Vilém Jung

Příspěvěk ke theorii ploch druhého stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 1, 24--35

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123967`

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\alpha'}{r} \sin\omega - \frac{\beta'}{r} \cos\omega; \tag{13}$$

zde značí α', β', r' opět derivace hodnot α, β, r dle t. Položíme-li k vůli stručnosti:

$$\frac{\alpha'}{r} = T; \qquad -\frac{\beta'}{r} = U, \tag{14}$$

tu máme z (13):

$$\frac{d\omega}{dt} = T \sin\omega + U \cos\omega. \tag{15}$$

Chtějíce převésti tuto rovnici na tvar známější*) připomeňme si, že vyjádřivše $\sin\omega$ a $\cos\omega$ co racionálné funkce nové proměnné v i $d\omega$ se objeví co racionálný differenciál. Známo, že to vykoná substituce:

$$tg\, \tfrac{1}{2}\omega = v; \tag{16}$$

tou (15) přejde na rovnici:

$$\frac{dv}{dt} + \tfrac{1}{2} Uv^2 - Tv - \tfrac{1}{2} U = 0, \tag{17}$$

Jest však známo, že lze rovnici tvaru:

$$\frac{dv}{dt} + \varphi(t) v^2 + \psi(t) v + \chi(t) = 0$$

vždy integrovati, jakmile je znám jeden partikulárný integrál. Tím patrně dokázána vyslovená věta.

Příspěvek ke theorii ploch druhého stupně.

Podal

V. Jung v Pardubicích.

Rovnice stupně druhého mezi třemi proměnnými znamená plochu druhého stupně a má všeobecně tvar:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{23} yz + 2a_{13} xz + 2a_{14} x + 2a_{24} y + 2a_{34} z + a_{44} = 0 \tag{1}$$

Degeneruje-li plocha druhého stupně na plochu buď kuželovou buď válcovou, aneb na dvojinu rovin, v konečnu se pronikajících, aneb na dvojinu rovin stejnosměrných, platí mezi

*) Viz článek pana *Besge-a* v XI. svazku 1. serie žurnálu Liouville-ova, str. 445.

součiniteli rovnice (1) jisté zákonité relace, jež se dají na základě homogenních čili Hesse-ových souřadnic velmi snadno a elegantně odvoditi, jak to poprvé Dr. Otto Hesse učinil.

V následujícím chci na základě obyčejných souřadnic Des Cartesových odvoditi spůsobem ovšem poněkud umělým, avšak ku pamatování velice výhodným podmínky, jež platí mezi součiniteli rovnice (1), má-li tato znamenati buď *a*) plochu kuželovou stupně druhého, buď *b*) dvojinu rovin, v konečnu se pronikajících, buď *c*) dvojinu rovin stejnosměrných, pri čemž užiju uěkteryck pojmů vyšší geometrie jakož i principu Dupin-ova a pravidla o násobení dvou determinantů téhož stupně.

Kuželovou plochu stupně druhého jakož i dvojinu rovin možno bráti za zvláštní případ hyperboloidu jednoplochého, pročež vyjdeme od definice této plochy druhého stupně. Plocha tato jest plochou mimosměrek (plochou sborcení), možno ji tedy pojímati jako nepřetržitý souhrn přímek, zákonitým způsobem vytvořených:

2. Plocha $\breve{\mathrm{H}}$ hyperboloidu jednoplochého jest výtvorem dvou projektivních svazků rovinných $\hat{S} \equiv (\mathrm{A, B, C, \ldots T})$ a $\hat{S}' \equiv (\mathrm{A', B', C', \ldots T'})$, což lze symbolicky vyjádřiti vzorcem $\hat{S} : \hat{S}\, \mathrm{z}\, \breve{\mathrm{H}}, (\hat{S} \pi \hat{S}')$. Osou svazku $\hat{S}$ jest přímka S a osou svazku $\hat{S}'$ jest přímka S'. Proniky združených rovin tvoří přímky povrchové hyperboloidu, tak ku př. jest všeobecně T, pronik to rovin T a T', takovou povrchovou přímkou. Tatáž plocha jest též výtvorem dvou projektivných řad bodových

$$\dot{P} \equiv (a, b, c, \ldots t) \text{ a } \dot{P}' \equiv (a', b', c', \ldots t'),$$

což lze symbolicky vyjádřiti vzorcem $\dot{P} : \dot{P}'\, \mathrm{z}\, \mathrm{H}, (\dot{P} \pi \dot{P}')$.

Spojnicí řady $\dot{P}$ jest přímka P a spojnicí řady $\dot{P}'$ jest přímka P'. Spojnice sdružených bodů jsou povrchovými přímkami plochy $\breve{\mathrm{H}}$.

