Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Kterak lze odvoditi z trojúhelníka vzorce pro sin$(\alpha+\beta)$, cos$(\alpha+\beta)$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 33 (1904), No. 3, 335--337

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123973`

Kterak lze odvoditi z trojúhelníka vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$.

Podává
Václav Hübner,
professor na Král. Vinohradech.

V trojúhelníku abc veďme výšky v_a, v_c, které odetínají na příslušných stranách a, c úsečky $\overline{be}$, $\overline{ce}$, $\overline{ad}$, $\overline{bd}$. Ježto strany trojúhelníka jsou v převráceném poměru s příslušnými výškami, jest

$$a : c = v_c : v_a$$

nebo

$$av_a = v_c(\overline{ad} + \overline{bd}).$$

Dělíme-li tuto rovnici součinem ab, obdržíme

$$\frac{v_a}{b} = \frac{v_c}{b} \cdot \frac{\overline{bd}}{a} + \frac{v_c}{a} \cdot \frac{\overline{ad}}{b}$$

čili

$$\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Z podobnosti trojúhelníků ace, bcd plyne

$$a : c = \overline{bd} : \overline{be}$$

čili

$$a(a - \overline{ce}) = \overline{bd}(\overline{ad} + \overline{bd});$$

ježto

$$v_c^2 = a^2 - \overline{bd}^2,$$

jest

$$v_c^2 = a \cdot \overline{ce} + \overline{ad} \cdot \overline{bd}.$$

Dělíme-li tuto rovnici opět součinem ab, dostaneme

$$\frac{v_c}{a} \frac{v_c}{b} = \frac{\overline{ce}}{b} + \frac{\overline{ad}}{b} \cdot \frac{\overline{bd}}{a}$$

nebo

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta,$$

tudíž

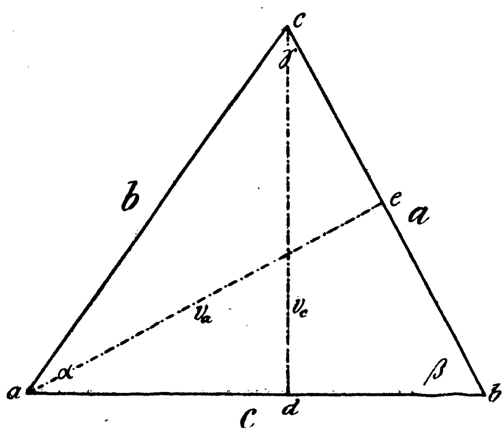
$$-\cos\gamma = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Dodatek. Rovnice

$$v_c^2 = \overline{ad}\,.\,\overline{bd} + a\,.\,\overline{ce},$$

$$v_a^2 = \overline{be}\,.\,\overline{ce} + c\,.\,\overline{ad}$$

mají význam geometrický tento:



Vedeme-li v trojúhelníku dvě výšky v_c, v_a a nad jednou z nich $\begin{matrix} v_c \\ v_a \end{matrix}$ sestrojíme čtverec, rovná se tento obdélníku sestrojenému z obou úseků na straně $\begin{matrix} c \\ a \end{matrix}$ zvětšenému o obdélník, sestrojený se strany $\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}$ a úseku přilehlého ku straně třetí b.

Je-li trojúhelník abc rovnoramenný ($a = b$), jest

$$\overline{ad} = \overline{db} = \frac{c}{2}, \quad v_c^2 = a^2 - \frac{c^2}{4},$$

tudíž

$$a^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4} + a\,.\,\overline{ce}$$

čili

$$a(a - \overline{ce}) = \frac{c^2}{2}$$

nebo

$$a \,.\, \overline{be} = \frac{c^2}{2}, \quad \text{t. j.} \quad a : c = c : 2 \,.\, \overline{be}.$$

Je-li $\alpha + \beta = 90^0$ (trojúhelník abc pravoúhlý), jest $\overline{ce} = 0$, $v_a = b$, pročež

$$v_c^2 = \overline{ad} \,.\, \overline{bd}$$

nebo též

$$b^2 = c \,.\, \overline{ad}.$$

Známé poučky o střední měřicky úměrné.

Poznámka redakční. Z téhož obrazu lze vyvinouti vzorec pro tangentu součtu dvou úhlů.

Je-li totiž

$$\sphericalangle\, bae = \alpha_1, \qquad \sphericalangle\, eac = \alpha_2,$$

jest

$$\overline{be} = v_a \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha_1, \quad ce = v_a \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha_2, \quad \overline{bc} = v_a (\mathrm{tg}\, \alpha_1 + \mathrm{tg}\, \alpha_2);$$

označíme-li průsečík výšek cd, ae písmenem h, vyjádříme

$$\overline{he} = v_a \,\mathrm{tg}\, \alpha_1 \,\mathrm{tg}\, \alpha_2, \quad \overline{ah} = v_a (1 - \mathrm{tg}\, \alpha_1 \,\mathrm{tg}\, \alpha_2).$$

Z podobnosti trojúhelníků bcd a adh plyne pak úměra

$$cd : ad = bc : ah,$$

pročež

$$\mathrm{tg}\,(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{cd}{ad} = \frac{bc}{ah}$$

a po dosazení hodnot dříve stanovených

$$\mathrm{tg}\,(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\mathrm{tg}\, \alpha_1 + \mathrm{tg}\, \alpha_2}{1 - \mathrm{tg}\, \alpha_1 \,\mathrm{tg}\, \alpha_2}.$$