Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 4, 256--272

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123956

$$(bx + ay - ab)^2 = 2ab\,(a - x)\,(b - y)$$

a konečně

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

jakožto průměrovou rovnici ellipsy.

Poznámka 1. Hledíme-li na tento výsledek se stanoviska geometrie polohy, můžeme jej vysvětliti takto: Bod H, L, hovící rovnici

$$\mathrm{AL}\,.\,\mathrm{BH} = 2ab = \mathrm{const.}$$

tvoří v osách X, Y dvě projektivné řady, jichž úběžníky jsou body A, B. Také svazky, jimiž se tyto řady z bodů A, B promítají, jsou projektivné a vytvořují tudíž křivku 2. stupně. Tečny v bodech A, B jsou paprsky příslušné ku společnému paprsku obou svazků; tudíž tečnou v A jest přímka určená tímto bodem a úběžným bodem řady Y, tečna v B prochází úběžným bodem řady X. Jsou proto OA, OB sdružené poloměry křivky oběma svazky vytvořené.

Poznámka 2. Úsekový tvar rovnice přímky možno mimo obvyklé způsoby, v učebnicích geometrie se vyskytující, zjednati si takto:

Spojíme-li bod M s počátkem O, jest patrně ploský obsah

$$\triangle\,\mathrm{OMB} + \triangle\,\mathrm{OLM} = \triangle\,\mathrm{OLB},$$

t. j.

$$bx + cy = bc,$$

při čemž kladeno bylo $\mathrm{OL} = c$.

Dělíme-li celou rovnici bc, nalezneme

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1.$$

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 14.

V trojúhelníku ABC, pravoúhlém při C, vedeny příčky $CD \perp AB$, $DM \perp BC$, $DN \perp AC$. Sestrojiti trojúhelník, dáno-li

$$BM = m, \quad AN = n.$$

Řešení. (Zaslal p. *Josef Frieb,* stud. VII. tř. g. v Brně.) Leží-li proti odvěsnám a a b úhly vztažné α a β, jest

$$m = p_1 \cos\beta = a\cos^2\beta = a\sin^2\alpha,$$
$$n = p_2 \cos\alpha = b\cos^2\alpha;$$

tedy

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}\,\mathrm{tg}^2\alpha,$$

a poněvadž $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha$, jest

$$\frac{m}{n} = \mathrm{tg}^3\alpha;$$

tudíž

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \cot\beta = \sqrt[3]{\frac{m}{n}}.$$

Dle prvních dvou rovnic jsou odvěsny

$$a = \frac{m}{\sin^2\alpha}, \qquad b = \frac{n}{\cos^2\alpha},$$

a nahradíme-li funkce hodnotami dle rovnic

$$\sin^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}},$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}},$$

obdržíme odvěsny

$$a = \left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\right)\sqrt[3]{m^2}, \qquad b = \left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\right)\sqrt[3]{n^2}$$

a pak dle vzorce $c = \sqrt{a^2+b^2}$ přeponu

$$c = \left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\right)\sqrt{m\sqrt[3]{m}+n\sqrt[3]{n}}.$$

Úloha 15.

Do dané kružnice sestrojena jest strana vepsaného pravidelného trojúhelníka, čtyrúhelníka a šestiúhelníka. Do obou úsečí, *každou z těchto stran vzniklých, vepsány kružnice, které se vespolek v středu příslušné strany dotýkají. Jak se má součet s_3 prvních dvou kruhů k součtu s_4 druhých a k součtu s_6 třetích kruhů?*