Přidržme se v celém odvození definice prvé.*)

---

*) Plochy vůbec a roviny zvlášť označují symbolicky stojatými velkými, křivky vůbec a přímky zvlášť ležatými velkými a body malými písmeny abecedy latinské.

Budiž dán rovinový svazek $\hat{S}$ trojinou rovin A, B, C, a svazek $\hat{S}'$ združenou trojinou rovin A', B', C'. S rovinou T svazku $\hat{S}$ budiž združena rovina T' svazku $\hat{S}$.

Podmínka projektivnosti rovinových svazků $\hat{S}$ a $\hat{S}'$ jest rovnost dvojpoměrů sdružených čtveřin rovinových, t. j.

$$(ABCT) = (A'B'C'T'), \text{ při čemž } (ABCT) = \frac{(ABC)}{(ABT)}$$

$$= \frac{\sin(\widehat{A,C})}{\sin(\widehat{B,C})} : \frac{\sin(\widehat{A,T})}{\sin(\widehat{B,T})}$$

a obdobně

$$(A'B'C'T') = \frac{(A'B'C')}{(A'B'T')} = \frac{\sin(\widehat{A',C'})}{\sin(\widehat{B',C'})} : \frac{\sin(\widehat{A',T'})}{\sin(\widehat{B',T'})}.$$

Znamenejtež dále $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ směrové cosinusy, a pak délku kolmice, spuštěné s počátku souřadnicové soustavy na rovinu A; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ buďtež směrové cosinusy, b pak délka kolmice, spuštěné s počátku na rovinu B. Analogický význam mějtež veličiny $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, a'$; $\beta_1', \beta_2', \beta_3'$. b' vzhledem k rovinám A' a B'

Načež bude míti normalná rovnice

roviny A formu $A \equiv \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z - a = 0.$ (2)

„ B „ $B \equiv \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z - b = 0.$ (3)

Rovina C prochází pronikem rovin A, B t. j. osou S svazku $\hat{S}$, a platí-li $(ABC) = \lambda$, dá se její normálná rovnice, dle známé zásady Dupin-ovy psáti ve tvaru

$$C \equiv A - \lambda B = 0\ldots \quad (4)$$

Z podobné příčiny dá se normalná rovnice roviny T psáti ve tvaru $T \equiv A - \tau B = 0\ldots$ (5), platí-li $(ABT) = \tau$.

Analogicky má

rovina A' normalnou rovnici $A' \equiv \alpha'_1 x + \alpha'_2 y + \alpha_3 z - a' = 0$ (6)

„ B' „ „ $B' \equiv \beta'_1 x + \beta'_2 y + \beta'_3 z - b' = 0$ (7)

„ C' „ „ $C' \equiv A' - \lambda' B' = 0.$ (8)

„ T' „ „ $T' \equiv A' - \tau' B' = 0.$ (9)

platí-li $(A'B'C') = \lambda'$, $(A'B'T') = \tau'$.

Tu jsou λ a λ' určité veličiny, jichž poměr podmiňuje z části tvar, polohu a velikost plochy $\breve{H}$; veličiny τ a τ' jsou pak veličiny měnlivé, určující polohu povrchové přímky T_T^T, plochy $\breve{H}$ Z předeslaného patrno, že

$$(\mathrm{ABCT}) = \frac{\lambda}{\tau}, \quad (\mathrm{A'B'C'T'}) = \frac{\lambda'}{\tau'}$$

a jelikož
$$(\mathrm{ABCT}) = (\mathrm{A'B'C'T'})$$

musí
$$\frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda'}{\tau'} \ldots \tag{10}$$

Abychom obdrželi rovnici plochy $\breve{H}$, elliminujme z rovnic (5), (9) a (10) proměnné veličiny τ a τ'.

Dle (10) platí $\tau' = \frac{\lambda'}{\lambda}\tau$, takže

$$\mathrm{A} - \tau\,\mathrm{B} = 0$$
$$\lambda\mathrm{A'} - \tau\lambda'\,\mathrm{B'} = 0,$$

z čehož jednoduchou eliminací veličiny τ se podává:

$$\begin{vmatrix} A, & -\lambda B \\ \lambda A', & -\lambda' B' \end{vmatrix} = O, \text{ t. j. } \lambda A'B - \lambda' AB' = O \ldots, \tag{11}$$

což jest rovnicí plochy $\breve{H}$, kteráž udává vztah mezi pravoúhelnými souřadnicemi x, y, z bodů této plochy.

