Všechna čísla ze systému S jsou tudíž dělitelná číslem ω; tedy platí ω/ϱ, ω/α. Poněvadž ϱ je Gaussovo prvočíslo, je buď $\omega = \varepsilon\varrho$ anebo $\omega = \varepsilon$, při čemž ε je Gaussova jednotka. V prvém případě by $\frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha}{\varepsilon\varrho}$ bylo číslo Gaussovo, tedy také $\frac{\alpha}{\varrho}$, což je proti předpokladu $\varrho \times \alpha$. Tedy $\omega = \varepsilon$. Avšak ω je číslo ze systému S, tedy podle definice tohoto systému existují Gaussova čísla λ, μ taková, že $(\omega = \varepsilon)$ $\varepsilon = \lambda\varrho + \mu\alpha$. Násobme tuto rovnici číslem β:

$$\varepsilon\beta = \lambda\varrho\beta + \mu\alpha\beta.$$

Podle předpokladu je $\alpha\beta$ násobkem čísla ϱ, tedy $\alpha\beta = \varrho \,.\, \nu$, kde ν je číslo Gaussovo. Bude tudíž $\varepsilon\beta = \varrho\,(\lambda\beta + \mu\nu)$

a
$$\beta = \varrho\,\frac{\lambda\beta + \mu\nu}{\varepsilon}$$

$\left(\frac{\lambda\beta + \mu\nu}{\varepsilon}\right.$ je Gaussovo číslo, neboť $\frac{1}{\varepsilon}$ je Gaussova jednotka$\left.\right)$.

Tedy ϱ/β, c. b. d. (Pokračování.)

Elipsy na nepřímkové ploše rotační 2. stupně.*)

Dr. *Jan Roháček.*

Účelem těchto řádků je odvoditi způsobem, studujícím škol středních přístupným, známou vlastnost, že eliptický řez na nepřímkové rot. ploše 2. stupně promítá se z vrcholu plochy na rovinu kolmou k ose do *kružnice.*

Rot. plocha 2. stupně budiž dána (obr. 1) povrchovou kružnicí k (S, r), ležící v průmětně, rotační osou o a na ní vytknutými hlavními vrcholy A, B. Jsou-li vrcholy voleny na různých stranách průmětny, je plocha rot. *elipsoidem*, jsou-li na téže straně, je rot. *hyperboloidem dvojdílným* a je-li jeden z vrcholů úběžným bodem osy o, pak plocha je rot. *paraboloidem.*

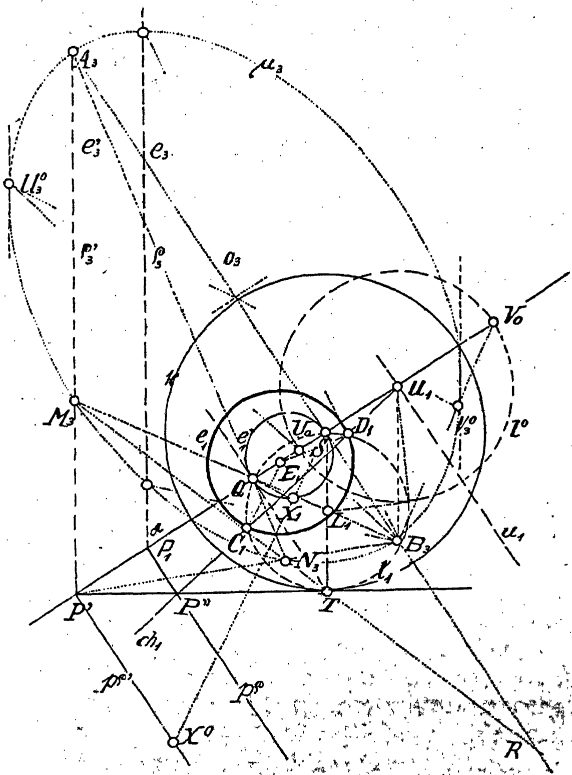
Zvolená rovina ϱ, daná stopou p^ϱ a odchylkou α, protíná plochu uvažovanou, na př. elipsoid, v elipse e. Rovina rovnoběžná $\varrho' \parallel \varrho$, vedená vrcholem A, seče plochu v podobné elipse e'. (Řezy rovnoběžné na ploše kuželové jsou podobné; dvěma eliptickými řezy na elipsoidu — i rovnoběžnými — možno proložiti plochu kuželovou.) Stopa její budiž $p^{\varrho'} \parallel p^\varrho$.

