

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Hübner

Kterak lze odvoditi z trojúhelníka vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 3, 335--337

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/123973>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1904

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Kterak lze odvoditi z trojúhelníka vzorce pro

$$\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta).$$

Podává.

Václav Hübner,

professor na Král. Vínohradech.

V trojúhelníku abc vedme výšky v_a, v_c , které odtínají na příslušných stranách a, c úsečky $\overline{be}, \overline{ce}, \overline{ad}, \overline{bd}$. Ježto strany trojúhelníka jsou v převráceném poměru s příslušnými výškami, jest

$$a : c = v_c : v_a$$

nebo

$$av_a = v_c(\overline{ad} + \overline{bd}).$$

Dělíme-li tuto rovnici součinem ab , obdržíme

$$\frac{v_a}{b} = \frac{v_c}{b} \cdot \frac{\overline{bd}}{a} + \frac{v_c}{a} \cdot \frac{\overline{ad}}{b}$$

čili

$$\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Z podobnosti trojúhelníků ace, bcd plyne

$$a : c = \overline{bd} : \overline{be}$$

čili

$$a(a - \overline{ce}) = \overline{bd}(\overline{ad} + \overline{bd});$$

ježto

$$v_c^2 = a^2 - \overline{bd}^2,$$

jest

$$v_c^2 = a \cdot \overline{ce} + \overline{ad} \cdot \overline{bd}.$$

Dělíme-li tuto rovnici opět součinem ab , dostaneme

$$\frac{v_c}{a} \frac{v_a}{b} = \frac{\overline{ce}}{b} + \frac{\overline{ad}}{b} \cdot \frac{\overline{bd}}{a}$$

nebo

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta,$$

tudíž

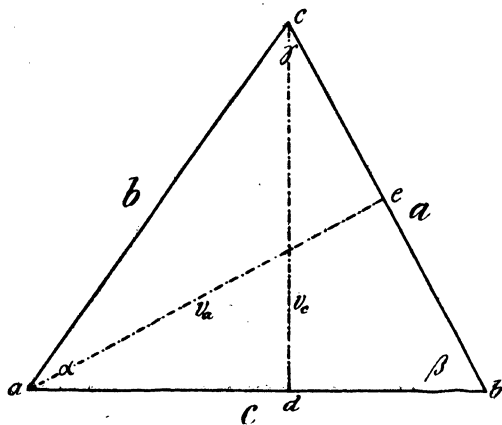
$$-\cos \gamma = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Dodatek. Rovnice

$$v_c^2 = \overline{ad} \cdot \overline{bd} + a \cdot \overline{ce},$$

$$v_a^2 = \overline{be} \cdot \overline{ce} + c \cdot \overline{ad}$$

mají význam geometrický tento:



Vedeme-li v trojúhelníku dvě výšky v_c , v_a a nad jednou z nich v_c sestrojíme čtverec, rovná se tento obdélníku sestrojěnému z obou úseků na straně c zvětšenému o obdélník, sestrojěný se strany a a úseku přilehlého ku straně třetí b .

Je-li trojúhelník abc rovnoramenný ($a = b$), jest

$$\overline{ad} = \overline{db} = \frac{c}{2}, \quad v_c^2 = a^2 - \frac{c^2}{4},$$

tudíž

$$a^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4} + a \cdot \overline{ce}$$

čili

$$a(a - \overline{ce}) = \frac{c^2}{2}$$

nebo

$$a \cdot \overline{be} = \frac{c^2}{2}, \quad \text{t. j. } a:c = c:2 \cdot \overline{be}.$$

Je-li $\alpha + \beta = 90^\circ$ (trojúhelník abc pravoúhlý), jest $\overline{ce} = 0$, $v_a = b$, pročež

$$v_c^2 = \overline{ad} \cdot \overline{bd}$$

nebo též

$$b^2 = c \cdot \overline{ad}.$$

Znamé poučky o střední měřicky úměrné.

Poznámka redakční. Z téhož obrazu lze vyvinouti vzorec pro tangentu součtu dvou úhlů.

Je-li totiž

$$\sphericalangle bae = \alpha_1, \quad \sphericalangle eac = \alpha_2,$$

jest

$$\overline{be} = v_a \cdot \operatorname{tg} \alpha_1, \quad \overline{ce} = v_a \cdot \operatorname{tg} \alpha_2, \quad \overline{bc} = v_a (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2);$$

označíme-li průsečík výšek cd , ae písmenem h , vyjádříme

$$\overline{he} = v_a \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2, \quad \overline{ah} = v_a (1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2).$$

Z podobnosti trojúhelníků bcd a adh plyne pak úměra

$$cd : ad = bc : ah,$$

pročež

$$\operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{cd}{ad} = \frac{bc}{ah}$$

a po dosazení hodnot dříve stanovených

$$\operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$