Bohumil Bydžovský

Kvadratické involuce v prostoru n-rozměrném

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 4, 214--224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123935

Kvadratické involuce v prostoru n-rozměrném.

B. Bydžovský.

(Došlo 19. března 1931.)

V tomto metodickém příspěvku k teorii Cremonových transformací v obecném prostoru projektivním jsou odvozeny nutné podmínky pro homaloidní soustavu kvadratických nadploch a z toho vyvozeny (známé) rovnice nejobecnější kvadrokvadratické transformace Cremonovy ve vhodně volené soustavě souřadné. Odtud snadno plynou rovnice pro kvadratickou involuci; je-li tato involuce inversí, lze ji vyjádřiti velmi jednoduše i pro obecnou soustavu souřadnou. Ke konci je odvozena podmínka pro to, aby dvě inverse složeny dávaly opět kvadratickou involuci.

1. Racionální transformace dvou projektivních prostorů n-rozměrných S_n, S_n', v níž nadrovinám prvního prostoru odpovídají nadkvadriky druhého, je dána rovnicemi

$$x_i = Q_i(x'), \qquad i = 1, \ldots, n+1, \tag{1}$$

kde $Q_i(x')$ jsou kvadratické formy proměnných $x'_1, \ldots, x'_{n+1}$. Má-li tato transformace býti Cremonova, musí se dáti soustava (1) řešiti racionálně podle proměnných x'_i; má-li mimo to býti kvadrokvadratická, t. j. kvadratická v obou směrech, musí toto řešení míti opět týž tvar, jako má soustava (1), t. j. proměnné x'_i musí býti vyjádřeny jako kvadratické formy proměnných x_i. Ukážeme v dalším, že lze voliti kvadratické formy Q_i tak, aby transformace (1) splňovala oba vyslovené požadavky; nejprve však odvodíme některé nutné podmínky pro to, aby to nastalo.

Předpokládejme tudíž, že (1) vyjadřuje transformaci žádaných vlastností. Dokážeme nejprve, že pak každému lineárnímu podprostoru jednoho z uvažovaných prostorů odpovídá v druhém kvadratická varieta. Především je zřejmo z tvaru (1) a jeho řešení, že každé nadrovině jednoho prostoru odpovídá nadkvadrika druhého. Dále odpovídá přímce jednoho prostoru kuželosečka druhého, neboť daná přímka protne každou hyperkvadriku téhož prostoru ve dvou bodech a tudíž protne každá nadrovina druhého prostoru algebraický útvar, odpovídající přímce, také ve dvou bodech; je to tudíž kuželosečka. Mějme pak libovolný lineární podprostor. Každá kuželosečka, která v něm neleží, ale leží s ním v lineárním podprostoru nejblíže vyšším, protne jej ve dvou bodech. Algebraická varieta, která odpovídá danému podprostoru, není tedy přímkami — těm odpovídají kuželosečky — proťata vůbec, nebo je-li proťata, ve dvou bodech. Je to tedy kvadratická varieta, čímž je hořejší obecné tvrzení dokázáno.

Z něho plyne, že lineárnímu prostoru S_{n-2} společnému nadrovinám

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

odpovídá $(n-2)$-rozměrná varieta kvadratická. Těmto dvěma nadrovinám odpovídají podle (1) nadkvadriky

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0,$$

jež se protnou ve varietě 4. stupně. Tato varieta se tudíž rozpadne ve dvě variety kvadratické q_{n-2}, q'_{n-2}, z nichž první odpovídá bod za bodem podprostoru S_{n-2}. Libovolnému bodu x'_i na q'_{n-2} nemůže odpovídati v S_n jediný určitý bod, ježto by to musil býti bod na S_{n-2}, což by odporovalo jednojednoznačnosti transformace (1). Bodu x'_i, jenž dosazen do pravé strany (1), nedává za výsledek vesměs nuly, odpovídá transformací určitý jediný bod; z toho plyne, že bod x'_i variety q'_{n-2} dává, dosazen do pravé strany (1), za výsledek vesměs nuly. To znamená, že všechny nadkvadriky

$$Q_i(x') = 0, \quad i = 1, \ldots, n+1$$

obsahují kvadratickou varietu q'_{n-2}. Touto varietou procházejí tudíž všechny nadkvadriky

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i Q_i(x') = 0$$

homaloidní soustavy prostoru S'_n, t. j. všechny nadkvadriky odpovídající nadrovinám prostoru S_n.