Řešení. (Zaslal p. *B. Ženíšek*, stud. VI. tř. g. v Plzni.) Průměr $2r$ dané kružnice, kolmý na vepsanou stranu $a = 2t$, jest rozdělen touto stranou na části x a y, tak že

$$x + y = 2r \text{ a } xy = t^2.$$

Odečteme-li od dvojmoci první rovnice zdvojnásobenou rovnici druhou, obdržíme

$$x^2 + y^2 = 4r^2 - 2t^2,$$

a součet p ploch obou kružnic o průměrech x a y jest

$$p = \frac{\pi}{4}(x^2 + y^2) = \pi\left(r^2 - \frac{t^2}{2}\right).$$

Úloha žádá, aby byla

$$t = \frac{a_3}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{3}, \quad t = \frac{a_4}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}, \quad t = \frac{a_6}{2} = \frac{r}{2};$$

dosadíme-li tedy tyto zvláštní hodnoty pro t do horní obecné rovnice, obdržíme

$$p_3 = \pi\left(r^2 - \frac{3r^2}{8}\right) = \frac{5\pi}{8}r^2,$$

$$p_4 = \pi\left(r^2 - \frac{2r^2}{8}\right) = \frac{6\pi}{8}r^2,$$

$$p_6 = \pi\left(r^2 - \frac{r^2}{8}\right) = \frac{7\pi}{8}r^2;$$

tedy

$$p_3 : p_4 : p_6 = 5 : 6 : 7.$$

Úloha 16.

Paprsek, který rozděluje úhel C trojúhelníka ABC na části $\gamma_1 + \gamma_2 = C$, půlí protější stranu, jest-li

$$\sin\gamma_1 : \sin\gamma_2 = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Řešení. (Zaslal p. *K. Milota,* stud. VI. tř. g. v Písku.)

Ježto $\sin A : \sin B = BC : AC,$
jest také $\sin \gamma_1 : \sin \gamma_2 = BC : AC.$

Paprsek nechť protíná stranu AB v bodě D. Sestrojíme-li $AE \perp CD$ a $BF \perp CD$, bude

$$\sin \gamma_1 = \frac{AE}{AC} \quad \text{a} \quad \sin \gamma_2 = \frac{BF}{BC};$$

tedy

$$\frac{AE}{AC} : \frac{BF}{BC} = BC : AC.$$

Z této úměry vychází, že $AE = BF$. Jest tedy $ADE \cong BDF$ a tudíž

$$AD = BD.$$

Úloha 17.

Do kruhu poloměru r vepsati rovnoramenný trojúhelník, jehož půdice s výškou mají součet 3r.

Řešení. (Zaslal p. *Ant. Janíček*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Půdice trojúhelníka budiž x, výška $r + y$; k stanovení neznámých x, y máme rovnice

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$2x + y = 2r,$$

z nichž vyloučením x jde

$$5y^2 - 4ry = 0,$$

a tedy

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{4}{5} r.$$

K tomu najdeme

$$x_1 = r, \quad x_2 = \frac{3}{5} r.$$

Vyhovují tudíž úloze dva trojúhelníky, jichž půdice jsou

$$2r, \quad \frac{6}{5} r$$

a příslušné výšky

$$r,\quad \frac{9}{5}r.$$

Úloha 18.

Řešiti trojúhelník, dáno-li

$$a^2 + b^2 = 113,\quad c = 13,\quad \gamma = 120^0.$$

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Novotný*, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě.)

Dle Carnotovy věty jest při $\gamma = 120^0$

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab,$$

tedy

$$ab = c^2 - a^2 - b^2 = 56;$$

připojíme-li k tomu podmínku danou

$$a^2 + b^2 = 113,$$

najdeme

$$(a + b)^2 = 225,\quad (a - b)^2 = 1$$

a z toho

$$a = 8,\quad b = 7,\quad c = 13.$$

Úhly α, β trojúhelníka jsou

$$\alpha = 32^0 12' 15''$$
$$\beta = 27^0 47' 45''.$$

Úloha 19.

Dvě strany tvojúhelníka a jimi sevřený úhel dány jsou rovnicemi

$$a + b = 26,\quad a + b\cos\gamma = 24,\quad a + b\sin\gamma = 17.$$

Který jest povrch a obsah tělesa vznikajícího otočením tohoto trojúhelníka kolem třetí strany?

Řešení. (Zaslal p. *Jos. Grohman* v Ivanovicích na Moravě.)