Rovina φ, vedená osou plochy kolmo na sečné roviny protíná

---

*) O jiných a také podobných vlastnostech poučíte se v knize: Deskr. geometrie (II. díl): Kadeřávek-Klíma-Kounovský (odst. 220, str. 439 atd.), která vyšla nákladem JČMF.

plochu v meridiánu μ, stopy v bodech resp. P', P_1 a rovinu ϱ' v průsečnici $\overline{AP'}$, jejímž průmětem je spojnice $\overline{P'S}$. Přímky $\overline{P'A}$ $\overline{P'B}$ vytínají na meridiánu μ průsečíky s plochou M, N (provedeno ve sklopení). Jak patrno, body A, B, N, M tvoří vepsaný čtyrúhelník, v němž úhlopříčky protínají se v bodě Q a prodloužené strany v bodech P', R, z nichž R se nalézá na ose o. Body P', Q, R



jsou vrcholy diagonálního trojúhelníka, jehož každá strana je polárou protilehlého vrcholu; tedy $\overline{P'Q}$ je polárou pólu R. Tato stojí na osu kolmo a ježto prochází bodem P', je totožná s přímkou $\overline{P'S}$. Z toho vysvítá, že průsečík úhlopříček Q, který možno považovati za centrální průmět bodu M z druhého vrcholu B, padne vždy na spojnici $\overline{P'S}$ a lze jej sestrojiti polárou pólu P' vzhledem ke kružnici k.

Sestrojíme-li tedy z bodu P' tečnu ke kružnici k a z dotyčného bodu T spustíme kolmici na $\overline{P'S}$, obdržíme bod Q. Ježto trojúhelník STP' je pravoúhlý, platí podle věty Euklidovy

$$\overline{ST}^2 = \overline{SQ} \, . \, \overline{SP'} = r^2,$$

čili body P', Q jsou inversně sdružené ke kružnici k. Vytkneme-li nyní na stopě $p^{\varrho'}$ kdekoliv bod X^0, seče přímka $\overline{X^0A}$ plochu v bodě X, jehož centrální průmět X_1 je na spojnici $\overline{X^0S}$ stanoven polárou bodu X^0 vzhledem ke kružnici k, která $\overline{X^0S}$ kolmo seče a bodem Q prochází. Vidíme, že trojúhelník SQX_1 je opět pravoúhlý, pročež geom. místem vrcholů X_1 pravého úhlu je kružnice e'_1, jakožto inversní útvar k přímce p a jako centrální průmět elipsy e'.

Nyní je jasno, že podobná a rovnoběžně položená elipsa e, ve které rovina ϱ seče plochu, promítá se z téhož středu B na průmětnu do kružnice e_1, která má střed E_1 na $\overline{P'S}$. Abychom ji sestrojili, veďme pomocnou rovinu tečnou $\overline{P'T}$ a vrcholem A. Tato seče plochu v elipse l, jejímž centrálním průmětem je — podle předešlého — kružnice l_1, nad průměrem $\overline{ST}$ opsaná, a roviny ϱ', ϱ ve dvou rovnoběžných průsečnicích $\overline{P'A} \parallel ch$, vycházejících ze stopníků P' resp. P''. Jejich středové obrazy, procházejí společným úběžníkem U_1, který na $\overline{P'S}$ sestrojíme průsečíkem paprsku, vedeného středem B rovnoběžně se směrem $\overline{P'A}$. (Bod U_1 je zároveň centrálním průmětem bodu M', který na meridiánu μ je s bodem M podle středu plochy souměrně položen.) Přímka u_1 jdoucí bodem U_1 kolmo na $\overline{P'S}$ je společnou úběžnicí pro všechny směry dané rovinou ϱ. Přímka $\overline{P''U_1} \equiv ch_1$ seče kružnici l_1 ve dvou bodech C_1, D_1, jimiž hledaná kružnice e_1 prochází; střed její E_1 leží v průsečíku paprsku $\overline{PS}$ se symetrálou délky $\overline{C_1D_1}$.