Kvadratická varieta $(n-2)$-rozměrná leží v nadrovině. Vezměme nadrovinu, v níž leží q'_{n-2}, za nadrovinu souřadnou

$$x_1' = 0.$$

Varieta q'_{n-2} je pak dána touto rovnicí a další

$$\sum_{i,k=2}^{n+1} a'_{ik}\, x'_i\, x'_k = 0.$$

Ježto nadkvadrika homaloidní soustavy tuto varietu obsahuje, je její rovnice

$$x'_1 \sum_{i=1}^{n+1} b_i\, x_i + \sum_{i,k=2}^{n+1} a'_{ik}\, x'_i\, x'_k = 0,$$

kde b_i jsou nezávislé konstanty v počtu $(n + 1)$. Je tedy nadkvadrika procházející pevnou varietou q'_{n-2} určena dalšími $(n + 1)$ body. Avšak nadrovina n-rozměrného prostoru je určena n body; tolika body tedy musí býti určena také nadplocha homaloidní soustavy. Z toho plyne, že všechny tyto nadplochy obsahují ještě další pevný bod.

Nalezli jsme tudíž jako nutné podmínky pro homaloidní soustavu kvadrokvadratické transformace Cremonovy v S'_n to, že všechny nadkvadriky této soustavy mají společnou kvadratickou varietu $(n—2)$-rozměrnou a mimo to pevný bod.

Není třeba zvláště zdůrazňovati, že obdobný výsledek platí pro homaloidní nadkvadriky prostoru S_n.

2. Nalezené podmínky také stačí k tomu, aby existovala kvadrokvadratická Cremonova transformace, jak ukážeme odvozením jejích rovnic za předpokladu, že jsou splněny nalezené podmínky.

Pišme rovnice variety q'_{n-2} v tvaru

$$x'_1 = 0, \quad Q(x_2', \ldots, x'_{n+1}) = 0,$$

kde Q je kvadratická forma. Společný další bod všech homaloidních nadkvadrik vezměme za bod O_1' $(1, 0, \ldots, 0)$. Každá nadkvadrika

$$Q_i = 0$$

z rovnic (1), jež je rovněž homaloidní, dá se tedy psáti v tvaru

$$x'_1 L_i(x'_2, \ldots, x'_{n+1}) + Q(x'_2, \ldots, x'_{n+1}) = 0,$$

kde L_i je lineární forma, při čemž

$$L_i = 0$$

je tečná nadrovina této nadplochy v bodě O'_1. Ježto jsme dosud nevolili další souřadné nadroviny, můžeme je zvoliti tak, aby

$$L_i = x'_i \cdot i = 2, \ldots, n + 1.$$

Jsou tudíž základní homaloidy Q_i vyjádřeny rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} &x'_1 \sum_{k=2}^{n+1} a_k x'_k + Q = 0 \\ &x'_1\, x'_i + Q \qquad = 0, \qquad i = 2, \ldots, n + 1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ježto levé strany soustavy (1) jsou lineárně nezávislé, je tomu také tak se stranami pravými, totiž s homaloidy Q_i. Násobíme-li rovnice (2) druhou počínaje postupně koeficienty $a_2, \ldots, a_{n+1}$ a sečteme, obdržíme

$$x'_1 \sum_{k=2}^{n+1} a_k x'_k + Q \sum_{k=2}^{n+1} a_k = 0.$$

Aby první rovnice (2) nezávisela lineárně na ostatních n rovnicích této soustavy, je tedy nutno a stačí, aby

$$\sum_{k=2}^{n+1} a_k - 1 \neq 0, \tag{3}$$

což v dalším budeme předpokládati.