Z daných rovnic vyjádříme

$$\cos\gamma = \frac{24-a}{b}, \quad \sin\gamma = \frac{17-a}{b}$$

a užitím vzorce

$$\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$$

obdržíme, vyloučíce b, rovnici

$$a^2 - 30a + 189 = 0.$$

Jelikož musí býti $a < 17$, aby $\sin\gamma$ byl kladný, má platnost pouze kořen

$$a = 9,$$

k němuž přísluší

$$b = 17.$$

Jest potom

$$\cos\gamma = \frac{15}{17}, \quad \sin\gamma = \frac{8}{17},$$

$$c = 10.$$

Výška příslušná k straně c jest

$$v = \frac{ab\sin\gamma}{c} = 7{\cdot}2.$$

Otáčí-li se trojúhelník kolem strany c, vytvoří těleso, jehož povrch

$$P = \pi v\,(a+b) = 187{\cdot}2\pi = 581{\cdot}11\ldots$$

a obsah

$$K = \frac{1}{3}\pi v^2 c = 172{\cdot}8\pi = 548{\cdot}86\ldots$$

Úloha 20.

V šírém poli stojí strom, jehož vrchol spatřuje se od severu v úhlu výškovém 30° 18′; pokročíme-li o $25\frac{1}{4}$ m na západ, uzříme jej v úhlu 19° 35′. Která jest výška stromu?

Řešení. (Zaslal p. *Ant. Sedláček*, stud. VIII. tř. g. v Klatovech.)

Označme

$$a = 25{\cdot}25\ m, \quad \alpha = 30^0 18', \quad \beta = 19^0 35'.$$

Je-li x hledaná výška, má pozorovatel v prvním postavení od stromu vzdálenost

$$m = x \operatorname{cotg} \alpha$$

a ve druhém vzdálenost

$$n = x \operatorname{cotg} \beta .$$

Jelikož

$$m^2 - n^2 = a^2 ,$$

bude

$$x = \frac{a}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 \beta - \operatorname{cotg}^2 \alpha}}$$

čili

$$x = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}} ;$$

logarithmicky vypočítáme

$$x = 11{\cdot}32\, m .$$

Úloha 21.

Ve sférickém trojúhelníku rovnoramenném dána jest půdice b, jejíž $\cos b = \frac{1}{3}$ a výška $v = 45^0$. Vypočítati jeho obsah.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Hýbl*, právník v Praze.)

Je-li α úhel při půdici, β úhel při vrcholu rovnoramenného trojúhelníka, jest

$$\operatorname{cotg} \alpha = \sin \frac{b}{2} \operatorname{cotg} v = \frac{1}{3} \sqrt{3} ,$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \sin v \operatorname{cotg} \frac{b}{2} = 1 ,$$

tedy

$$\alpha = 60^0 , \quad \beta = 90^0 .$$

Sférický nadbytek jest tudíž

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^0 = 30^0$$

a obsah trojúhelníka

$$\Delta = \frac{\pi r^2 \varepsilon}{180} = \frac{\pi r^2}{6}.$$

Trojúhelník ten rovná se $\frac{1}{24}$ povrchu koule.

Úloha 22.

Kolikátý asi díl oblohy můžeme zřetelně přehlednouti upřeným okem, je-li úhel zorného kužele 40°?

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Kroutil*, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí.)

Pokládáme-li oblohu za vnitřní stěnu duté polokoule, jest povrch její

$$P = 2\pi r^2;$$

z libovolného místa přehledneme vrchlík výšky v a obsahu

$$V = 2\pi r v (1 - \cos\alpha) = 4\pi r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

značí-li α polovici úhlu zorného kužele. Při

$$\alpha = 20^\circ$$

jest

$$V = 4\pi r^2 \sin^2 10^\circ,$$

tedy

$$n = \frac{V}{P} = 2\sin^2 10^\circ = 0{\cdot}60308.$$

Přibližné hodnoty jsou

$$\frac{2}{33}, \quad \frac{12}{199}, \quad \frac{43}{713}, \quad \ldots \text{ atd.}$$

Úloha 23.