Seřadíme-li levou stranu rovnice (11) dle mocností proměnných veličin x, y, z, provedše především úkony tam naznačené, dospějeme k rovnici druhého stupně mezi x, y a z tvaru (1) to jest

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

při čemž

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda\alpha'_1\beta_1 - \lambda'\alpha_1\beta'_1 \\
a_{22} &= \lambda\alpha'_2\beta_2 - \lambda'\alpha_2\beta'_2 \\
a_{33} &= \lambda\alpha'_3\beta_3 - \lambda'\alpha_3\beta'_3 \\
a_{44} &= \lambda a'b - \lambda' ab' \\
2a_{12} &= \lambda\alpha'_1\beta_2 - \lambda'\alpha_1\beta'_2 + \lambda\alpha'_2\beta_1 - \lambda'\alpha_2\beta'_1 \\
2a_{23} &= \lambda\alpha'_2\beta_3 - \lambda'\alpha_2\beta'_8 + \lambda\alpha'_3\beta_2 - \lambda'\alpha_3\beta'_2 \\
2a_{13} &= \lambda\alpha'_3\beta_1 - \lambda'\alpha_3\beta'_1 + \lambda\alpha'_1\beta_3 - \lambda'\alpha_1\beta'_3 \\
2a_{14} &= -(\lambda a'\beta_1 - \lambda' a\beta'_1) - (\lambda\alpha'_1 b - \lambda'\alpha_1 b') \\
2a_{24} &= -(\lambda a'\beta_2 - \lambda' a\beta'_2) - (\lambda\alpha'_2 b - \lambda'\alpha_2 b') \\
2a_{34} &= -(\lambda a'\beta_3 - \lambda' a\beta_3) - (\lambda\alpha'_3 b - \lambda'\alpha_3 b')
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Tím jest analyticky dokázáno, že výtvor dvou projektivných svazků rovinných (t. j. hyperboloid jednoplochý) jest plochou druhého stupně!

3. Osy S a S' rovinných svazků $\hat{S}$ a $\hat{S}'$ jsou všeobecně mimosměrné. Může ale nastati, že se tyto osy pronikají, jsouce

různosměrny; v tomto případě budou míti veškeré povrchové přímky pouze jediný bod t. j. pronik os S a S' společný. Plocha $\breve{H}$ přejde v kuželovou plochu stupně druhého,*) jejímž středem jest pronik os S a S'.

Aby přímky S a S' se pronikaly, musí míti roviny A, B, A', B' pouze jediný bod společný, takže mezi součiniteli jejich rovnic musí platiti jistá souvislost, kterouž obdržíme, vyloučíme-li z rovnic (2), (3), (6) a (7) proměnné x, y, a z.

Musí tedy pro tento případ:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & -a \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & -b \\ \alpha_1', & \alpha'_2, & \alpha'_3, & -a' \\ \beta'_1, & \beta'_2, & \beta'_3, & -b' \end{vmatrix} = 0 \ldots . \qquad (13)$$

Jednoduchou transformací této podmínky vyplývá:

$$\begin{vmatrix} -\lambda'\beta'_1, & -\lambda'\beta'_2, & -\lambda'\beta'_3, & -\lambda'b' \\ \lambda\alpha'_1, & \lambda\alpha'_2, & \lambda\alpha'_3, & \lambda a' \\ \lambda\beta_1, & \lambda\beta_2, & \lambda\beta_3, & \lambda b \\ -\lambda'\alpha_1, & -\lambda'\alpha_2, & -\lambda'\alpha_3, & -\lambda'a \end{vmatrix} = 0 \ldots \qquad (14)$$

Násobíme-li pak rovnice (13) a (14) dle známé zásady, máme:

$$\begin{vmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda\alpha'_1\beta_1 - \lambda'\alpha_1\beta_1' \\ \lambda\alpha'_1\beta_1 - \lambda'\alpha_1\beta_1' \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} \lambda\alpha_1'\beta_2 - \lambda'\alpha_1\beta_2' \\ \lambda\alpha_2'\beta_1 - \lambda'\alpha_2\beta_1' \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} \lambda\alpha'_3\beta_1 - \lambda'\alpha_3\beta'_1 \\ \lambda\alpha'_1\beta_3 - \lambda'\alpha_1\beta'_3 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} -(\lambda a'\beta_1 - \lambda'a\beta'_1) \\ -(\lambda\alpha'_1 b - \lambda'\alpha_1 b') \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \lambda\alpha'_1\beta_2 - \lambda'\alpha_1\beta_2' \\ \lambda\alpha'_2\beta_1 - \lambda'\alpha_2\beta_1' \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} \lambda\alpha'_2\beta_2 - \lambda'\alpha_2\beta_2' \\ \lambda\alpha'_2\beta_2 - \lambda'\alpha_2\beta'_2 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} \lambda\alpha'_2\beta_3 - \lambda'\alpha_2\beta'_3 \\ \lambda\alpha'_3\beta_2 - \lambda'\alpha_3\beta'_2 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} -(\lambda a'\beta_2 - \lambda'a\beta'_2) \\ -(\lambda\alpha'_2 b - \lambda'\alpha_2 b') \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \lambda\alpha'_3\beta_1 - \lambda'\alpha_3\beta'_1 \\ \lambda\alpha'_1\beta_3 - \lambda'\alpha_1\beta'_3 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} \lambda\alpha'_2\beta_3 - \lambda'\alpha_2\beta'_3 \\ \lambda\alpha'_3\beta_2 - \lambda'\alpha_3\beta'_2 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} \lambda\alpha'_3\beta_3 - \lambda'\alpha_3\beta'_3 \\ \lambda\alpha'_3\beta_3 - \lambda'\alpha_6\beta'_3 \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} -(\lambda a'\beta_3 - \lambda'a\beta'_3) \\ -(\lambda\alpha'_3 b - \lambda'\alpha_3 b') \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -(\lambda a'\beta_1 - \lambda'a\beta'_1) \\ -(\lambda\alpha'_1 b - \lambda\alpha_1 b') \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} -(\lambda a'\beta_2 - \lambda'a\beta'_2) \\ -(\lambda\alpha'_2 b - \lambda'\alpha_2 b') \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} -(\lambda a'\beta_3 - \lambda'a\beta'_3) \\ -(\lambda\alpha'_3 b - \lambda'\alpha_3 b') \end{bmatrix}, &
\begin{bmatrix} \lambda a'b - \lambda'ab' \\ \lambda a'b - \lambda'ab' \end{bmatrix}
\end{vmatrix} = 0$$

---

*) V případě, kde by $S \parallel S'$ jest výtvorem rovinových svazků $\hat{S}$ a $\hat{S}'$ plocha válcová, o čemž se tuto šířiti nebudu z příčin v dodatku udaných.

Srovnáme-li se vzorci (12), obdržíme

$$\begin{vmatrix} 2a_{11}, & 2a_{12}, & 2a_{13}, & 2a_{14} \\ 2a_{12}, & 2a_{22}, & 2a_{23}, & 2a_{24} \\ 2a_{13}, & 2a_{23}, & 2a_{33}, & 2a_{34} \\ 2a_{14}, & 2a_{24}, & 2a_{34}, & 2a_{44} \end{vmatrix} = 2^4 \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

t. j.

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \; \ldots\ldots \quad (15),$$

což se obyčejně vyjadřuje slovy: Má-li rovnice druhého stupně mezi třemi proměnnými x, y, z znamenati kuželovou plochu druhého stupně, musí její Hesse-ův symetrický determinant zmizeti!

§. 4. Aby rovnice (1) znamenala dvojinu rovin, musí se dáti levá její strana rozložiti ve dva linearné činitele. Nutno tedy vyzkoumati podmínky, za kterých se tomuto požadavku vyhoví.

Abychom toho snadno docílili, uvažujme rovnici (11), která jest s rovnicí (1) identickou.

Levá strana rovnice $\lambda A'B - \lambda' AB' = 0 \ldots$ (11) dá se rozložiti ve dva linearné činitele, pak-li buď *a*) $A' = \mu A$ buď *b*) $B = \mu A$.

Poněvadž v obou případech přijdeme k témže výsledkům, probéřeme pouze případ prvý, jelikož jest geometricky zajímavější.

Načež možno rovnici (11) psáti formou

$$A(\lambda\mu B - \lambda' B') = 0 \;\ldots\ldots\; (16).$$

Tomu se vyhoví, pak-li $A = 0 \ldots\ldots$ (17) a $P \equiv \lambda\mu B - \lambda' B' = 0 \ldots\ldots$ (18), což znamená dvojinu rovin a sice rovinu $A \equiv A'$ a rovinu P, jež prochází dle (18) pronikem rovin B a B'.

Poněvadž ale $C = A - \lambda B$, $C' = A' - \lambda' B' = \mu A - \lambda' B'$, dá se rovnice (18) psáti ve tvaru $P \equiv \mu(A - C) - (\mu A - C')$

$$= C' - \mu C = 0 \;\ldots\ldots\; (19),$$

t. j. rovina P prochází pronikem rovin C a C'. Obdobně lze ukázati, že rovina P obsahuje taktéž pronik sdružených rovin T a T'.