Z obrázku je jasno, že bod U_1 je potenčním bodem jak kružnice l_1, tak kružnice e'_1 i všech kružnic e_1, do nichž se promítají rovnoběžné řezy s rovinou ϱ. Tedy vidíme, že eliptické rovnoběžné řezy na rotačním elipsoidu promítají se z vrcholu B na průmětnu do svazku kružnic, který protíná pevnou kružnici l_0 (pro směr roviny ϱ), opsanou z úběžníku U_1 poloměrem délky tečny vedené středem U_1 ke kružnici l_1. Nulové kružnice U_0, V_0 svazku, body to, v nichž l_0 protíná $\overline{P'S}$, jsou centrálními průměty bodů, v nichž se tečné roviny rovnoběžné s rovinou ϱ plochy dotýkají. Vedeme-li nyní ve svazku kružnic jakoukoliv kružnici e''_1, která kružnici l_0 ortogonálně protíná, možno nalézti rovinu $\varrho'' \parallel \varrho$ a její řez s plochou e'', tím, že stanovíme chordálu ch'_1 kružnic e''_1, l_1, která na stopě $\overline{P'T}$ vytíná bod P''', kterým jde stopa $p^{\varrho''} \parallel p^{\varrho}$.

Věty o centrálních průmětech řezů na elipsoidu možno výhodně použíti při stanovení průsečíku přímky s plochou. Přímkou a jedním vrcholem plochy A stanovená rovina seče elipsoid v elipse;

sestrojíme její centrální průmět i centrální průmět přímky a průsečíky promítneme z vrcholu B zpět na danou přímku.

Přejde-li jeden vrchol elipsoidu na př. B do nekonečna na ose o, přejde plocha v rot. *paraboloid.* Uvažovaný čtyřúhelník $AMNB$ má úhlopříčky $\overline{AN}$, $\overline{MB}$, z nichž $\overline{MB}$ stojí na průmětně kolmo, jejich průsečík Q, nalézající se na $\overline{P'S}$, je opět polárně sdruženým bodem k pólu P' vzhledem ke kružnici k. Opíše-li bod P' stopu $p^{\varrho'}$, opíše jemu inversně sdružený bod Q kružnici e'_1 opsanou nad průměrem $\overline{QS}$, jako centrální průmět elipsy e', v níž rovina jdoucí vrcholem A plochu seče, z nekonečně vzdáleného bodu B. Jest tedy tato kružnice e'_1 průmětem ortogonálním (provedení ponechává se čtenáři).

Rovina ϱ, vedená rovnoběžně s rovinou ϱ', protne paraboloid opět v podobné elipse e a její ortogonální průmět e_1 je kružnice, kterou možno sestrojiti pomocnou rovinou $P'AT$ a jejím řezem (l, l_1) s paraboloidem. Ježto průsečnice roviny $P'TA$ s rovinou je rovnoběžná s $\overline{P'A}$ i v průmětě, vidíme, že symetrála úsečky $\overline{C_1D_1}$ vytíná na $\overline{P'S}$ střed právě v polovině délky $\overline{QS}$. Tento střed E_1 je společným pro všechny kružnice e_1, do nichž se ortogonálně promítají eliptické řezy rovnoběžných rovin. Tedy: eliptické řezy rovnoběžné na rot. paraboloidu promítají se ortogonálně na rovinu kolmou k jeho ose do svazku soustředných kružnic o společném středu E_1, který je ortogonálným průmětem dotyčného bodu roviny tečné rovnoběžné s daným směrem ϱ.

Je-li plocha dvojdílným rot. hyperboloidem, pak postup sestrojení průmětů řezů eliptických rovnoběžných na rovinu jakéhokoliv kruhového řezu z vrcholu plochy je týž, jako u rot. elipsoidu.

Je-li konečně $\overline{SA} = \overline{SB} = r$, pak plocha přechází v plochu kulovou a veškeré konstrukce, dříve uvedené, vedou ke *stereografické* projekci a nalézá zde své odůvodnění známá věta, že jakákoliv kružnice na kouli promítá se z jejího bodu, jako pólu na rovinu kolmou ke spojnici pólu se středem koule, do kružnice.

Pomůcky k rýsování kuželoseček.*)

Dr. *Al. Wangler.*

Na střední škole potřebují často žáci i učitel pomůcky, kterou by se mohla rychle narýsovati v sešitech i na tabuli kuželosečka

*) Viz též Technický naučný slovník: heslo Elipsografy od prof. Dr. J. Klímy.