Ustanoviti obsah tělesa, které vznikne, když se kolem osy X otočí trojúhelník omezený přímkami

$$x - y + 3 = 0, \quad 2x + y - 18 = 0, \quad x + 2y - 12 = 0.$$

Řešení. (Zaslal p. *Ferdinand Hrubý*, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově.)

Dané přímky protínají se v bodech

$$a(2, 5) \quad b(8, 2) \quad c(5, 8).$$

Trojúhelník *abc* otočiv se kolem osy X vytvoří těleso, jehož obsah rovná se součtu komolých kuželů, jichž pláště vytvořeny jsou stranami *ac*, *bc*, zmenšenému o komolý kužel, jehož plášť vytvoří strana *ab*. Poloměry základen těchto kuželů jsou

$$r_1 = x_1, \quad r_2 = x_2, \quad r_3 = x_3$$

a výšky jich

$$v_1 = x_3 - x_1, \quad v_2 = x_3 - x_2, \quad v_3 = x_2 - x_1.$$

Obsah tělesa vzniklého jest pak

$$V = \frac{\pi}{3}\Big[v_1(r_1^2 + r_1 r_3 + r_3^2) + v_2(r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2) - v_3(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\Big].$$

Dosadíme-li hodnoty příslušné, obdržíme

$$V = 135\pi = 324{\cdot}115 \ldots$$

Kratčeji přijdeme k témuž výsledku užitím pravidla Guldinova: obsah V rovná se obsahu $\varDelta$ trojúhelníka *abc* násobenému délkou dráhy, kterou opsalo jeho těžiště. Poloměr této dráhy jest

$$\varrho = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) = 5$$

a obsah trojúhelníka

$$\varDelta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2, & 5, & 1 \\ 8, & 2, & 1 \\ 5, & 8, & 1 \end{vmatrix} = \frac{27}{2};$$

tedy

$$V = 2\pi\varrho\varDelta = 135\pi.$$

Úloha 24.

V kružnici dán průměr $\overline{ab}$; které jest geom. místo bodu m, jehož mocnost ke kružnici rovná se obsahu trojúhelníka abm?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Půček*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Budiž rovnice dané kružnice

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

tedy souřadnice bodů

$$a(r, 0), \quad b(-r, 0);$$

bod m měj souřadnice x, y. Mocnost jeho ke kružnici jest

$$\mathrm{M} = x^2 + y^2 - r^2,$$

obsah trojúhelníka abm jest

$$\Delta = ry.$$

Z podmínky $\mathrm{M} = \pm \Delta$ plyne rovnice geom. místa

$$x^2 + y^2 \mp ry - r^2 = 0$$

čili

$$x^2 + \left(y \mp \frac{r}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} r^2.$$

Místem tím jest dvé kružnic, které mají střed $\left(0, \pm \frac{r}{2}\right)$ a procházejí body a, b.

Úloha 25.

Ohniskem paraboly $y^2 = 2px$ prochází sečna, protínající křivku v bodech (x_1, y_1), (x_2, y_2). Dokázati, že

$$\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -4.$$

Řešení. (Zaslal p. *Josef Pexider*, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.)

Dosadivše z rovnice přímky $y = a\left(x - \frac{p}{2}\right)$, kde a znamená tangentu libovolného úhlu, napřed

$$y^2 = a^2\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \text{ a pak } x = \frac{y}{a} + \frac{p}{2}$$

do rovnice paraboly $y^2 = 2px$, obdržíme souřadnice průsečíkův obou linií z rovnic

$$x^2 - \frac{a^2p + 2p}{a^2}x + \frac{p^2}{4} = o,$$

$$y^2 - \frac{2py}{a} - p = o.$$

Dle první této rovnice jest $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}$ a dle druhé $y_1y_2 = -p$; tudíž

$$\frac{y_1y_2}{x_1x_2} = -4.$$

Úloha 26.