Geometrický význam tohoto případu jest nad míru jasný. Rovina A stotožní se s rovinou A', proto mají rovinové svazky $\hat{S}$ a $\hat{S}$ samodružný prvek, z čehož především vysvítá, že musí býti osy S a S' různosměrny, nalézajíce se v jediné rovině. Svazky $\hat{S}$ a $\hat{S}'$ jsou v poloze prvoprojektivné, proto jsou proniky združených rovin v jediné rovině. Výtvorem svazků $\hat{S}$ a $\hat{S}'$ jest tedy dvojina rovin, skládající se ze samodružného jich prvku t. j. roviny $A \equiv A'$ a roviny P, jež obsahuje přímky $B_{B'}^{B}$, $C_{C'}^{C}$, ... $T_{T'}^{T}$, proniky to sdružených dvojin rovinových.

Aby $A' = \mu A$, musí $\alpha'_1 = \mu\alpha_1$, $\alpha'_2 = \mu\alpha_2$, $\alpha'_3 = \mu\alpha_3$, $a' = \mu a$.

Dosazením těchto podmínek do vzorců (12) obdržíme vzorce:

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
a_{11} &= \alpha_1 (\lambda\mu\beta_1 - \lambda'\beta_1')\\
a_{22} &= \alpha_2 (\lambda\mu\beta_2 - \lambda'\beta'_2)\\
a_{33} &= \alpha_3 (\lambda\mu\beta_3 - \lambda'\beta'_3)\\
2a_{12} &= \alpha_1 (\lambda\mu\beta_2 - \lambda'\beta'_2) - \alpha_2 (\lambda\mu\beta_1 - \lambda'\beta'_1)\\
2a_{23} &= \alpha_2 (\lambda\mu\beta_3 - \lambda'\beta'_3) - \alpha_3 (\lambda\mu\beta_2 - \lambda'\beta'_2)\\
2a_{13} &= \alpha_3 (\lambda\mu\beta_1 - \lambda'\beta'_1) - \alpha_1 (\lambda\mu\beta_3 - \lambda'\beta'_3)\\
2a_{14} &= - a (\lambda\mu\beta_1 - \lambda'\beta'_1) - \alpha_1 (\lambda\mu b - \lambda' b')\\
2a_{24} &= - a (\lambda\mu\beta_2 - \lambda'\beta'_2) - \alpha_2 (\lambda\mu b - \lambda' b')\\
2a_{34} &= - a (\lambda\mu\beta_3 - \lambda'\beta'_3) - \alpha_3 (\lambda\mu b - \lambda' b')\\
a_{44} &= a (\lambda\mu b - \lambda' b').
\end{aligned}\right.$$

Píšeme-li krátce $a = \alpha_4$, $\lambda\mu\beta_1 - \lambda'\beta'_1 = \alpha_5$, $\lambda\mu\beta_2 - \lambda'\beta'_2 = \alpha_6$, $\lambda\mu\beta_3 - \lambda'\beta'_3 = \alpha_7$, $\lambda\mu b - \lambda' b' = \alpha_8$, promění se vzorce (20) na velmi symetrické výrazy:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
a_{11} &= \alpha_1 \alpha_5\\
a_{22} &= \alpha_2 \alpha_6\\
a_{33} &= \alpha_3 \alpha_7\\
2a_{12} &= \alpha_1 \alpha_6 + \alpha_2 \alpha_5\\
2a_{23} &= \alpha_2 \alpha_7 + \alpha_3 \alpha_6\\
2a_{13} &= \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_7\\
2a_{14} &= - \alpha_4 \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_8\\
2a_{24} &= - \alpha_4 \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_8\\
2a_{34} &= - \alpha_4 \alpha_7 - \alpha_3 \alpha_8\\
a_{44} &= \alpha_4 \alpha_8.
\end{aligned}\right.$$

Patrno, že $\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_5, & 0, & 0 \\ \alpha_2, & \alpha_6, & 0, & 0 \\ \alpha_3, & \alpha_7, & 0, & 0 \\ -\alpha_4, & -\alpha_8, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0$

jakož i $\begin{vmatrix} \alpha_5, & \alpha_1, & 0, & 0 \\ \alpha_6, & \alpha_2, & 0, & 0 \\ \alpha_7, & \alpha_3, & 0, & 0 \\ -\alpha_8, & -\alpha_4, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0$