Rovnice (1) nabyly provedenou volbou soustavy souřadné v prostoru S'_n tvaru

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \sum_{k=2}^{n+k} a_k x'_k + Q \\ x_i &= x'_1 x'_i \qquad\qquad + Q, \qquad i = 2, \ldots, n+1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

při čemž je soustava souřadná v prostoru S_n ještě zcela libovolná. Abychom dále zjednodušili rovnice (4), zvolíme ještě vhodným způsobem také tuto soustavu souřadnou. Proveďme nejprve transformaci souřadnic danou substitucí

$$(1 - \sum_{k=2}^{n+1} a_k)\, X_1 = x_1 - \sum_{k=2}^{n+1} a_k x_k, \quad X_i = x_i, \quad i = 2, \ldots, n+1.$$

Že je to transformace souřadnic, je zaručeno nerovností (3). Snadný výpočet ukáže, že touto transformací nabudou rovnice (4) jednoduššího tvaru — píšeme hned zase x_i místo X_i —

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= Q \\ x_i &= x'_1 x'_i + Q, \quad i = 2, \ldots, n+1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Odečteme-li zde první rovnici ode všech ostatních, obdržíme

$$x_i - x_1 = x'_1 x'_i, \quad i = 2, \ldots, n+1.$$

Determinant substituce

$$X_1 = x_1, \quad X_i = x_i - x_1, \quad i = 2, \ldots, n+1$$

je 1, tudíž nenulový a tato substituce vyjadřuje tudíž transformaci souřadnic; touto druhou transformací nabudou rovnice (5) konečného tvaru

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= Q(x') \\ x_i &= x'_1 x'_i, \quad i = 2, \ldots, n+1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Tuto soustavu lze racionálně řešiti podle x'_i. Je totiž

$$x'_i = x_i : x'_1, \quad i = 2, \ldots, n+1,$$

což dosazeno do první rovnice (6) dá

$$x'_1 = Q(x) : x_1 x'_1.$$

Násobíme-li obdržených $(n + 1)$ rovnic po pravé straně $x_1 x'_1$ — což znamená násobiti všechny souřadnice týmž činitelem — obdržíme jako řešení soustavy (6) soustavu

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= Q(x) \\ x'_i &= x_1\, x_i, \qquad i = 2, \ldots, n+1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Tím je dokázáno, že soustavou (6) je skutečně vyjádřena kvadrokvadratická transformace Cremonova mezi dvěma projektivními prostory n-rozměrnými.[1])

Zároveň přirovnání rovnic (7) k rovnicím (6) ukazuje, že všechny homaloidy v prostoru S_n procházejí pevným bodem $O_1(1, 0, \ldots, 0)$ a kvadratickou varietou

$$x_1 = 0, \quad Q(x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0.$$

3. Rovnice (7) ihned ukazují, že body hlavní — t. j. body, jimž neodpovídá v druhém prostoru po jediném bodu — v prostoru S_n jsou O_1 — hlavní bod isolovaný — a body kvadratické variety

$$x_1 = 0, \quad Q(x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0,$$

kterou proto také nazýváme hlavní.

Rovnice (6) pak ukazují, že každému bodu, pro který $x'_1 = 0$, aniž je zároveň $Q(x') = 0$, odpovídá bod O_1; tomuto bodu tedy obráceně odpovídá každý bod roviny $x'_1 = 0$ (přesně řečeno až na body kvadratické variety $Q(x') = 0$, což však zpravidla netřeba respektovati). Nazveme tuto rovinu také hlavní.

Abychom ještě zjistili, které body jest přidružiti bodům variety

$$x_1 = 0, \quad Q(x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0,$$

uvažme nejprve, že sestrojenou transformací jsou si projektivně přidruženy oba $(n—1)$-rozměrné svazky o vrcholech O_1, O'_1. Neboť z rovnic (6) plyne

$$x_2 : x_3 : \ldots : x_{n+1} = x'_2 : x'_3 : \ldots : x'_{n+1},$$

což vyjadřuje kolineaci mezi dvěma prostory $(n—1)$-rozměrnými. V této kolineaci si pak zřejmě odpovídají také oba nadkužele, které z těchto bodů promítají obě hlavní kvadratické variety.