Kolikrát možná vyjádřiti součin

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2 + e^2)(f^2 + g^2 + h^2 + k^2)$$

součtem čtyř čtverců $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$?

Řešení: (Zaslal p. *Adolf Ottis*, stud. VII. tř. g. v Plzni).

Součin $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2 + e^2)$ lze takto přetvořiti na součet čtyř čtverců:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + (a^2 + b^2)c^2 = (ac + bd)^2$$
$$+ (ad - bc)^2 (ae)^2 + (be)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$

načež jest

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(f^2 + g^2 + h^2 + k^2) = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2.$$

Že tato relace jest správná, dokázáno řešením úlohy 43. předešlého ročníku Časopisu (viz tohoto ročníku str. 144.) Zbývá tedy jen ukázati, kolikerým způsobem jest možna.

Součin $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2 + e^2)$ lze *třikrát* proměniti v součet čtyř čtverců, beřeme-li pospolu $(c^2 + d^2)$, nebo $(c^2 + e^2)$ aneb $(d^2 + e^2)$. Součin $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(f^2 + g^2 + h^2 + k^2)$ lze dle téhož principu provésti *devětkrát*, beřeme-li totiž postupně každý ze součtů $(\alpha^2 + \beta^2)$, $(\alpha^2 + \gamma^2)$, $(\alpha^2 + \delta^2)$ s každým ze součtů $(f^2 + g^2)$, $(f^2 + h^2)$, $(f^2 + k^2)$. Možno tedy součin

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2+e^2)(f^2+g^2+h^2+k^2)$$

vyjádřiti 27krát součtem čtyř čtverců.

Při zvláštních hodnotách některé z těchto spůsobů vedou k výsledkům totožným; tak ku př. součin

$$(1^2+2^2)(3^2+4^2+5^2)(6^2+7^2+8^2+9^2)=57500$$

dává těchto 24 různých součtů:

$$145^2+135^2+135^2+5^2,$$
$$146^2+124^2+138^2+42^2,$$
$$145^2+165^2+95^2+15^2,$$
$$171^2+113^2+123^2+19^2,$$
$$170^2+108^2+130^2+6^2,$$
$$170^2+140^2+90^2+30^2,$$
$$189^2+133^2+57^2+29^2,$$
$$189^2+93^2+113^2+19^2,$$
$$181^2+87^2+129^2+23^2,$$
$$170^2+78^2+140^2+54^2,$$
$$195^2+75^2+107^2+49^2,$$
$$175^2+125^2+105^2+15^2.$$
$$137^2+135^2+141^2+25^2,$$
$$137^2+159^2+115^2+15^2,$$
$$162^2+154^2+86^2+12^2,$$
$$162^2+124^2+126^2+2^2,$$
$$179^2+99^2+123^2+23^2,$$
$$175^2+69^2+145^2+33^2,$$
$$198^2+84^2+106^2+2^2,$$
$$169^2+93^2+137^2+39^2,$$
$$169^2+133^2+75^2+75^2,$$
$$183^2+73^2+131^2+39^2,$$
$$183^2+81^2+115^2+65^2,$$
$$170^2+130^2+90^2+60^2,$$

Správné řešení úloh zaslali pp.: *)

František Balada, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 18., 20.
František Bilovský, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 14. až 26.
Josef Bobek, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 1., 4., 7., 8., 18.
Josef Daníček, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 13.
Ignác Deyl, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 7., 17., 18., 20.
Petr Dostal, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 1., 3., 4., 5., 7., 9., 16., 18., 19.
Florian Dvořák, stud. VIII. tř. g. v Táboře, úl. 1., 3. až 9., 13. až 20., 23., 25.
Karel Erban, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 18.
Josef Frieb, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 14. až 23.
Jaromír Frus, stud. VII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 14. až 20., 23.
Ferdinand Gillar, stud. V. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 7.

*) Ostatní řešitelé úloh 1. až 13. jmenováni v čísle II.

