Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sýkora

O rozkladu kvadratického trojčlenu na činitele

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 3, 312--315

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123975`

O rozkladu kvadratického trojčlenu na činitele.

Napsal
Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

V učebnicích algebry vykládává se rozklad trojčlenu

$$x^2 + ax + b$$

na činitele tak, že hledáme dvě čísla m, n, jejichž součet rovná se a, a součin b, načež najdeme

$$x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n).$$

Návod tento, jenž opírá se o vlastnosti kořenů rovnic druhého stupně, má mnohé závady. Neboť záleží v podstatě v pokusném řešení rovnic z paměti a jest na stupni vědomostí, na němž se žáci tou dobou nacházejí, značně nesnadný, což zvláště zřejmě vysvitne, přihlížeme-li k různým znamením, jež kořeny m, n míti mohou. Dále vštěpuje se jím žáku mylná představa, že počtářství záleží aspoň z valné části v hádání a nikoli v důsledném usuzování. Mimo to v případech, kdy kořeny m, n jsou čísla irracionálná nebo imaginárná, způsobuje marné pokusy o řešení úlohy a tím značnou ztrátu času. Nové instrukce pro školy reálné odkazují návod tento až k rovnicím kvadratickým, kam skutečně patří, neboť může mu pak náležitě býti porozuměno. Ježto však přece v následujících partiích algebry bývá často zapotřebí rozložiti kvadratický trojčlen na činitele, a právě zajímavější úlohy rozkladu toho vymáhají, předkládám následující návod (který i v jiné příčině jest prospěšný), jako přiměřený, poněvadž nevyžaduje leč znalosti vzorců

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \tag{I}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b), \tag{II}$$

jež žáci beztoho již znají. Záležíť 1) v doplnění na druhou mocninu dvojčlenu a 2) v rozkladu rozdílu druhých mocnin na činitele.

Abychom rozložili na př. trojčlen

$$x^2 + 4x + 3$$

na činitele, doplňme prvé dva členy $x^2 + 4x$ čili $x^2 + 2 . 2 . x$ na úplnou druhou mocninu

$$x^2 + 2 . 2 . x + 2^2$$

dvojčlenu $x + 2$, přičtením členu 2^2; odečtouce pak zase tento člen $2^2 = 4$ a spojíce jej s členem 3, nabudeme

$$(x + 2)^2 - 1^2,$$

kterýžto výraz lze dle věty (II) rozložiti na

$$(x + 2 + 1)(x + 2 - 1),$$

t. j. na

$$(x + 3)(x + 1).$$

Příklad 2. Pro výraz

$$x^2 - 5x + 6$$

nabudeme, postupujíce jak naznačeno,

$$x^2 - 2 . \frac{5}{2} . x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= (x - 2)(x - 3).$$

Příklad 3. Výraz

$$x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$= (x + y)^2 - 4y^2$$

$$= (x + 3y)(x - y).$$

Příklad 4. Výraz

$$u = 2x^2 + x - 6$$

znásobíce 2mi, nabudeme

$$\begin{aligned}2u &= 4x^2 + 2x - 12 \\ &= (2x)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{4} \\ &= \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \\ &= (2x + 4)(2x - 3),\end{aligned}$$

pročež

$$u = (x + 2)(2x - 3).$$

Příklad 5. Výraz

$$\begin{aligned}&x^2 - 10x + 34 \\ &= (x - 5)^2 + 9\end{aligned}$$

nelze rozložiti na činitele (totiž reálné — o veličinách imaginárných nelze dosud mluviti), poněvadž součet čtverců $a^2 + b^2$ (nebo i $a^2 \pm b$) jest výraz kmenný.

Právě tak bylo by vhodno věty o dělitelnosti binomů $a^n + b^n$, $a^n - b^n$ odložiti až k rovnicím kvadratickým; jest známo i přirozeno, že si žáci tyto věty matou, nemajíce opory v důvodu. U rovnic však bez obtíží poznají, že $x^n - a^n$ zmizí při $x = a$ (t. j. že $x = a$ jest kořenem rovnice $x^n - a^n = 0$) a tudíž že $x - a$ jest činitelem binomu $x^n - a^n$. Podobně, že $x^{2n} - a^{2n}$ zmizí mimo při $x = a$ i při $x = -a$, ježto $(-a)^{2n} = a^{2n}$, pročež dvojčlen tento jest dělitelen $(x - a)$ i $x + a$, a tím i $x^2 - a^2$.

Posléze, že při *lichém* n, $x^n + a^n = 0$, je-li $x = -a$, pročež součet $x^n + a^n$ dělitelný $x + a$, ale nikoli při *sudém* $n = 2m$, neboť pak $x^{2m} + a^{2m} = 2a^m$, je-li $x = -a$.

Je-li m liché, jest $x^{2m} + a^{2m}$ dělitelno $x^2 + a^2$; neboť, klademe-li $x^2 = \xi$, $a^2 = \alpha$, jest při lichém m, $\xi^m + \alpha^m$ dle právě uvedené věty dělitelno $\xi + \alpha$, ale nikoli, je-li m sudé, pročež i $x^{2m} + a^{2m} = x^n + a^n$, je-li $n = 2m$ čtyrmi dělitelno. — Případ tento uvádím na doklad tvrzení výše uvedeného.

Tím budiž opraven též příslušný výklad ve Studničkově algebře (str. 31.). — Pan vládní rada F. Hoza prohlašuje ve své Algebře (II. vyd. str. 44.) součet $a^{2n} + b^{2n}$ za výraz kmenný, ač jej již při $n = 2$ a $n = 3$ snadno na činitele rozložiti lze; jest

$$a^4 + b^4 = (a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2),$$

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4),$$

a pod. dále.

Příspěvek ku grafickému řešení rovnic kvadratických.

Podává

M. Pelnář,
professor v Příbrami.

Kteroukoli rovnici kvadratickou uvésti lze na některý ze čtyř tvarů

$$(1) \qquad x^2 \pm gx = \pm k,$$

kdež g, k značí absolutní hodnoty reálné.

Je-li řešiti graficky některou z těchto rovnic, mysleme si, že její kořeny rovnají se hodnotám úseček bodů průsečných kružnice K a přímky P, jež dány jsou rovnicemi v soustavě pravoúhlé

$$(2) \qquad K \equiv x^2 + y^2 = r^2,$$

$$(3) \qquad P \equiv \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Aby tak bylo, třeba, by rovnice kvadratická

$$(4) \qquad x^2 - \frac{2mn^2}{m^2 + n^2} \cdot x = \frac{m^2(r^2 - n^2)}{m^2 + n^2},$$

jež z rovnic obou čar P, K vyloučením veličiny y vyplývá, a jejíž kořeny značí hodnoty úseček jejich bodů průsečných, totožnou byla s kvadratickou rovnicí danou. Tomu se vyhoví podmínkami

$$(5) \qquad -\frac{2mn^2}{m^2 + n^2} = \pm g,$$