Karel Petr
Poznámka k článku p. Hlaváčka

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 3, 160--161

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123950`

Poznámka k článku p. Hlaváčka.

Od *K. Petra.*

(Došlo 22. prosince 1930.)

Úvahy p. autora lze podstatně zjednodušiti, nahradíme-li funkci sinus funkcí jednodušší. Taková funkce jest na př. funkce $\varphi(x)$ definovaná těmito rovnicemi

$$\varphi(x+2) = \varphi(x), \quad \varphi(-x) = \varphi(x), \quad \text{pro každé } x$$
$$\varphi(x) = x, \text{ jestliže } x \text{ jest v intervalu } (0, 1).$$

Funkce jest očividně funkcí spojitou; znázorněna jest graficky lomenou čarou probíhající mezi přímkami $y = 0$, $y = 1$. Hodnoty nulové nabývá v bodech $x = 2k$; v bodech $x = 2k + 1$ stává se rovnou 1; při tom jest k libovolné číslo celé kladné nebo záporné. Pro tuto funkci jest platný vztah

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = (-1)^a h, \tag{I}$$

jsou-li oba body x, $x + h$ v intervalu $(a, a + 1)$, a celé číslo. Pomocí té funkce sestrojíme funkci $F(x)$, jež bude dána řadou nekonečnou

$$F(x) = \varphi(x) + \frac{1}{10}\varphi(10x) + \frac{1}{10^2}\varphi(10^2 x) + \ldots,$$

a dokážeme si o ní, že nemá v žádném bodě derivaci, ačkoliv jest všady spojitá. Uvažujme bod x daný desetinným zlomkem

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots, \quad 0 \leqq a_k \leqq 9, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ jsou čísla celá. Klaďme dále

$$h_n = \varepsilon_n \frac{2}{10^n}, \qquad \varepsilon_n = \pm 1,$$

při čemž pro jednoduchost požadujeme, aby ε_n bylo kladné, je-li $a_n = 0, 1$, a aby bylo záporné, je-li $a_n = 8, 9$. Pak jest v důsledku periodicity funkce $\varphi(x)$ a v důsledku rovnice (I) ihned

$$\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}=(-1)^{a_0}+(-1)^{a_1}+(-1)^{a_2}+\ldots+(-1)^{a_{n-1}}.$$

Avšak nekonečná řada (zlomek desetinný pro x pokládáme — přidávajíce po př. libovolný počet nul — za zlomek desetinný o nekonečném počtu míst)

$$(-1)^{a_0}+(-1)^{a_1}+(-1)^{a_2}+\ldots$$

není konvergentní, neexistuje tudíž limita výrazu

$$\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n} \quad \text{pro} \lim n=\infty.$$

a funkce $F(x)$ nemá v uvažovaném bodě x derivaci.

Tím konstrukce funkce spojité, nemající v žádném bodě derivace, provedena a účel sledovaný p. Hlaváčkem dosažen. Jednoduchost funkce $\varphi(x)$ dovoluje nadto vyšetřiti některé další vlastnosti funkce $F(x)$. Uvedu jednu bez důkazu, který jest ostatně zcela snadný. Jest

$$\lim_{h=0}\frac{F(0+h)-F(0)}{h}=+\infty, \quad \text{je-li } h>0,$$
$$=-\infty, \quad \text{je-li } h<0.$$

Má tedy $F(x)$ v bodě $x=0$ relativní minimum vlastní. Takové minimum očividně nastává v každém bodě x, lze-li x vyjádřiti pomocí desetinného zlomku konečným počtem cifer. Jest tedy množství relativních minim vlastních všude husté. Má $F(x)$ ještě v jiných bodech relativní minima? V kterých bodech $F(x)$ má relativní maxima? Konečně, jak veliké jest absolutní maximum funkce $F(x)$? Zda řada Fourierova pro $F(x)$ o periodě 2 jest v každém intervalu stejnoměrně konvergentní?

*

Remarque au sujet de l'article de M. Hlaváček.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur fait voir que la démonstration de M. Hlaváček peut être simplifiée si l'on remplace la fonction sin x par la fonction définie par les relations suivantes:

$$\varphi(x+2)=\varphi(x),\ \varphi(-x)=\varphi(x),\ \varphi(x)=x \text{ pour } 0\leqq x\leqq 1.$$

La fonction $F(x)$ du texte tchèque est alors continue sans admettre de dérivée en aucun point.