Josef Grohman v Ivanovicích na Moravě, úl. 15., 16., 19.
Jan Hejtmánek, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 15., 16., 17., 19., 23., 24.
Richard Holl, stud. VI. tř. g. v Žitné ulici v Praze, úl. 14.
Jan Horák, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 18.
Karel Hrdlička, stud. VII. tř. g. v Litomyšli, úl. 16., 18.
Ferdinand Hrubý, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 15., 20., 23., 24.
František Hušek, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1. až 4., 7., 8., 16., 18.
František Hýbl, právník v Praze, úl. 14. až 25.
Vladimír Ibl, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 3., 5., 6., 8., 15., 18.
Jiljí Jahn, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 16., 18., 19., 23., 24.
Václav Janák, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 18.
Antonín Janíček, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 14. až 25.
Lazar Janiš, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 1., 4., 7., 8., 18.
Josef Jeřábek, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 18.
Otto Jílek, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 14., 15., 17.
Karel Komers, stud. VII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 6., 11., 13., 16., 17., 18.
Jan Koutný, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 18.
Jan Kroupa, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 1., 3. až 9., 12., 13., 15. až 25.
František Kroutil, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziřičí, úl. 11. až 25.
Petr Krupař, stud. VIII. tř. g. v Jičíně, úl. 15. až 18., 23.
Tobiáš Kudela, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 1., 3. až 9., 13., 13., 15. až 20., 23., 25.
Karel Kutílek, stud. 6. tř. g. v Chrudimi, úl. 17.
Bohdan Macků, stud. VI. tř. r. v Brně, úl. 4., 7., 8., 11., 13., 16.
Bedřich Mácha, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 16., 17., 18.
Bohuslav Masák, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1., 4., 7., 9., 18.
Jakub Menšík, gymn. abiturient v Kroměříži, úl. 22. až 25.
Václav Měšťák, stud. g. v Ml. Boleslavi, úl. 1., 4., 6. až 10., 13. až 18., 23., 25.
Karel Milota, stud. VI. tř. g. v Písku, úl. 18.

Alois Neumann, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 15. až 19,, 23.
Alois Nevím, stud. g. v Brně, úl. 14., 15., 16., 18., 19., 20.
Theodor Novák, stud. VI. tř. g. v Litomyšli, úl. 15., 17.
Jaroslav Novotný, stud. VIII. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 15., 16., 18.
Adolf Ottis, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 14. až 25.
Karel Pavlíček, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, úl. 17., 18.
Petr Pecl, stud. VI. tř. g. v Klatovech, úl. 14., 16.
Antonín Pešek, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 14., 16., 17., 18., 20.
Josef Půček, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 14. až 25.
Josef Rieger, stud. V. tř. r. v Jičíně, úl. 15. až 19.
Leopold Rosenberg, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 15. až 18., 23.
Václav Sadil, stud. VI. tř. r. v Budějovicích, úl. 16., 18.
Antonín Sedláček, stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 14. až 23.
Josef Sedláček, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1., 5.
František Sekyra, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 18.
Julius Schönfeld, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 13., 15., 18., 23., 24.
Jan Sieger, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 15., 18., 23.
Rudolf Stojan, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 16.
Pantaleon Synek, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 16., 17., 18., 20., 23.
slč. *Marie Šmelíkova,* chov. III. r. učit. ústavu v Olomouci, úl. 15., 17.
František Šofka, stud, VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1,, 7., 8., 9., 14., 16. až 19.
Karel Tauchmann, stud. VII. tř. g. v Jičíně, úl. 17., 18.
Josef Ticháček, stud. VI. tř. r. v Brně, úl. 7., 13., 16.
Oskar Tomandl, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 15. až 20., 23.
Josef Tomáš, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 13., 15. až 20., 22. až 25.
Jaroslav Topol, stud. VII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 18.
Karel Trolč, stud. VIII. tř. g. v Písku, úl. 1., 3. až 6., 11., 12., 15. až 18.
Miloslav Valouch, stud. VII. tř. g. v Olomouci úl. 16., 18.
Josef Vavrouch, stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 15., 16., 19., 20., 23., 25.

