehlíží se však často these 3., rovněž přípustná*). Přípustnost tato jest evidentní, srovnáme-li

*) Opak prohlašující „důkazy“ vedeny jsou pravidelně tak, že se tvrdí: „Poněvadž rozdíl $(\beta_k - \alpha_k)$ stává se pro dosti velké k číselně libovolně malým, *nemohou* obě skupiny bodové (α), (β) *odděleny býti* nějakou, třeba i sebe menší *délkou*, nýbrž *jsou odděleny* jediným *bodem* C. Délka OC znázorňuje pak irracionálné číslo i.“ Zde se očividně zaměňuje v druhé části věty úsečka $|\beta_k - \alpha_k|$ za číslo $(\beta_k - \alpha_k)$. Skupiny čísel (α) a (β) dojista jsou odděleny jediným číslem i; neboť to právě jest definice irracionálného čísla i. *Bod* není však geometricky definován jako *dělítko mezi* racionálnými *body* na přímce, nýbrž uveden jest do geometrie známými jednoduchými axiomy; proto nelze záměnu onu provésti. Krom toho, není-li něco délkou, neplyne z toho, že jest to bod, poněvadž není-li něco d, nenásleduje z toho,

předpoklad 3. s axiomy spojování, přiřaďování a shodnosti (po případě i s axiomem Euklidovým). Jest to snad jedině zásada II2, k níž záhodno blíže přihlédnouti, a jež vyžaduje, aby mezi dvěma *různými* body A a B na přímce ležel aspoň jeden bod C, čehož prvým důsledkem jest, že mezi A a B jest bodů nekonečně mnoho. Vzdálenost mezi A a B předpokládá axiom ten *konečnou* — *různé* (!) body — nevyjadřuje se však nikterak o případě, kdy distance tato přestává býti konečnou, konvergujíc k nulle — t. j. axiom ten *nepředpokládá* existenci limitního bodu ani ji *neobsahuje v sobě* jako důsledek. Proto these 3. není v rozporu se systémem axiomů geometrie Euklidovy čili v geometrii Euklidově (a ovšem i v každé archimedické, jako Lobačevského, . . ., ježto platnost či neplatnost axiomu IV 1 na věci nic nemění) nemusí pro každé irracionálné číslo existovati bod, jenž by jemu (vzhledem k jistému počátku) na přímce odpovídal.

Není pochybnosti, že pro praksi čísla Veroneseova nemají ýznamu. Jako nesáhne praktik k planimetrii Lobačevského, tak by bylo zbytečno a bezúčelno, aby počítal s čísly nearchimedickými. Geometrie approximační vystačí již s čísly racionálnými; v tom ohledu jest tedy geometrie Euklidova — nepřihlížející k úsečkám nekonečně malým — prvou approximací obecnější geometrie Veroneseovy a následkem toho geometrie approximační druhou approximací všeobecné, abstraktní geometrie.

Jaký prospěch mají tedy tyto mathematické vývody pro názor na prostor neb pro přírodovědu? Bádání o neeuklidických geometriích nemá za účel rozhodovati o platnosti či neplatnosti toho kterého axiomu, nýbrž o tom, zdali jest zásada ta mathematickým důsledkem ostatních zásad či nikoliv. A tu právě tím, že se podařilo vybudovati geometrie, v nichž jeden neb i více axiomů Euklidovy geometrie neplatí, a jež přes to v sobě nechovají logických rozporů, proveden byl důkaz, že zásady ty jsou de facto na ostatních zásadách nezávislé a tudíž na základě jich také nedokazatelné.

Tím došlo se k všeobecné geometrii nearchimedické i ne-

že jest to *b*. Jakkoli tvrzení taková jsou proti nejprimitivnějším zásadám logiky, jest s podivením, že teprve před třiceti léty bylo na zvrácenost tu poukázáno G. Cantorem.

euklidické, jež Euklidovu i neeuklidické geometrie obsahuje v sobě jako speciálné případy, a z níž lze význam i dosah jednotlivých axiomů přehlédnouti a přesně vytknouti; tomu dříve tak nebylo, jak dosvědčují dlouholeté pokusy o důkaz rovnoběžkového axiomu, důkaz aequivalence čísel a bodů atd.