z čehož násobením vyplyne:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_5+\alpha_1\alpha_5, & \alpha_1\alpha_6+\alpha_2\alpha_5, & \alpha_1\alpha_7+\alpha_3\alpha_5, & -\alpha_1\alpha_8-\alpha_4\alpha_5 \\ \alpha_2\alpha_5+\alpha_1\alpha_6, & \alpha_2\alpha_6+\alpha_2\alpha_6, & \alpha_2\alpha_7+\alpha_3\alpha_6, & -\alpha_2\alpha_8-\alpha_4\alpha_7 \\ \alpha_3\alpha_6+\alpha_1\alpha_7, & \alpha_3\alpha_6+\alpha_2\alpha_7, & \alpha_3\alpha_7+\alpha_3\alpha_7, & -\alpha_3\alpha_8-\alpha_4\alpha_7 \\ -\alpha_4\alpha_5-\alpha_1\alpha_8, & -\alpha_4\alpha_6-\alpha_2\alpha_8, & -\alpha_4\alpha_7-\alpha_3\alpha_8, & a_4\alpha_8+\alpha_4\alpha_8 \end{vmatrix}$$

$$= 2^4 \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots. \quad (15),$$

což se dalo předzvídati, jelikož dvojina rovin je nejblíže zvláštním případem plochy kuželové druhého stupně!

Poněvadž $\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_5, & 0 \\ \alpha_2, & \alpha_6, & 0 \\ \alpha_3, & \alpha_7, & 0 \end{vmatrix} = 0$ jakož i $\begin{vmatrix} \alpha_5, & \alpha_1, & 0 \\ \alpha_6, & \alpha_2, & 0 \\ \alpha_7, & \alpha_3, & 0 \end{vmatrix} = 0,$

obdržíme násobením obou výrazů:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_5+\alpha_1\alpha_5, & \alpha_1\alpha_6+\alpha_2\alpha_5, & \alpha_1\alpha_7+\alpha_3\alpha_5 \\ \alpha_2\alpha_5+\alpha_1\alpha_6, & \alpha_2\alpha_6+\alpha_2\alpha_6, & \alpha_2\alpha_7+\alpha_3\alpha_6 \\ \alpha_3\alpha_5+\alpha_1\alpha_7, & \alpha_2\alpha_7+\alpha_3\alpha_6, & \alpha_3\alpha_7+\alpha_3\alpha_7 \end{vmatrix} = 2^3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots. \quad (22)$$

Obdobně lze odvoditi násobením:

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_5, & 0 \\ \alpha_2, & \alpha_6, & 0 \\ -\alpha_4, & -\alpha_8, & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_5, & \alpha_1, & 0 \\ \alpha_6, & \alpha_2, & 0 \\ -a_8, & -\alpha_4, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_5+\alpha_1\alpha_5, & \alpha_1\alpha_6+\alpha_2\alpha_5, & -\alpha_1\alpha_8-\alpha_4\alpha_5 \\ \alpha_2\alpha_5+\alpha_1\alpha_6, & \alpha_2\alpha_6+\alpha_2\alpha_6, & -\alpha_2\alpha_8-\alpha_4\alpha_6 \\ -\alpha_4\alpha_5-\alpha_1\alpha_8, & -\alpha_4\alpha_6-\alpha_2\alpha_8, & \alpha_4\alpha_8+\alpha_4\alpha_8 \end{vmatrix}$$

$$= 2^3 \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{24} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \;\ldots\ldots\; (23),$$

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_5, & 0 \\ \alpha_3, & \alpha_7, & 0 \\ -\alpha_4, & -\alpha_8, & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_5, & \alpha_1, & 0 \\ \alpha_7, & \alpha_3, & 0 \\ -\alpha_8, & -\alpha_4, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_5 + \alpha_1\alpha_5, & \alpha_1\alpha_7 + \alpha_3\alpha_5, & -\alpha_1\alpha_8 - \alpha_4\alpha_5 \\ \alpha_3\alpha_5 + \alpha_1\alpha_7, & \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3\alpha_7, & -\alpha_3\alpha_8 - \alpha_4\alpha_7 \\ -\alpha_4\alpha_5 - \alpha_1\alpha_8, & -\alpha_4\alpha_7 - \alpha_3\alpha_8, & \alpha_4\alpha_8 + \alpha_4\alpha_8 \end{vmatrix}$$

$$= 2^3 \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{13}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \;\ldots\ldots\; (24),$$

jakož i

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_2, & \alpha_6, & 0 \\ \alpha_3, & \alpha_7, & 0 \\ -\alpha_4, & -\alpha_8, & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_6, & \alpha_2, & 0 \\ \alpha_7, & \alpha_3, & 0 \\ -\alpha_8, & -\alpha_4, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_2\alpha_6 + \alpha_2\alpha_6, & \alpha_2\alpha_7 + \alpha_3\alpha_6, & -\alpha_2\alpha_8 - \alpha_4\alpha_6 \\ \alpha_3\alpha_6 + \alpha_2\alpha_7, & \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3\alpha_7, & -\alpha_3\alpha_8 - \alpha_4\alpha_7 \\ -\alpha_4\alpha_6 - \alpha_2\alpha_8, & -\alpha_4\alpha_7 - \alpha_3\alpha_8, & \alpha_2\alpha_8 + \alpha_4\alpha_8 \end{vmatrix}$$

$$= 2^3 \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \;\ldots\ldots\; (25)$$