Karel Velkoborský, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 15., 17., 18., 22.
Vítězslav Víc, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, úl. 16., 17., 18.
Jan Vrabec, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 17., 19.
Antonín Vyhlídal, stud. VII. tř. g. v Přerově, úl. 14. až 25.
O. Wild, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 23.
Ferdinand Žebrák, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 16., 17., 18.
B. Ženíšek, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 15. až 23.

Úloha 47.

Řešiti rovnici

$$\begin{vmatrix} 1-a, & b, & x \\ x, & 1-b, & c \\ a, & x, & 1-c \end{vmatrix} = 0.$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 48.

Kolik jest celých čísel, jichž harmonický průměr s číslem 24 jest též číslem celým? Která jsou ta čísla?

Týž.

Úloha 49.

V kterých letech příštího století bude měsíc únor míti pět neděl?

Aug. Haas, posl. fil.

Úloha 50.

Řešiti soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax^2 - 2b^2y &= 3ab^2 \\ by^2 - 2a^2x &= 3a^2b\,. \end{aligned}$$

Týž.

Úloha 51.

Sestrojiti trojúhelník, dány-li body, ve kterých osy vnitřních jeho úhlů protínají kružnici opsanou.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 52.

Vně trojúhelníka *abc* sestrojeny nad stranami jeho čtverce cba_1a_2, acb_1b_2, bac_1c_2; jsou-li a, b, c strany daného trojúhelníka, který jest obsah šestiúhelníka $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$?

Týž.

Úloha 53.

Přepona *ab* trojúhelníka pravoúhlého *abc* rozdělena ve 3 stejné díly

$$am = mn = nb.$$

Je-li

$$\sphericalangle acm = x,\ \sphericalangle bcn = y,\ \sphericalangle mcn = z,\ \sphericalangle cab = \alpha,$$

jest dokázati relace

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\,,\ \operatorname{tg} y = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \alpha\,,\ \operatorname{tg} z = \frac{3}{4} \sin 2\,\alpha\,.$$

Týž.

Úloha 54.

Řešiti pravoúhlý trojúhelník, dán-li rozdíl odvěsen

$$a - b = 48{\cdot}89\ cm$$

a rozdíl úhlů

$$\alpha - \beta = 44^\circ 5' 48''.$$

Týž.

Úloha 55.

V rovnoramenném trojúhelníku *abc* ($ac = bc$) jest půdice $ab = 518\ mm$, úhel při půdici $\alpha = 18^\circ 55' 29''$. Vrcholem c vedena příčka *cd*, která s *ab* svírá úhel $53^\circ 7' 48''$.

Jak dlouhá jest tato příčka a v kterém poměru dělí trojúhelník?

Týž.

Úloha 56.

Výšky aa', bb', cc' trojúhelníka *abc* protínají se v bodě v tak, že

$$av : va' = 3 : 1, \; bv : vb' = 7 : 2.$$

V kterém poměru jest $cv : vc'$ a které jsou úhly trojúhelníka?

Týž.

Úloha 57.

Mají-li obě základny hranolce (prismatoidu) stejný obvod, má týž obvod každý řez k těmto základnám rovnoběžný. Dokázati.

Týž.

Úloha 58.

Kolmý průmět čtverce o straně a jest rovnoběžník o stranách b, c. Který úhel svírají strany tyto? Kterou odchylku má rovina čtverce od průmětny?

Týž.

Úloha 59.

Koule a dvojitý kužel, jehož osový řez je čtverec, mají stejné krychlové obsahy. Stanoviti poměr povrchů obou těles, aby chyba byla menší než $^1/_{1000}$.

Prof. *V. Hübner.*

Úloha 60.

První stopa roviny ρ, která stojí kolmo na rovině totožnosti, uzavírá s osou X úhel $b = 57^0 40'$; jak velké jsou odchylky této roviny od obou průměten π, ν a kterak lze přímo sestrojiti odchylku, jest-li dán úhel, který uzavírá stopa roviny s osou X a naopak?

Týž.