Promítněme z bodu O'_1 libovolný bod y'_i hlavní variety

$$x'_1 = 0, \quad Q(x') = 0;$$

libovolný bod promítající přímky má souřadnice

$$x'_1 = \lambda + \mu y'_1, \quad x'_i = \mu y'_i, \qquad i = 2, \ldots, n+1.$$

[1]) Rovnice (6) a (7) v. na př. v E. Bertini: „Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume", 1924, str. 430. Není tu však ukázáno, že těmito rovnicemi je vyjádřena jediná existující kvadrokvadratická transformace; to doplniti je jedním z účelů tohoto článku.

Dosaďme tyto souřadnice do pravé strany (6). Ježto $Q(x') = \mu^2 Q(y') = 0$, dávají tyto rovnice

$$x_1 = 0, \quad x_i = (\lambda + \mu y'_1) \, . \, \mu y'_i.$$

Je pak $Q(x) = \mu^2(\lambda + \mu y'_1)^2 \, Q(y') = 0$, což znamená, že libovolnému bodu na uvedené přímce odpovídá bod variety hlavní; obráceně tedy bodu hlavní variety odpovídá celá přímka procházející hlavním bodem isolovaným a sice přímka, která odpovídá v kolineaci výše nalezené přímce, promítající z druhého hlavního bodu isolovaného uvažovaný bod hlavní variety.[2]) Nadkužel, skládající se z těchto přímek, nazýváme také hlavní.

To platí ovšem stejně pro hlavní body druhého prostoru.

4. Nadploše stupně n-ho odpovídá naší transformací nadplocha st. $2n$-ho, která ovšem se může rozpadati, jak netřeba podrobně rozváděti. Jestliže jsou součásti této nadplochy elementy hlavní, pak se zpravidla do této nadplochy nepočítají a výsledek se vyslovuje stručně tak, že nadploše n-ho st. odpovídá pak nadplocha st. nižšího než $2n$. V tomto smyslu se ptejme, jaká je podmínka pro to, aby nadkvadrice jednoho prostoru odpovídala naší transformací nadkvadrika prostoru druhého.

Ježto nadkvadrice odpovídá obecně nadplocha st. 4-ho, je tedy třeba, aby v žádaném případě tato nadplocha se rozpadla na nadkvadriku a pak na elementy hlavní o úhrnném stupni 2. To je zřejmě možné jen dvěma způsoby: buď nadkvadrika daná je nadkužel, jehož vrchol je isolovaný hlavní bod; tomu pak odpovídá dvakrát počítaná hlavní nadrovina a zbývající součást je vlastní nadkvadrika, ovšem zase nadkužel. Anebo daná nadkvadrika neprochází isolovaným hlavním bodem, ale obsahuje hlavní varietu kvadratickou, které odpovídá hlavní nadkužel; zbývající součást je pak opět nadkvadrika, jež bod za bodem odpovídá nadkvadrice dané; tato nadkvadrika pak ovšem také prochází příslušnou hlavní kvadratickou varietou.

Tento druhý případ je tedy obecný případ toho, kdy nadkvadrice opět odpovídá nadkvadrika.

5. Jestliže oba prostory sobě odpovídající jsou soumístné a transformace má býti involutorní, musí splynouti oba isolované hlavní body a i obě hlavní kvadratické variety a tudíž i obě hlavní nadroviny. Oba hlavní nadkužele jsou rovněž soumístné a odpovídají si v kolineaci výše zmíněné, která se ovšem stane involutorní. Vezmeme-li za isolovaný hlavní bod opět bod O_1, lze soustavu sou-

[2]) Stojí za upozornění, že kdežto obecně jsou soustavy (6) a (7) ekvivalentní, není tomu tak pro body hlavní. Je tedy Cremonova transformace úplně — t. j. pro elementy obyčejné i hlavní — definována teprve oběma soustavami rovnic. Toto upozornění má ovšem platnost pro každou Cr. transformaci.