Stůjtež zde jako další odpověď na shora učiněnou otázku citáty z děl zakladatelů neeuklidických geometrií:

„Ať jest tomu jakkoli, nová geometrie, pro niž se zde položil od nynějška základ, může, byť by i v přírodě neexistovala, nicméně existovati v našich představách, a byť by i při skutečných měřeních zůstávala neupotřebena, tož rozevírá přece nové širé pole vzájemným applikacím geometrie a analyse mathematické*)“.

„Solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können dazu dienen, dass die Umarbeitung der überkommenen räumlich-mechanischen Vorstellungen nicht durch die Beschränktheit der Begriffe und *der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird***)“.

„Solche Untersuchungen sind rein mathematischen Inhaltes. Es bleiben ihnen also durchaus die Fragen fern, welche Vorteile aus den bezüglichen mathematischen Resultaten für die Raumanschauung oder überhaupt die Naturerkenntniss gewonnen werden können. Aber es ist vielleicht nicht überflüssig, nach dieser Seite hin den Gegenstand hier zu präcisiren, da nur zu vielfach diese mathematischen Betrachtungen mit eventuellen Anwendungen derselben untermischt und verwechselt werden...

1. In erster Linie erweitern die Untersuchungen den Kreis unserer mathematischen Begriffe. So hat die Parallelentheorie den neuen Begriff „einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmasse“ geliefert.

2. Wir gewinnen durch selbe Geometrie Material, um die geläufigen geometrischen Vorstellungen nach ihrer Notwendigkeit beurteilen und eine Abänderung derselben, falls solche wünschenswert scheinen sollte, zweckmässig treffen zu können“ ***).

*) Lobačevskij [6].
**) Riemann [1].
***) Klein [2].

To jest tedy hlavně výsledek a úspěch metageometrie, že byly objeveny mathematické vztahy, na něž by se bez těchto impulsů sotva kdy bylo přišlo. (Dokončení.)

Zjevy pozorované při výboji jiskry plamenem.

Referuje

M. Otta,

professor c. k. reálky v Kladně.

Lenard popisuje v „Annalen der Physik" 1902 zjev, který, ač velmi jednoduchý, dosud, zdá se, nebyl pozorován. Vsune-li se totiž plamen Bunsenova hořáku zbarvený kuchyňskou solí mezi dvě destičky kovové, jež jsou nabity protivnou elektřinou, nevystupuje již zbarvená pára do výše, nýbrž uchyluje se směrem k destičce se záporným nábojem. Sklon plamene může překročiti i úhel 45° a jest zejména nápadný, střídá-li se kladný a záporný náboj na destičkách. Při určité vzdálenosti záporně nabité destičky vystupuje žlutá pára ze strany plamene. Ke vzbuzení pole elektrického užívá se při pokusech těchto influenční elektriky nebo batterie akkumulatorů o 2000 Voltech, aby pak plamen byl klidný, posouvají se obě destičky tak dlouho, až má jiskra potřebný doskok. Plamen sklání se jen tehdy, vloží-li se zrnko soli do pláště plamene, nikoli však, nalézá-li se pouze na okraji plamene. Týž zjev poskytují i páry jiných látek jako: soli thalia a india, kyseliny borové a j., ale i svítící části plamene plynového. Jen quantita zjevu se měnila u různých těch látek, t. j. sklon byl co do velikosti různý.

Tento zjev vysvětluje Lenard tím, že vytvoří se positivní „nosiči" elektřiny — zvané ionty — které proudí na zápornou elektrodu s větší nebo menší rychlostí. Tímto prouděním zvýší se vodivost plamene, ale rozdílu napětí na obou elektrodách ubývá tím více, čím větší jest ostrost pásma té páry. Proudění látek děje se vždy v tu stranu, kde nalézá se náboj negativní, nikdy však v tu stranu, kde jest náboj positivní. Ani zvláštními reagenciemi nepodařilo se negativní ion dokázati. Ustanoví-li se rychlost, s jakou vystupují plyny plamene, lze pomocí ní určiti i rychlost proudění positivních iontů; pro páry lithiové