Má-li tedy rovnice (1) znamenati dvojinu rovin, v konečnu se pronikajících, musí platiti:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{24} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{13}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \text{ a } \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Má-li rovnice (1) znamenati dvojinu rovin stejnosměrných t. j. má-li $A \parallel P$, musí dle známé zásady, poněvadž $A = 0$. $P \equiv \lambda\mu B - \lambda' B' = 0$ jsou rovnicemi těchto rovin, platiti srovnalost:

$$\frac{\alpha_1}{\lambda\mu\beta_1 - \lambda'\beta_1'} = \frac{\alpha_2}{\lambda\mu\beta_2 - \lambda'\beta_2'} = \frac{\alpha_3}{\lambda\mu\beta_3 - \lambda'\beta_3'}$$

tedy dle našeho zkrácení

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_5} = \frac{\alpha_2}{\alpha_6} = \frac{\alpha_3}{\alpha_7} \;\ldots.\; (26)$$

t. j.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 , & \alpha_2 \\ \alpha_5 , & \alpha_6 \end{vmatrix} = 0 , \begin{vmatrix} \alpha_2 , & \alpha_3 \\ \alpha_6 , & \alpha_7 \end{vmatrix} = 0 , \begin{vmatrix} \alpha_1 , & \alpha_3 \\ \alpha_5 , & \alpha_7 \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_5 , & \alpha_6 \\ \alpha_1 , & \alpha_2 \end{vmatrix} = 0 , \begin{vmatrix} \alpha_6 , & \alpha_7 \\ \alpha_2 , & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0 , \begin{vmatrix} \alpha_5 , & \alpha_7 \\ \alpha_1 , & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Z toho plyne násobením:

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 , & \alpha_2 \\ \alpha_5 , & \alpha_6 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_5 , & \alpha_6 \\ \alpha_1 , & \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_5 , & \alpha_1 \alpha_6 + \alpha_2 \alpha_6 \\ \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_6 , & \alpha_2 \alpha_6 + \alpha_2 \alpha_6 \end{vmatrix}$$

$$= 2^2 \begin{vmatrix} a_{11} , & a_{12} \\ a_{12} , & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \;\ldots.\; (27)$$

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_2 , & \alpha_3 \\ \alpha_6 , & \alpha_7 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_6 , & \alpha_7 \\ \alpha_2 , & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 \alpha_6 + \alpha_2 \alpha_6 , & \alpha_2 \alpha_7 + \alpha_3 \alpha_6 \\ \alpha_3 \alpha_6 + \alpha_2 \alpha_7 , & \alpha_3 \alpha_7 + \alpha_3 \alpha_7 \end{vmatrix}$$

$$= 2^2 \begin{vmatrix} a_{22} , & a_{23} \\ a_{23} , & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \;\ldots.\; (28)$$

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 , & \alpha_3 \\ \alpha_5 , & \alpha_7 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_5 , & \alpha_7 \\ \alpha_1 , & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_5 , & \alpha_1 \alpha_7 + \alpha_3 \alpha_5 \\ \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_7 , & \alpha_3 \alpha_7 + \alpha_3 \alpha_7 \end{vmatrix}$$

$$= 2^2 \begin{vmatrix} a_{11} , & a_{13} \\ a_{13} , & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \;\ldots.\; (29)$$

V tomto případě platí mimo předešlých pěti podmínek ještě:

$$\begin{vmatrix} a_{11} , & a_{12} \\ a_{12} , & a_{22} \end{vmatrix} = 0 , \begin{vmatrix} a_{22} , & a_{23} \\ a_{23} , & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ a } \begin{vmatrix} a_{11} , & a_{13} \\ a_{13} , & a_{33} \end{vmatrix} = 0 .$$

6. Nebude zajisté od místa aniž na škodu, sestavím-li dodatečně přehledný celek výsledků v tomto příspěvku vyvinutých.

Je-li dána rovnice druhého stupně mezi třemi proměnnými: $a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{23} yz + 2a_{13} xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ .... (1), utvořme si následujících *osm* symmetrických determinantů:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} \text{(I)}, \quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} \text{(II)},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{24} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{44} \end{vmatrix} \text{(III)}, \quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{13}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} \text{(IV)},$$

$$\begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} \text{(V)}, \quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} \end{vmatrix} \text{(VI)}, \quad \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} \text{(VII)},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13} \\ a_{13}, & a_{33} \end{vmatrix} \text{(VIII)}.$$