řadnou vždy voliti tak, aby tato involutorní kolineace byla vyjádřena rovnicemi[3])

$$x_2 : x_3 : \ldots : x_{n+1} = x'_2 : \ldots : x'_h : - x'_{h+1} : \ldots : - x'_{n+1} \quad (8)$$

Zvolme ještě hlavní nadrovinu za nadrovinu $x_1 = 0$ a budiž

$$Q(x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$$

další rovnice hlavní variety kvadratické. Forma Q se ovšem reprodukuje involucí (8). Snadná úvaha vede pak k výsledku, že při této volbě soustavy souřadné nejobecnější kvadratická involuce Cremonova je vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 : \ldots : x_{n+1} = Q(x'_2, \ldots x'_{n+1}) : x'_1 x'_2 : \ldots \\ \ldots : x'_1 x'_h : - x'_1 x'_{h+1} : \ldots : - x'_1 x_{n+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Podle počtu záporných znamének dostáváme různé typy kvadratických involucí; těchto typů je tedy

$$\tfrac{1}{2} n + 1 \text{ pro } n \text{ sudé, } \tfrac{1}{2}(n - 1) + 1 \text{ pro } n \text{ liché.}$$

Nebudeme se podrobněji zabývati těmito involucemi různých typů; pro jejich charakteristiku stačí vytknouti, že obecná involuce (9) se obdrží složením kvadratické involuce

$$x_1 : \ldots : x_{n+1} = Q : x'_1 x'_2 : \ldots : x'_1 x'_{n+1} \quad (10)$$

a lineární involuce

$$x_1 : \ldots : x_{n+1} = x'_1 : \ldots : x'_h : - x'_{h+1} : \ldots : - x'_{n+1}.$$

Všimneme si blíže jen involuce (10). Budiž y_i libovolný bod; jeho polární nadrovina vzhledem k nadkvadrice

$$x_1^2 - Q = 0$$

je

$$y_1 x_1 - \sum_{k=2}^{n+1} y_k Q_k = 0,$$

značí-li Q_i, jak obvyklo, lineární formy adjungované formě Q. Hledejme průsečík z_i této nadroviny se spojnicí O_1 s bodem y_i; platí proň

$$z_i = \varrho y_i, \quad i = 2, \ldots, n + 1$$

a obdržíme tedy pro z_1 vztah

$$y_1 z_1 - \varrho \sum_{k=2}^{n+1} y_k Q_k(y) = 0 \text{ t. j. } y_1 z_1 = \varrho Q(y).$$

[3]) V. Bertini, l. c., str. 81.

Platí tedy

$$z_1 : \ldots : z_{n+1} = Q(y) : y_1 y_2 : \ldots : y_1 y_n,$$

což je právě vztah (10). Máme tedy výsledek:

Involuce (10) vyjadřuje t. zv. inversi, totiž příbuznost, ve které bodu odpovídá bod, jenž s ním leží na spojnici s pevným bodem — středem inverse — a zároveň je s ním polárně sdružen vzhledem k dané nadkvadrice (základní nadkvadrice inverse).

Každý bod základní nadkvadriky je samodružný, jak ihned plyne z konstrukce inverse; jiných samodružných bodů není. Rovněž se snadno nahlédne, že hlavní nadrovina je polární nadrovina středu inverse vzhledem k základní nadkvadrice inverse.

Nebudeme se zabývati různými případy inverse podle zvláštních vlastností základní nadkvadriky; budeme v dalším předpokládati případ nejobecnější, kdy totiž — jak i v předch. předpokládáme — základní nadkvadrika neobsahuje střed inverse a není singulární.

6. Pro další úvahy potřebujeme rovnice inverse pro obecnou soustavu souřadnou. Budiž b_i střed inverse a

$$f(x) = 0$$

základní nadkvadrika inverse. Bodu x_i odpovídá bod x'_i takový, že

$$x'_i = \lambda b_i + \mu x_i;$$

mimo to jsou oba body polárně sdružené vzhledem k základní nadkvadrice, takže pro ně platí

$$\sum_{i=1}^{n+1} x'_i f_i(x) = 0.$$

Dosadíme sem za x'_i:

$$\sum_i (\lambda b_i + \mu x_i) f_i(x) = \lambda \sum_i b_i f_i(x) + \mu f(x) = 0.$$

Odtud

$$\lambda = f(x), \quad \mu = -\sum_i b_i f_i(x)$$

a tedy

$$x'_i = b_i f(x) - x_i \sum_{i=1}^{n+1} b_i f_i(x) \tag{11}$$

jako nejobecnější rovnice inverse.

