Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Koláček

Odvození vzorce pro křivost normálného řezu dané plochy pomocí úvah mechanických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 4, 225--228

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123958

Odvození vzorce pro křivost normálného řezu dané plochy pomocí úvah mechanických.

Píše

Prof. Dr. Fr. Koláček v Praze.

Následující řádky jsou toho dokladem, kterak mnohdy lze poměrně jednoduchými úvahami kinematicko-mechanickými dospěti k větám ryze geometrickým.

Dejme tomu, že bod o hmotě $m = 1$, jenž zevním daným silám X, Y, Z podléhá, jest nucen na křivé ploše $F(x, y, z) = 0$ se pohybovati.

Pohyb jeho lze vypsati, připojí-li se k silám zevním X, Y, Z síly X_1, Y_1, Z_1 od této vázanosti pocházející a sice pomocí vzorců:

$$
\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1 \\
(1) \qquad &\frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1 \\
&\frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1.
\end{aligned}
$$

O těchto silách X_1, Y_1, Z_1 jakož o rychlostech u, v, w lze říci toto:

Z podmínky, že se bod x, y, z netoliko v čase t, nýbrž i v čase $t + dt$ na dané ploše nachází, plyne též

$$F(x + udt, \quad y + vdt, \quad z + wdt) = 0,$$

neb se zřetelem na $F(x, y, z) = 0$,

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w = 0.$$

Tato podmínka dí, že směr výsledné rychlosti padá do plochy; a poněvadž vždy, tudíž i v čase $t + dt$ splněna jest, máme, differencujíce rovnici (2) opětně dle t,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}F_1 + \frac{dv}{dt}F_2 + \frac{dw}{dt}F_3 &+ (F_{11}u + F_{12}v + F_{13}w)u \\ (3) \qquad &+ (F_{21}u + F_{22}v + F_{23}w)v \\ &+ (F_{31}u + F_{32}v + F_{33}w)w = 0.\end{aligned}$$

Při tom jest psáno F_1 na místo $\frac{\partial F}{\partial x}$, F_2 na místo $\frac{\partial F}{\partial y}$, F_{11} na místo $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, F_{12} na místo $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ atd.

Buďtež dále l, m, n cosinusy směru okamžitého pohybu, V rychlost výsledná, tedy $u = Vl$, $v = Vm$, $w = Vn$. Značiž dále Π kvadratickou formu

$$F_{11}l^2 + F_{22}m^2 + F_{33}n^2 + 2F_{12}lm + 2F_{13}ln + 2F_{23}n.$$

Rovnice (3), v níž za $\frac{du}{dt}$ atd. z rovnic (1) dosazeno bylo, přejde pak v rovnici:

$$(4) \qquad \frac{(X + X_1)F_1}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}} + \frac{(Y + Y_1)F_2}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}} + \frac{(Z + Z_1)F_3}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}} + \frac{\Pi . V^2}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}} = 0.$$

Tato rovnice nás sice učí, které podmínce složka výsledné síly na ploše kolmá vyhovovati musí, nepoučuje nás však nikterak o tom, jaké vlastnosti tangenciální část téže výsledné síly míti má.

Co do první z obou uvedených složek lze říci:

Třemi po sobě jdoucími polohami bodu se pohybujícího lze položiti oskulační rovinu, která v případu nejvšeobecnějším jest zároveň šikmým řezem plochy, jejž lze položiti elementem dráhy t. j. tangentou o směru l, m, n. Značí-li ϱ poloměr křivosti tohoto řezu šikmého, bude silou dostředivou $\frac{V^2}{\varrho}$. Mimo tuto sílu bod podléhá pak ještě síle, která má směr tangenty. Obě dohromady musí opět dáti výslednici složek $X + X_1$, $Y + Y_1$, $Z + Z_1$.

Odtud plyne:

Značiž N tu složku celistvé síly výsledné, jež stojíc na ploše kolmo, do nitra jejího směřuje, $(\varrho\, n)$ pak úhel mezi normálou plochy a poloměrem ϱ. Pak jest patrně

$$N = \frac{V^2}{\varrho} \cos(\varrho, n); \tag{5}$$

neboť tangenční složka ničím ku N nepřispívá, jsouc v ploše obsažena.

Volíme-li znamení odmocniny

$$\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$$

tak, že výrazy

$$\frac{-F_1}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}, \quad \frac{-F_2}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}, \quad \frac{-F_3}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}$$

označují směrové cosinusy normály, čelící dovnitř plochy, bude dle (4)

$$N = \frac{\Pi . V^2}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}.$$

Srovnáním rovnice této s rovnicí (5) obdržíme

$$\frac{1}{\varrho} \cos(\varrho\, n) = \frac{F_{11} l^2 + F_{22} m^2 + F_{33} n^2 + 2F_{12} lm + 2F_{13} ln + 2F_{23} mn}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}. \tag{6}$$

Dle tohoto pravidla můžeme v daném bodě plochy určiti poloměr křivosti šikmého řezu, jejž lze položiti tangentou v směru l, m, n.

Pro řez normálný jest $(\varrho\, n) = 0$, tedy křivost normálného řezu

$$\frac{1}{R} = \frac{F_{11} l^2 + F_{22} m^2 + F_{33} n^2 + 2F_{12} lm + 2F_{13} ln + 2F_{23} mn}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}} \tag{7}$$

(viz G. Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, svaz. II., p. 38.).

Srovnáním obou posledních vzorců přijdeme k větě Meusnierově, dle které poloměr zakřivenosti šikmého řezu rovná se průmětu příslušného řezu normálného.

Poznámka arithmetická.

Sdílí

M. Lerch,

docent při české vysoké škole technické v Praze.

Chceme určiti počet celistvých kladných čísel x, menších než dané celistvé číslo n, která hoví podmínce

$$E\left(\frac{n}{x}\right) = E\left(\frac{n}{x+1}\right).$$

Znamenejme za tím účelem k společnou hodnotu obou výrazů; pak bude

$$n = kx + r = k(x+1) + r',$$

kde r, r' značí kladné zbytky, jež číslo n poskytne při dělení číslem x, resp. číslem $x+1$.

Při tom máme tedy $r = k + r'$, a patrně

$$(a) \qquad x > r > r' \geqq 0;$$

dosadíme-li do rovnice $n - r = kx$ za k hodnotu $r - r'$, vznikne

$$(b) \qquad n - r = (r - r')x.$$

Podmínky (a) a (b) úplně charakterisují hledaná čísla x; neboť jsou-li splněny, bude $E\left(\frac{n}{x}\right) = E\left(\frac{n}{x+1}\right)$. Aby se obdržela čísla x, stačí voliti r libovolně a provésti rozklad $n - r = \delta\delta'$, ve kterém $\delta' \leqq r$. Pak bude $x = \delta$, ježto δ' lze psáti $r - r'$; při tom podrží se jen ony rozklady, pro něž $x > r$.

Hledáme tedy rozklady

$$n - r = \delta\delta', \text{ kde } \delta > r \geqq \delta';$$

poslední podmínku lze psáti