Rovnice (1) pak znamená

a) plochu kuželovou druhého stupně, zmízí-li symmetrický determinant (I),

b) dvojinu rovin, v konečnu se pronikajících, zmizí-li symmetrické determinanty: (I), (II), (III), (IV) a (V).

c) dvojinu stejnoměrných rovin, zmizí-li veškeré symmetrické determinanty: (I), (II), (III), (IV), (V), (VI), (VII) a (VIII).

7. *Dodatek.* Podmínky, jež by platily mezi součiniteli rovnice (1) pro případ, že by tato znamenala plochu válcovou, již nemají veskrze takovou nápadnou souměrnosť, jako podmínky právě odvozené. A poněvadž jejich odvození, jak se obyčejně v analytických geometriích prostoru vyskytuje (viz ku př. Salmon-Fiedler „Analytische Geometrie des Raumes", pag. 80—83, Zweite Auflage) jest velmi jednoduché a snadné*, a je-

*) Potřeba jen transformovati soustavu souřadnicovou do středu plochy, aniž by změnily osy souřadnicové svůj směr, a nové koefficienty v transformované rovnici při členech x, y, z prvého stupně položiti rovny nule, neboť vyhoví-li rovnici transformované, vztažené na střed plochy, veličiny x, y, z, musí jí vyhověti i veličiny $-x$, $-y$, $-z$. Z toho vyplývají tři linearné rovnice k určení souřadnic ξ, η, ζ středu plochy. Tyto tři linearné rovnice představují tři roviny, tak že jest střed plochy určen pronikem tří rovin. Procházejí-li tyto roviny jedinou přímkou, obdržíme nesčíslné množství středů, jež jsou na přímce, kterouž vlastnosť má právě plocha válcová druhého stupně; tato přímka, společná rovinám střed plochy určujícím, nazývá se *osou* plochy válcové. Nutno tedy vyjádřiti podmínky, za kterých ony tři roviny obsahují jedinou přímku společnou.

likož by způsob odvození ve směru svrchu naznačeném*) byl přes příliš umělý a poněkud nesnadný, bylo by od místa, tuto jej vyvinovati.

Drobné zprávy.**)

Podává

Dr. A. Seydler.

Dr. V. Strouhal und Dr. C. Barus: *Über Anlassen des Stahls und Messung seines Härtezustandes.* (Verh. d. phys. med. Ges. zu Würzburg, N. F. XV. Bd., 1880). Při studium fysikalních vlastností určitých látek náleží k největším obtížím, že nelze obdržeti látky takové, které by se, vyjma určité vlastnosti, jež právě skoumati chceme, ničím jiným mezi sebou nelíšily, a že se tudíž porovnání obdržených výsledků stává velmi nesnadným. Zejmena kovy vyskytují se v tak četných odrudách, že se někdy výsledky zjednané pozorováním na dvou kusech téhož kovu naprosto od sebe líší. Za tou příčinou jest velice důležito, aby se podařilo, určitým přesným spůsobem charakterisovati stav, v němž se jistá látka nalezá, a aby se tím spůsobem vyhledaly pevné, zaručené vztahy mezi jistými vlastnostmi, vyznačujícími určité stavy téže látky.

Vzhledem k oceli *kalené* a k oceli, *napouštěním* na různé stupně změknuvší poznali pp. *Strouhal* a *Barus* že jest *thermoelektrické chování se* a *galvanický odpor* ocele dobrou mírou pro stupeň její tvrdosti. Kdežto jest ocel kalená (tvrdá co sklo) vůči stříbru v ohledu thermoelektrickém zápornou, stává se ocel napuštěná kladnou v tím větší míře, čím menší její tvrdosť. V stejném poměru ubývá odporu galvanického, který jest ma-

---

*) Tu by se vyjádřili podmínky, za kterých by osy S a S' svazků $\hat{S}$ a $\hat{S}'$ byly stejnoměrné, neboť pak jest výtvorem těchto svazků rovinových plocha válcová, jelikož proniky združených rovin t. j. povrchové přímky plochy jsou vesměs stejnosměrny.

**) Jsouce přesvědčeni, že drobnými zprávami těmito se zavděčíme i čtenářstvu i spisovatelům, jichž se týkají, žádáme, aby se nám podobné zprávy co možná hojně zasílaly. Red.