Užitím tohoto tvaru zodpovíme otázku, jaká je podmínka pro to, aby dvě inverse složeny dávaly opět kvadratickou involuci. Uvažme především toto: mají-li dvě inverse složené v určitém pořadí dávati kvadratickou transformaci, musí nadrovině, když se na ni užije postupně obou inversí, odpovídati nadkvadrika. Poněvadž první inversí odpovídá nadrovině nadkvadrika procházející hlavní varietou této inverse, a této nadkvadrice má odpovídati druhou inversí opět nadkvadrika, musí hlavní varieta druhé inverse býti totožná s hlavní varietou první inverse, jak ihned plyne z podmínky pro to, aby nadkvadrice kvadratickou transformací odpovídala opět nadkvadrika, podmínky nalezené v odst. 4. Má-li mimo to výsledkem složení obou inversí býti involuce, musí — jak plyne ihned z obecné teorie příbuzností[4]) — obě inverse býti záměnné a tudíž základní nadkvadrika jedné inverse, jakožto geometrické místo jejích samodružných bodů, se reprodukovati druhou inversí. Shledáme, že tato nutná podmínka také stačí, čímž bude naše úloha rozřešena.

Vezmeme střed první inverse za bod O_1 a jinak zvolíme soustavu souřadnou tak, aby základní nadkvadrika měla rovnici

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 0,$$

což budeme psáti stručněji $(x^2) = 0$. Hlavní nadrovina je pak $x_1 = 0$. Jsou tedy rovnice první inverse, jak ihned plyne ze vzorců (11), tyto:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1^2 - (x^2) \\ x'_i &= x_1 x_i, \qquad i = 2, \ldots, n+1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Podle nalezených výsledků musí základní nadkvadrika druhé inverse procházeti hlavní varietou první, t. j. kvadratickou varietou

$$x_1 = 0, \quad (x^2) = 0.$$

Její rovnice má tedy tvar

$$a_0(x^2) + 2x_1(ax) = 0, \tag{13}$$

kde píšeme (ax) místo $\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i$, a je třeba určiti koeficienty a_i tak, aby tato nadkvadrika byla invariantní vůči inversi (12). Z rovnic této inverse plyne

$$(x'^2) = (x^2)\,[-x_1^2 + (x^2)], \; (ax') = x_1(ax) - a_1(x^2)$$

a nadkvadrika (13) přejde užitím první inverse v nadplochu, jež se rozpadne na nadkužel

$$x_1^2 - (x^2) = 0$$

a na vlastní nadkvadriku odpovídající nadkvadrice (13):

$$(a_0 + 2a_1)\,(x^2) - 2x_1(ax) = 0. \tag{13'}$$

[4]) V. na př. Reye: Die Geometrie der Lage, II. (3. vyd.) str. 80 a další.

Tato nadkvadrika může býti s (13) totožná dvojím způsobem:

1. $a_1 = \ldots = a_{n+1} = 0$,

což vede k základní nadkvadrice první inverse, jež ovšem je identicky invariantní vůči ní.

2. $a_0 + 2a_1 = -a_0$, t. j. $a_0 = -a_1$

a nadkvadrika má rovnici

$$a_1(x^2) - 2x_1(ax) = 0. \tag{14}$$

To je základní nadkvadrika druhé inverse. Ježto její hlavní nadrovina je také $x_1 = 0$, je její střed a_i, neboť to je, jak se snadno zjistí, pól této nadroviny vzhledem k nadkvadrice (14).

Určíme podle vzorců (11) rovnice této druhé inverse. Je zde

$$f(x) = a_1(x^2) - 2x_1(ax), \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i f_i(x) = -x_1(a^2)$$

a tedy rovnice druhé inverse jsou

$$x'_i = a_1 a_i(x^2) + x_1 x_i(a^2) - 2a_i x_1(ax). \tag{15}$$

Složíme obě inverse (12) a (15), nejprve v tom pořadí, že dosadíme z rovnic (12) do rovnic (15). Již výše byly nalezeny výrazy pro (x'^2) a (ax') plynoucí z rovnic (12); ty dosadíme do rovnic (15) za (x^2) a (ax). Nutno tu rozeznávati:

a) $i = 1$. Pak

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_1^2(x^2)\,[-x_1^2 + (x^2)] - (a^2)\,[-x_1^2 + (x^2)] + \\ &\qquad + 2a_1\,[-x_1^2 + (x^2)]\,.\,[-a_1(x^2) + x_1(ax)] = \\ &= [-x_1^2 + (x^2)]\,\{[-x_1^2 + (x^2)]\,(a^2) - a_1^2(x^2) + 2a_1x_1(ax)\}. \end{aligned}$$

b) $i \neq 1$. Pak

$$\begin{aligned} x'_i &= a_1 a_i\,[-x_1^2 + (x^2)]\,(x^2) - [-x_1^2 + (x^2)]\,x_1 x_i(a^2) + \\ &\qquad + 2a_i\,[-x_1^2 + (x^2)]\,[-a_1(x^2) + x_1(ax)] = \\ &= [-x_1^2 + (x^2)][-a_1 a_i(x^2) - x_1 x_i(a^2) + 2a_i x_1(ax)]. \end{aligned}$$

Lze tedy vynechati všude činitele $-x_1^2 + (x^2)$ a výsledek složení v uvedeném pořadí je:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= (a^2)\,[-x_1^2 + (x^2)] - a_1^2(x^2) + 2a_1x_1(ax) \\ x'_i &= -x_1x_i(a^2) - a_1a_i(x^2) + 2a_ix_1(ax), \quad i = 2, \ldots, n+1 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Složíme obě inverse v pořadí opačném. Z rovnic (15) plyne

$$(x'^2) = (a^2)\,(x^2)\,[a_1^2(x^2) + x_1^2(a^2) - 2a_1x_1(ax)],$$

což dosadíme do (12) za (x^2).

a) $i = 1$. Pak

$$x'_1 = [a_1^2(x^2) + x_1^2(a^2) - 2a_1x_1(ax)]\,[-(a^2)(x^2) + a_1^2(x^2) + x_1^2(a^2) - 2a_1x_1(ax)]$$

b) $i \neq 1$. Pak

$$x'_i = [a_1^2(x^2) + x_1^2(a^2) - 2a_1x_1(ax)]\,[a_1a_i(x^2) + x_1x_i(a^2) - 2a_ix_1(ax)].$$

Vynecháme-li ve všech těchto výrazech společného činitele, obdržíme však právě zase vzorce (16). To však znamená, že obě naše inverse jsou záměnné a výsledek jejich složení je involuce. Nalezli jsme tedy tento výsledek:

K dané inversi existuje nekonečně mnoho inversí takových, že jsou s ní záměnné a složeny s ní dávají kvadratickou involuci; každá taková inverse je určena, je-li dán její střed, který však je libovolný.

Druhá část věty plyne z toho, že nadkvadrika (14) a tudíž i příslušná inverse je právě určena, když jsou dány poměry koeficientů a_i.

*

Sur les involutions quadratiques dans l'espace à *n* dimensions.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur établit les conditions nécessaires pour les systèmes homaloïdaux d'hyperquadriques et en déduit les équations connues (6) d'une transformation quadroquadratique de Cremona. De là suivent facilement les équations (9) de l'involution quadratique la plus générale; si cette involution est une inversion, elle est exprimée, de la manière la plus générale, par les formules (11), $f(x) = 0$ étant l'hyperquadrique des points unis (hyperquadrique fondamentale), b_i le centre de l'inversion. L'auteur examine les conditions pour que le produit de deux inversions soit une involution quadratique; il trouve comme condition nécessaire et suffisante l'invariance de l'hyperquadrique fondamentale de l'une des deux inversions par rapport à l'autre.